

SELECCION
DE
TEMAS
DE

MATEMATICA

POLINOMIOS
SUMATORIAS
INDUCCION COMPLETA
COMBINATORIA
BINOMIO DE NEWTON
GEOMETRIA ANALITICA
CONICAS
INECUACIONES
VECTORES, RECTA Y PLANO
en el espacio
MATRICES Y DETERMINANTES
SISTEMAS
4150 ejercicios propuestos
con sus resultados

JORGE GID HOFFMANN



PROLOGO

Las páginas que siguen son fruto de la convicción, reforzada por muchos años de experiencia docente, de que al estudiante venezolano de bachillerato le sobran capacidad y voluntad para enfrentar el estudio de la Matemática de una forma profunda e íntegra y para fijar sus metas más allá de los mínimos requerimientos de los programas oficiales.

La aceptación que ha tenido mi anterior trabajo, Selección de Temas de Matemática 4, me ha hecho ver, además, que, lejos de estar solo en mi empeño por exigir lo máximo del estudiante, soy tan sólo uno más de una verdadera legión de docentes que no se resignan a la superficialidad.

A todos aquellos, estudiantes y docentes, que combaten la mediocridad y no temen guiar su barca hacia aguas profundas para atrapar los mejores peces del saber, dedico con admiración y respeto este trabajo.

Muchos han sido los que de una forma u otra estuvieron a mi lado en la realización de esta obra. A todos les estoy agradecido. Sin embargo me parecería una ingratitud no mencionar a algunos de quienes recibí una ayuda muy especial:

Carolina Orellana y Francis Abreu, brillantes exalumnas, quienes me hicieron llegar sus observaciones y correcciones. Este trabajo sale con muchos menos errores debido a la dedicación de ellas. Varias secciones no pasaron, lamentablemente, por sus manos; los errores que en ellas pueden aparecer son exclusivamente de mi responsabilidad.

Jorge Barrero, tocayo y amigo, en quien no sé qué admirar más, si su capacidad para encontrar solución a los problemas que se le presentan, o su sensibilidad para advertir los problemas de los demás y ayudar a resolverlos.

No me queda sino desear que este libro sea de utilidad para aquél que lo tome en sus manos y que encuentre en él elementos que le ayuden en su empeño por lograr un dominio profundo de la materia. Y ojalá que, al constatar que el esfuerzo por hacer bien las cosas deja una honda satisfacción, haga de la lucha contra la mediocridad una filosofía de vida.

**SELECCION
DE
TEMAS
DE**

MATEMATICA

POLINOMIOS —
SUMATORIAS —
INDUCCION COMPLETA —
COMBINATORIA —
BINOMIO DE NEWTON —
GEOMETRIA ANALITICA
CONICAS
INECUACIONES
VECTORES, RECTA Y PLANO
 en el espacio
MATRICES Y DETERMINANTES —
SISTEMAS
4150 ejercicios propuestos
 con sus resultados

JORGE GID HOFFMANN

SPHINX
Caracas

Generalidades

Toda expresión en la forma

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px + q$$

donde n es un entero positivo, recibe el nombre de **Polinomio** en el que x es la **Variable**, cada sumando es un **Término** y los parámetros $a, b, c, \dots, p$ y q son los **Coefficientes** de los términos del polinomio.

Un polinomio en x se representa por la notación $P_{(x)}$ que se lee "P de x", o con el uso de otras letras ($Q_{(x)}$, $M_{(x)}$, $N_{(x)}$, $f_{(x)}$, $g_{(x)}$ etc.).

Por ejemplo, $x^3 + 3x^2 - 5x + 2$ es un polinomio en x . Podemos expresarlo así:

$$P_{(x)} \equiv x^3 + 3x^2 - 5x + 2$$

El **Valor numérico** de un polinomio en x para un cierto valor particular $x = a$ se representa por $P_{(a)}$ y se obtiene sustituyendo la variable x por a .

En el ejemplo anterior, el valor numérico del polinomio para $x = -2$ es

$$\begin{aligned} P_{(-2)} &= (-2)^3 + 3(-2)^2 - 5(-2) + 2 \\ &= -8 + 12 + 10 + 2 \\ &= \boxed{16} \end{aligned}$$

El **Grado de un término** de un polinomio es igual a la suma de los exponentes de las variables de dicho término.

$5x$ es un término de primer grado porque el exponente de la parte literal x es uno (1).

$8xy$ es un término de segundo grado porque la suma de los exponentes de los factores literales es 2

xy^2 es un término de tercer grado

$7x^5y^2z$ es un término de octavo grado

El **Grado de un polinomio** es el grado de su término de mayor grado. En el polinomio $5x^3 + 3x^2 + 2x + 7$ el primer término es el de mayor grado (tercero). El polinomio es, entonces, de tercer grado.

Un polinomio puede ser de **Grado nulo** si el máximo grado de la variable es cero. $P_{(x)} \equiv 7$ es un polinomio de grado nulo.

En general, cualquier número real distinto de cero es un polinomio de grado

nulo. El número cero también se considera un polinomio: es el único polinomio cuyo grado no está definido.

Por eso se prefiere llamar **Polinomio constante** al polinomio $P_{(x)} \equiv a$ (donde $a \neq 0$) y **Polinomio nulo** al polinomio $P_{(x)} \equiv 0$.

Un polinomio es **homogéneo** si todos sus términos son de igual grado:

$4x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3 - 5xy^4 + y^5$ es un polinomio homogéneo de quinto grado, pues todos sus términos son de quinto grado.

Términos semejantes de dos polinomios son los términos que tienen idéntica la parte literal.

Los coeficientes de los términos de un polinomio pueden ser **enteros, fraccionarios, irracionales e imaginarios**:

$x^3 + 3x^2 + 2x - 1$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbf{Z}$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbf{Q}$

$\sqrt{2}x^3 + 3\sqrt{6}x^2 + 1$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbf{R}$

$x^4 + (3+i)x^3 + 2ix + 5$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbf{C}$

Dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son **iguales** sólo si los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.

Operaciones con polinomios

Suma Algebraica

Para sumar dos o más polinomios, se suman algebraicamente los términos semejantes de dichos polinomios.

El grado del polinomio suma es igual o menor que el del Polinomio sumando de mayor grado

Ejemplo

Sean $P_{(x)} \equiv 3x^3 - 5x^2 + 3$

$M_{(x)} \equiv 5x^4 - 2x^3 - 5x - 1$

$N_{(x)} \equiv x^3 - 4x^2 + 3x - 2$

Determinar $P_{(x)} + M_{(x)} - N_{(x)}$

$$\begin{aligned} P_{(x)} + M_{(x)} - N_{(x)} &= 3x^3 - 5x^2 + 3 + 5x^4 - 2x^3 - 5x - 1 - x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \\ &= \boxed{5x^4 - x^3 - x^2 - 8x + 4} \end{aligned}$$

El polinomio suma es de cuarto grado (al igual que $M_{(x)}$, que era el polinomio sumando de mayor grado). Podría haber sido de tercer grado si en la suma algebraica se hubieran eliminado los términos de cuarto grado, o de grado menor, si se hubieran eliminado también los términos de tercero, segundo, etc., grado.

Multiplicación

La multiplicación de polinomios se efectúa teniendo en cuenta la ley de los signos y aplicando la propiedad distributiva

El grado del Polinomio Producto es igual a la suma de los grados de los Polinomios Factores

Ejemplo

Sean $P_{(x)} \equiv 2x^3 + 3x^2 - x + 2$

$$M_{(x)} \equiv x^3 - 4x - 1$$

Determinar $P_{(x)} \cdot M_{(x)}$

$$\begin{aligned} P_{(x)} \cdot M_{(x)} &= (2x^3 + 3x^2 - x + 2)(x^3 - 4x - 1) \\ &= 2x^6 - 8x^4 - 2x^3 + 3x^5 - 12x^3 - 3x^2 - x^4 + 4x^2 + x + 2x^3 - 8x - 2 \\ &= \boxed{2x^6 + 3x^5 - 9x^4 - 12x^3 + x^2 - 7x - 2} \end{aligned}$$

Multiplicación por coeficientes

Si los polinomios factores contienen una misma única variable y están ordenados en la misma forma con relación a la variable (se aconseja que sea en forma decreciente) la multiplicación se facilita utilizando sólo los coeficientes, tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Efectuar el anterior producto $P_{(x)} \cdot M_{(x)}$ utilizando sólo los coeficientes:

2	3	-1	2						
				Coeficientes de $P_{(x)}$					
1	0	-4	-1						
				Coeficientes de $M_{(x)}$ (nótese el cero, coeficiente de x^2)					
2	3	-1	2						
				-8	-12	4	-8		
					-2	-3	1	-2	
2	3	-9	-12	1	-7	-2			
							Coeficientes del Polinomio Producto (de 6° grado)		

$$P_{(x)} \cdot M_{(x)} = \boxed{2x^6 + 3x^5 - 9x^4 - 12x^3 + x^2 - 7x - 2}$$

División de polinomios

Ordenados el Dividendo y el Divisor, se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor para obtener el primer término del Cociente. Este primer término se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del Dividendo (para lo cual se le cambia signo), escribiendo cada término debajo de su semejante. Se obtiene así un primer residuo parcial.

La operación se repite con cada residuo parcial que se obtenga (mientras el grado del residuo parcial sea mayor o igual al del Divisor).

El Residuo de la división será el primer residuo parcial cuyo grado sea menor que el del Divisor.

Ejemplo

$$\text{Sean } D_{(x)} \equiv 2x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 - 35x - 24$$

$$d_{(x)} \equiv x^2 - 3x - 2$$

Determinar $Q_{(x)}$ (cociente) y $R_{(x)}$ (residuo) de dividir $D_{(x)}$ entre $d_{(x)}$.

$$\begin{array}{r} 2x^5 - 3x^4 - 8x^3 - 11x^2 - 35x - 24 \quad | \quad x^2 - 3x - 2 \\ \underline{-2x^5 + 6x^4 + 4x^3} \\ 3x^4 - 4x^3 \\ \underline{-3x^4 + 9x^3 + 6x^2} \\ 5x^3 - 5x^2 \\ \underline{-5x^3 + 15x^2 + 10x} \\ 10x^2 - 25x \\ \underline{-10x^2 + 30x + 20} \\ 5x - 4 \end{array}$$

Respuesta:

$$Q_{(x)} = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10$$

$$R_{(x)} = 5x - 4$$

En la división, el grado del Cociente es igual a la diferencia del grado del Dividendo y el grado del Divisor.

El mayor grado que puede tener el Residuo es el grado del Divisor menos una unidad.

El Residuo es cero cuando la división es exacta.

En toda división se cumple que

$$\mathbf{Dividendo = Divisor \times Cociente + Residuo}$$

(Identidad fundamental de la división)

La división del ejemplo anterior se puede hacer de forma más sencilla utilizando sólo los coeficientes:

$$\begin{array}{r} 2 \quad -3 \quad -8 \quad -11 \quad -35 \quad -24 \quad | \quad 1 \quad -3 \quad -2 \\ \underline{-2 \quad 6 \quad 4} \\ 3 \quad -4 \\ \underline{-3 \quad 9 \quad 6} \\ 5 \quad -5 \\ \underline{-5 \quad 15 \quad 10} \\ 10 \quad -25 \\ \underline{-10 \quad 30 \quad 20} \\ 5 \quad -4 \end{array}$$

Respuesta:

$$Q_{(x)} = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 10$$

$$R_{(x)} = 5x - 4$$

Ejercicio 1

Dados los siguientes polinomios:

$$M_{(x)} \equiv 6x^6 + 17x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 38x^2 + 9x - 63$$

$$N_{(x)} \equiv 2x^3 + 5x^2 - x + 7$$

$$P_{(x)} \equiv 2x^5 + x^4 - 10x^3 + 29x^2 - 32x + 4$$

$$T_{(x)} \equiv 2x^2 - 3x + 6$$

$$V_{(x)} \equiv x^3 - 2x^2 + 3x + 1$$

$$W_{(x)} \equiv 4x^3 - 2x + 1$$

$$f_{(x)} \equiv 3x^5 + x^3 - x^2 + 3$$

$$g_{(x)} \equiv x - 2$$

$$h_{(x)} \equiv 2x + 1$$

determinar:

- 1) $M_{(x)} - N_{(x)}$
- 2) $N_{(x)} + V_{(x)} - W_{(x)}$
- 3) $M_{(x)} + P_{(x)}$
- 4) $N_{(x)} \cdot T_{(x)}$
- 5) $V_{(x)} \cdot h_{(x)}$
- 6) $f_{(x)} - P_{(x)}$

- 7) $M_{(x)} - [N_{(x)} \cdot V_{(x)}]$
- 8) $P_{(x)} + T_{(x)}$
- 9) $M_{(x)} + N_{(x)}$
- 10) $W_{(x)} + T_{(x)}$
- 11) $N_{(x)} + g_{(x)}$
- 12) $W_{(x)} + N_{(x)}$

División de un polinomio entre $x+a$ — Regla de Ruffini

La división de un polinomio por el binomio $x + a$ puede realizarse con mayor rapidez por un procedimiento que recibe el nombre de *División Sintética* o *Regla de Ruffini*.

Ejemplo 1

Sea la división $(x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 3x + 3) : (x + 2)$

Para obtener el cociente por el procedimiento ordinario se dispone la operación de esta forma:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 3x + 3 \quad | \quad x + 2 \\
 \underline{-x^4 - 2x^3} \\
 3x^3 \\
 \underline{-3x^3 - 6x^2} \\
 -4x^2 \\
 \underline{4x^2 + 8x} \\
 5x \\
 \underline{-5x - 10} \\
 -7
 \end{array}$$

Llamemos $d_1, d_2, d_3 \dots$ los coeficientes del Dividendo:

$$d_1 = 1$$

$$d_2 = 5$$

$$d_3 = 2$$

$$d_4 = -3$$

$$d_5 = 3$$

Llamemos a al segundo término del Divisor: $a = 2$ (La raíz del Divisor será $-a = -2$).

Llamemos $c_1, c_2, c_3 \dots$ los coeficientes del Cociente:

$$c_1 = 1 \quad c_2 = 3 \quad c_3 = -4 \quad c_4 = 5$$

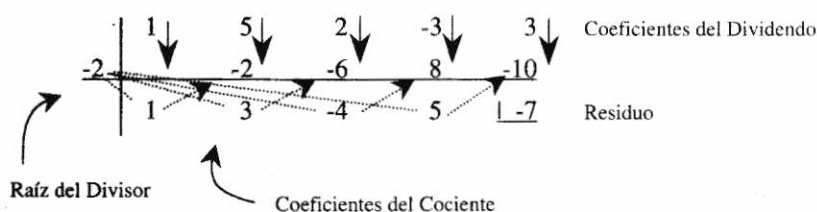
Llamemos, por último, R al Residuo: $R = -7$

Podemos, entonces, observar:

- 1) El coeficiente del primer término del Cociente es igual al del primero del Dividendo: $c_1 = d_1 = 1$.
- 2) El coeficiente del segundo término del Cociente se obtiene multiplicando el del término anterior por -2 (raíz del Divisor) y sumando el producto al coeficiente del segundo término del Dividendo: $c_2 = 1 \cdot (-2) + 5 = c_1 \cdot (-a) + d_2$
- 3) El coeficiente del tercer término del Cociente se obtiene multiplicando el del término anterior por la raíz del Divisor y sumando el producto al coeficiente del tercer término del Dividendo: $c_3 = 3 \cdot (-2) + 2 = c_2 \cdot (-a) + d_3$
- 4) De forma análoga se obtienen el coeficiente del cuarto término del Cociente y el Residuo
- 5) Obsérvese, por último, que el grado del Cociente es una unidad menor que el grado del Dividendo, lo que sucederá siempre que el Divisor sea de primer grado, es decir, de la forma $x + a$.

Disposición práctica

Los cálculos anteriores se efectúan rápidamente disponiendo los elementos de la siguiente forma:



Las flechas dirigidas lateralmente ($\rightarrow$) indican un producto.

Las flechas dirigidas hacia abajo ($\downarrow$) indican una suma algebraica.

Resumen de la División Sintética o Regla de Ruffini:

- 1) El Cociente de dividir un polinomio en x por otro de la forma $x + a$ es un tercer polinomio de grado menor en una unidad que el grado del Dividendo.
- 2) El coeficiente del primer término del Cociente es igual al coeficiente del primer término del Dividendo.

- 3) A partir del segundo, los coeficientes de un término cualquiera del Cociente se obtienen multiplicando el coeficiente del término anterior por la raíz del Divisor y sumándole al producto el coeficiente correspondiente del Dividendo.

Ejemplo 2

Efectuar: $(x^8 + 5x^7 - 3x^5 - 2x^4 + 6x^2 - 3x + 5) \div (x + 1)$

Utilizando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrr} -1 & 1 & 5 & 0 & -3 & -2 & 0 & 6 & -3 & 5 \\ & & -1 & -4 & 4 & -1 & 3 & -3 & -3 & \\ \hline & 1 & 4 & -4 & 1 & -3 & 3 & 3 & -6 & 11 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= x^7 + 4x^6 - 4x^5 + x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 3x - 6 \\ R &= 11 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Efectuar: $(6x^4 - 5x^3 - 3x + 2) \div (x - 2)$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 6 & -5 & 0 & -3 & 2 \\ & & 12 & 14 & 28 & 50 \\ \hline & 6 & 7 & 14 & 25 & 52 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= 6x^3 + 7x^2 + 14x + 25 \\ R &= 52 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Efectuar: $(2x^5 + 3\sqrt{3}x^4 + 7x^3 + 2\sqrt{3}x^2 - 3x + 3\sqrt{3}) \div (x + \sqrt{3})$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -\sqrt{3} & 2 & 3\sqrt{3} & 7 & 2\sqrt{3} & -3 & 3\sqrt{3} \\ & & -2\sqrt{3} & -3 & -4\sqrt{3} & 6 & -3\sqrt{3} \\ \hline & 2 & \sqrt{3} & 4 & -2\sqrt{3} & 3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= 2x^4 + \sqrt{3}x^3 + 4x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 \\ R &= 0 \quad (\text{La división es exacta}) \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Efectuar: $(3x^5 + 4x^4 - 2x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}) \div (x - \frac{2}{3})$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{2}{3} & 3 & 4 & -2 & -\frac{1}{3} & 2 & -\frac{5}{3} \\ & & 2 & 4 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{16}{9} \\ \hline & 3 & 6 & 2 & 1 & \frac{8}{3} & \frac{1}{9} \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= 3x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + \frac{8}{3} \\ R &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

$$\text{Efectuar: } (2Z^4 + 3iZ^3 + 3Z^2 + Z + 5) \div (Z + 2i)$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 3i & 3 & 1 & 5 \\ -2i & & -4i & -2 & -2i & -4-2i \\ \hline & 2 & -i & 1 & 1-2i & 1-2i \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= 2Z^3 - iZ^2 + Z + 1 - 2i \\ R &= 1 - 2i \end{aligned}$$

Ejemplo 7

$$\text{Efectuar: } [3Z^3 - (8-5i)Z^2 + (1+3i)Z - 3+9i] \div (Z-3+2i)$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -8+5i & 1+3i & -3+9i \\ 3-2i & & 9-6i & 1-5i & 2-10i \\ \hline & 3 & 1-i & 2-2i & 1-1-i \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= 3Z^2 + (1-i)Z + 2 - 2i \\ R &= -1 - i \end{aligned}$$

Ejemplo 8

$$\text{Efectuar: } (5x^{12} + 6x^9 - 2x^6 - 4x^3 + 2) \div (x^3 + 1)$$

Aunque en esta oportunidad el divisor no es de la forma $x + a$, sin embargo, dado que los exponentes de la variable en el dividendo son múltiplos del exponente de la variable del divisor, efectuando un cambio de variable, podemos emplear la Regla de Ruffini.

Haciendo $x^3 = y$ tenemos: $(5y^4 + 6y^3 - 2y^2 - 4y + 2) \div (y + 1)$

Utilizando ahora Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 6 & -2 & -4 & 2 \\ -1 & & -5 & -1 & 3 & 1 \\ \hline & 5 & 1 & -3 & -1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} Q_{(y)} &= 5y^3 + y^2 - 3y - 1 \\ R &= 3 \end{aligned}$$

Y, deshaciendo el cambio de variable:

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= 5x^9 + x^6 - 3x^3 - 1 \\ R &= 3 \end{aligned}$$

Ejemplo 9

$$\text{Efectuar: } (3x^{25} + 6x^{20} + 2x^{15} - 7x^5 - 2) \div (x^5 - 2)$$

Dado que los exponentes de la variable en el dividendo son múltiplos del exponente de la variable del divisor, podemos efectuar un cambio de variable.

$$\text{Haciendo } x^5 = y \text{ tenemos: } (3y^5 - 6y^4 + 2y^3 - 7y - 2) \div (y - 2)$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 2 & 3 & -6 & 2 & 0 & -7 & -2 \\ & & 6 & 0 & 4 & 8 & 2 \\ \hline & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{array}$$

$$Q_{(y)} = 3y^4 + 2y^2 + 4y + 1$$

$$R = 0 \quad (\text{La división es exacta})$$

Y, deshaciendo el cambio de variable:

$$\boxed{\begin{array}{l} Q_{(x)} = 3x^{20} + 2x^{10} + 4x^5 + 1 \\ R = 0 \end{array}}$$

Ejercicio 2

Determinar $Q_{(x)}$ y R por el método de Ruffini:

$$1) \quad (3x^3 - 2x^2 - 11x + 7) \div (x - 2)$$

$$2) \quad (5x^4 - 43x^2 + 4x + 4) \div (x + 3)$$

$$3) \quad (x^4 - 5x^3 - 2x + 8) \div (x - 5)$$

$$4) \quad (x^5 + 1) \div (x + 1)$$

$$5) \quad (3x^4 + 7x^3 + 8x^2 + 14x + 7) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$$

$$6) \quad (6x^4 + 5x^3 - 9x^2 - 13x + 10) \div \left(x - \frac{2}{3}\right)$$

$$7) \quad (4x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x + 1) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$8) \quad (x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$9) \quad (x^5 - 5x^3 + 11x + 5\sqrt{2}) \div (x - \sqrt{2})$$

$$10) \quad (x^4 - x^2 - 1) \div \left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$11) \quad (3x^5 - 53x^3 + 2\sqrt{2}x^2 - 7x + \sqrt{2}) \div (x + 3\sqrt{2})$$

$$12) \quad (x^5 - 2ax^4 + a^2x^3 - 2x^2 - 2ax + 1) \div (x - a)$$

$$13) \quad [2x^3 + (3m - 2a)x^2 + (m^2 - 1)x + am^2 - a^2m + a] \div (x - a + m)$$

$$14) \quad (2Z^4 - iZ^3 + Z^2 + 3Z - 2i) \div (Z - i)$$

- 15) $[Z^5 - Z^4 - iZ^3 + (4 + 7i)Z^2 + 6iZ - 4 + 2i] \div (Z - 2 + i)$
- 16) $[(1 + i)Z^3 + (1 - 2i)Z^2 + (1 - 11i)Z - 8i] \div (Z - 3 - 2i)$
- 17) $[(1 + 2i)Z^3 - (5 + 5i)Z^2 - 6 + 4i] \div (Z - 3 + i)$
- 18) $[2Z^3 + (3 - 4i)Z^2 - (2 - i)Z + 3 - 4i] \div (Z - \frac{1}{2} - i)$
- 19) $(3x^6 - 7x^4 + 7x^2 - 8) \div (x^2 - 2)$
- 20) $(x^{15} + 6x^{10} - x^5 - 25) \div (x^5 + 5)$
- 21) $(2x^{16} + 6x^{12} + x^4 + 4) \div (x^4 + 3)$
- 22) $(6x^{21} - 7x^{14} + 3) \div (x^7 - \frac{1}{2})$
- 23) $(3x^{12} - 10x^6 + 7x^3 + 6) \div (x^3 + 2)$
- 24) $(ax^{18} - 3ax^{12} + ax^6 + 5) \div (x^6 - 2)$
- 25) $(3x^6 - 2ax^4 + 5a^2x^2 - 6a^3) \div (x^2 - a)$
- 26) $(2Z^9 + 3Z^6 + 3iZ^3 - i) \div (Z^3 + i)$
- 27) $[2Z^{24} + (1 - i)Z^{16} - (22 - 15i)Z^8 + 13] \div (Z^8 - 3 + i)$
- 28) $(Z^8 + 4) \div (Z^2 - 1 - i)$

División de un polinomio entre $ax + b$

Mediante una sencilla operación, puede también aplicarse la Regla de Ruffini en el caso de que el divisor sea de la forma $ax + b$.

Téngase sólo en cuenta que, al realizar una misma operación con el Dividendo y con el Divisor, el Cociente no se altera, pero el Residuo sí queda afectado por la operación realizada. Esto es fácilmente comprobable mediante una elemental división de números.

Si, por ejemplo, dividimos Dividendo y Divisor entre 3, al realizar la división sintética no obtendremos R sino $R/3$; si multiplicamos Dividendo y Divisor por 5, no obtendremos R sino $5R$. Veámoslo en la práctica:

Ejemplo 10

Efectuar: $(9x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x - 3) \div (3x + 1)$

Debemos, para poder aplicar Ruffini, llevar primero el divisor a la forma $x + a$. Para esto dividimos entre 3 todos los términos del dividendo y del divisor:

$$(3x^4 + 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1) \div (x + \frac{1}{3})$$

Utilizando Ruffini:

	3	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-1
$-\frac{1}{3}$		-1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{27}$
	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{29}{27}$

La operación realizada con el dividendo y con el divisor no afecta al cociente. Por tanto

$$Q_{(x)} = 3x^3 + x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9}$$

El residuo, en cambio, sí queda afectado por la operación. Por tanto lo que obtuvimos al hacer la división no es R sino $R/3$:

$$\frac{R}{3} = -\frac{29}{27}$$

Despejando R

$$R = -\frac{29}{9}$$

Ejemplo 11

Efectuar: $(x^3 + 5x^2 - 9x + 10) \div \left(\frac{x}{7} + 1\right)$

Multiplicamos todos los términos del dividendo y del divisor por 7 para llevar éste último a la forma $x + a$

$$(7x^3 + 35x^2 - 63x + 70) \div (x + 7)$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -7 & 7 & 35 & -63 & 70 \\ & & -49 & 98 & -245 \\ \hline & 7 & -14 & 35 & -175 \end{array}$$

El cociente no se alteró por la operación realizada, por tanto

$$Q_{(x)} = 7x^2 - 14x + 35$$

En cambio, el residuo sí, por lo cual no obtuvimos R sino $7R$:

$$7R = -175$$

Despejando R :

$$R = -25$$

Ejemplo 12

Efectuar: $(4x^{25} + 8x^{20} - x^{15} - 2x^{10} + x^5 - 1) \div (2x^5 - 1)$

Hacemos, en primer lugar, el Cambio de Variable: $x^5 = y$

$$(4y^5 + 8y^4 - y^3 - 2y^2 + y - 1) \div (2y - 1)$$

Dividiendo ahora todos los términos entre 2:

$$(2y^5 + 4y^4 - \frac{1}{2}y^3 - y^2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}) \div (y - \frac{1}{2})$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{2} & 2 & 4 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ & & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{array}$$

El cociente no se ha alterado, el residuo sí:

$$Q_{(y)} = 2y^4 + 5y^3 + 2y^2 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{R}{2} = -\frac{1}{4}$$

Despejando R :

$$R = -\frac{1}{2}$$

Desahaciendo el Cambio de Variable:

$$Q_{(x)} = 2x^{20} + 5x^{15} + 2x^{10} + \frac{1}{2}$$

$$R = -\frac{1}{2}$$

Ejemplo 13

Efectuar: $[(3-4i)Z^3 + (1-8i)Z^2 + (4+3i)Z + 14-7i] \div [(2-i)Z + 5]$

Dividimos todos los términos entre $2-i$:

$$[(2-i)Z^3 + (2-3i)Z^2 + (1+2i)Z + 7] \div [Z + 2+i]$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2-i & 2-3i & 1+2i & 7 \\ -2-i & & -5 & 3+9i & 3-26i \\ \hline & 2-i & -3-3i & 4+11i & 10-26i \end{array}$$

El cociente no quedó alterado, el residuo sí:

$$Q_{(Z)} = (2-i)Z^2 - (3+3i)Z + 4+11i$$

$$\frac{R}{2-i} = 10-26i$$

Despejando R :

$$R = (2-i)(10-26i)$$

$$R = -6-62i$$

Ejercicio 3

Determinar $Q_{(x)}$ y R por el método de Ruffini:

- 1) $(4x^3 + 10x^2 - 3x + 1) \div (2x - 1)$
- 2) $(9x^4 + 6x^3 + x^2 - 3x + 1) \div (3x + 1)$
- 3) $(6x^3 - x^2 - x + 3) \div (3x - 2)$
- 4) $(x^3 - 2x^2 - x - 2) \div (2x - 5)$
- 5) $(5x^4 - 3x^3 - \frac{21}{5}x - 15) \div (5x + 2)$
- 6) $(2x^4 - ax^3 - 8x^2 + 2ax + 2a^2) \div (2x - a)$
- 7) $(3x^3 - 4ix^2 - x + 6) \div (3x - i)$
- 8) $(\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{3}x^2 + x - 7) \div (\frac{1}{3}x + 1)$
- 9) $(\frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - x) \div (\frac{1}{2}x - 1)$
- 10) $(\frac{1}{a}x^4 - bx^3 + \frac{2}{a}x^2 - 3bx + 3ab^2) \div (\frac{1}{a}x - b)$
- 11) $(4Z^3 + 2iZ^2 - iZ - \frac{3}{2} + 2i) \div (2Z - 1)$
- 12) $[2Z^3 + (6-3i)Z + 3-i] \div (2Z - 1 - 3i)$

- (13) $[(2+2i)Z^3 + (5-3i)Z^2 - (1-i)Z + 5+2i] + (2Z+1-2i)$
- 14) $(25x^{12} + 65x^9 + 5x^6 + 60x^3 + 40) + (5x^3 + 3)$
- 15) $(\frac{3}{2}x^{21} - 2x^{14} + \frac{5}{2}x^7 + \frac{1}{2}) + (3x^7 - 1)$
- 16) $[(7+i)Z^3 - (10-5i)Z^2 - (18-6i)Z + 15-10i] + [(2+i)Z - 5]$
- 17) $[(4-7i)Z^4 - (21-i)Z^3 - (26-13i)Z^2 - (53-5i)Z - 50+i] + [(3-2i)Z - 13]$

Teorema del Residuo (o del Resto)

El residuo R de la división de un polinomio $P_{(x)}$ por el binomio $x + a$ es igual al valor que toma el polinomio para $x = -a$, es decir, $P_{(-a)}$:

$$R = P_{(-a)}$$

En efecto, si llamamos $Q_{(x)}$ al cociente y R al residuo que se obtienen al dividir $P_{(x)}$ por $x + a$, tendremos, por la identidad fundamental de la división, que

$$P_{(x)} = (x + a) \cdot Q_{(x)} + R$$

Si en la identidad anterior hacemos $x = -a$ tendremos:

$$P_{(-a)} = (-a + a) \cdot Q_{(-a)} + R$$

El primer término de la derecha se elimina por ser $-a + a = 0$, por lo que resulta que

$$P_{(-a)} = R$$

Ejemplo 14

Determinar el residuo R de la división de $P_{(x)} \equiv x^3 - 5x^2 - 3x + 2$ por $x - 2$, sin efectuar la operación.

Por el Teorema del Residuo, para calcular R basta hallar $P_{(-2)}$:

$$R = P_{(-2)}$$

$$= (-2)^3 - 5(-2)^2 - 3(-2) + 2$$

$$= -8 - 20 + 6 + 2$$

$$= -20$$

Ejercicio 4

1) $P_{(x)} \equiv 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 7$

Determinar $P_{(1)}$, $P_{(-1)}$, $P_{(2)}$

2) $P_{(x)} \equiv 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

Determinar $P_{(1)}$, $P_{(4)}$, $P_{(\frac{1}{2})}$

$$3) P_{(x)} \equiv x^4 + x^2 - 2$$

$$\text{Determinar } P_{(\sqrt{2})}, P_{(-\sqrt{3})}, P_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$4) P_{(x)} \equiv x^3 + 2x^2 + 3x + 2$$

$$\text{Determinar } P_{(-3)}, P_{(1-i)}, P_{(i)}$$

$$5) P_{(x)} \equiv x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\text{Determinar } P_{(-1)}, P_{(1+2i)}, P_{(-\sqrt{2})}$$

Ejercicio 5

Determinar en cada caso el residuo sin efectuar la división:

$$1) (3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 7x + 3) \div (x - 1)$$

$$2) (2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 2x - 12) \div (x + 1)$$

$$3) (x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 8x^2 + 10x + 9) \div (x - 2)$$

$$4) (x^3 + 7x^2 + 15x + 11) \div (x + 3)$$

$$5) (Z^5 + 2Z^4 + Z^3 - 3Z^2 + 3) \div (Z + i)$$

$$6) (Z^4 + 3Z^3 + 4Z^2 + 10Z + 3) \div (Z - 2i)$$

Criterio de divisibilidad de un polinomio por $x + a$

Sabemos, por el teorema anteriormente demostrado, que el residuo de dividir $P_{(x)}$ por $x + a$ es $P_{(-a)}$

$$R = P_{(-a)}$$

Sabemos, por otra parte, que una cantidad es divisible por otra si, al efectuar la operación, no queda residuo.

Relacionando ambos conceptos, tenemos que un polinomio $P_{(x)}$ es divisible por $x + a$ si $P_{(-a)}$, el residuo, es igual a cero.

$$(x + a) \mid P_{(x)} \leftrightarrow P_{(-a)} = 0$$

Si $P_{(-a)} = 0$, decimos que $-a$ es una **raíz** o un **cero** de $P_{(x)}$, porque al sustituir la variable por $-a$ el polinomio se anula.

Recíprocamente, k es raíz de $P_{(x)}$ si $P_{(k)} = 0$.

Problemas sobre división de polinomios

Ejemplo 15

Determinar cuál debe ser el valor de m para que al dividir el polinomio $P_{(x)} \equiv 2x^3 + mx^2 + (3m - 1)x + 5m$ por $x + 1$ el residuo sea 8.

El residuo de la división será $P_{(-1)}$ y, según las condiciones del problema, éste debe ser igual a 8:

$$P_{(-1)} = 8$$

Por tanto:

$$2(-1)^3 + m(-1)^2 + (3m - 1)(-1) + 5m = 8$$

Resolviendo:

$$-2 + m - 3m + 1 + 5m = 8$$

De donde

$$m = 3$$

Ejemplo 16

Determinar m para que $P_{(x)} \equiv 5x^3 + (m-9)x^2 - 3x + m - 1$ sea divisible por $x - 2$.

Para que se cumplan las condiciones del problema, el residuo de la división debe ser cero:

$$P_{(2)} = 0$$

Por tanto

$$5(2)^3 + (m-9)(2)^2 - 3(2) + m - 1 = 0$$

Resolviendo:

$$40 + 4m - 36 - 6 + m - 1 = 0$$

$$5m - 3 = 0$$

$$m = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 17

Determinar cuál es el valor que debe tomar m para que el polinomio $P_{(x)} \equiv 2x^4 + (m+25)x^3 + (12m-11)x^2 - (14m-24)x + m + 2$ sea divisible por $x + 13$.

Según las condiciones del problema, el residuo debe ser nulo, es decir,

$$P_{(-13)} = 0$$

Pero calcular $P_{(-13)}$ origina la aparición de cantidades muy grandes. Este inconveniente se elimina si, en lugar de obtener el residuo calculando $P_{(-13)}$, lo hallamos efectuando la división completa.

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -13 & 2 & m+25 & 12m-11 & -14m+24 & m+2 \\ & & -26 & -13m+13 & 13m-26 & 13m+26 \\ \hline & 2 & m-1 & -m+2 & -m-2 & 14m+28 \end{array}$$

El residuo de la división es $14m + 28$, y éste debe ser igual a cero para que $P_{(x)}$ sea divisible por $x + 13$:

$$14m + 28 = 0$$

$$m = -2$$

Ejemplo 18

Determinar cuál debe ser el valor de m para que una de las raíces del polinomio $P_{(x)} \equiv x^4 - mx^2 + (m^2 + 7)x + 3m^2 + 1$ sea -2 .

Para que -2 sea raíz o cero de $P_{(x)}$ debe cumplirse que

$$P_{(-2)} = 0$$

Por tanto

$$(-2)^4 - m(-2)^2 + (m^2 + 7)(-2) + 3m^2 + 1 = 0$$

Resolviendo:

$$16 - 4m - 2m^2 - 14 + 3m^2 + 1 = 0$$

$$m^2 - 4m + 3 = 0$$

Factorizando:

$$(m - 3)(m - 1) = 0$$

De donde

$$\boxed{\begin{matrix} m_1 = 3 \\ m_2 = 1 \end{matrix}}$$

Ejercicio 6

Determinar en cada caso el valor que debe tomar m :

- ① para que $P_{(x)} \equiv x^3 + mx^2 + (m-3)x + 10$ sea divisible por $x - 2$.
- ② para que $P_{(x)} \equiv mx^3 - 7mx + 2$ admita la raíz -3 .
- 3) para que $P_{(x)} \equiv mx^3 + m^2x^2 + (3m^2 - m)x + 4m^2 - 2m - 24$ sea divisible por $x + 2$.
- 4) para que $P_{(x)} \equiv 2x^4 + mx^3 + (7-m)x^2 + m^2x - 7m + 1$ admita la raíz 1 .
- ⑤ para que $P_{(x)} \equiv 2x^3 + (3+2m)x^2 + (8-m)x - m^2$ sea divisible por $2x - 1$.
- 6) para que al dividir $P_{(x)} \equiv x^3 - mx^2 + (10m-15)x - 15m - 30$ entre $x - 5$ el residuo sea $R = -10$.
- 7) para que al dividir $P_{(x)} \equiv mx^3 + 2mx^2 + 3mx + 4m + 7$ entre $x + 3$ el residuo sea $R = 5$.
- 8) para que al dividir $P_{(x)} \equiv (m-3)x^3 + 3x^2 + mx + m + 2$ entre $x + 1$ el residuo sea 10 unidades mayor que si se divide entre $x + 2$.
- ⑨ para que al dividir $P_{(x)} \equiv 3x^4 + 2mx^3 + (m+7)x^2 + 3mx + m + 3$ entre $x - 1$ el residuo sea 26 unidades menor que si se divide entre $x - 2$.
- 10) para que la diferencia del residuo que se obtiene al dividir $P_{(x)} \equiv mx^3 - (2m-3)x^2 + (5m-1)x + 2m$ entre $x + 1$ y el residuo que se obtiene al dividirlo entre $x - 1$ sea igual a 6.
- ⑪ para que al dividir $P_{(x)} \equiv 3x^2 - 5x - 4$ entre $x - m$ el residuo sea $R = -2$.
- 12) para que $P_{(x)} \equiv 6x^2 + x - 1$ sea divisible por $x + m$.

Ejemplo 19

Determinar m y n para que $P_{(x)} \equiv x^3 + mx^2 + nx - 20$ sea divisible por $x - 5$ y por $x - 2$.

Si $P_{(x)}$ es divisible por $x - 5$, entonces $P_{(5)} = 0$

Por tanto $125 + 25m + 5n - 20 = 0$

$$25m + 5n = -105$$

Simplificando: $5m + n = -21$ (I)

Si $P_{(x)}$ es, además, divisible por $x - 2$, entonces $P_{(2)} = 0$

$$8 + 4m + 2n - 20 = 0$$

$$4m + 2n = 12$$

Simplificando: $2m + n = 6$ (II)

Formamos un sistema con las ecuaciones I y II:

$$\begin{cases} 5m + n = -21 \\ 2m + n = 6 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} m = -9 \\ n = 24 \end{cases}$$

Ejemplo 20

Determinar m y n para que $P_{(x)} \equiv 6x^3 + mx^2 + nx - 3$ sea divisible por

$$2x^2 - x - 3$$

Si una cantidad cualquiera es divisible por un producto, es divisible también por cada uno de los factores que componen dicho producto.

Como en nuestro caso $2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1)$

$P_{(x)}$ debe ser divisible por cada uno de los factores $(2x - 3)$ y $(x + 1)$ para que sea divisible por $2x^2 - x - 3$. Y las raíces de esos binomios deben ser también raíces de $P_{(x)}$. Por tanto.

$$\begin{cases} P_{\left(\frac{3}{2}\right)} = 0 \\ P_{(-1)} = 0 \end{cases}$$

Desarrollando la primera igualdad:

$$6 \cdot \frac{27}{8} + \frac{9}{4}m + \frac{3}{2}n - 3 = 0$$

Multiplicando la ecuación por 4:

$$81 + 9m + 6n - 3 = 0$$

$$9m + 6n = -69$$

Simplificando:

$$3m + 2n = -23 \quad (I)$$

Desarrollando la segunda igualdad:

$$-6 + m - n - 3 = 0$$

$$m - n = 9 \quad (II)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones I y II:

$$\begin{cases} 3m + 2n = -23 \\ m - n = 9 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} m = -1 \\ n = -10 \end{cases}$$

Ejemplo 21

Hallar m y n para que $P_{(x)} \equiv 2x^3 + mx^2 + nx - 27$ sea divisible por $x^2 + 9$

$x^2 + 9$ no tiene raíces reales. Sus raíces son imaginarias: $\pm 3i$

Estas deben ser también raíces de $P_{(x)}$ y, por tanto:

$$\begin{cases} P_{(3i)} = 0 \\ P_{(-3i)} = 0 \end{cases}$$

Desarrollamos la primera igualdad:

$$2(3i)^3 + m(3i)^2 + n(3i) - 27 = 0$$

Efectuando las potencias:

$$54i^3 + 9mi^2 + 3ni - 27 = 0$$

Simplificando:

$$18i^3 + 3mi^2 + ni - 9 = 0$$

Reduciendo las potencias de i :

$$-18i - 3m + ni - 9 = 0$$

Agrupando la parte real y la imaginaria:

$$-3m - 9 + (n - 18)i = 0$$

Iguálndo las partes reales:

$$-3m - 9 = 0$$

de donde

$$m = -3$$

Iguálndo las imaginarias:

$$n - 18 = 0$$

de donde

$$n = 18$$

Nota: El problema del ejercicio anterior quedó resuelto desarrollando tan sólo la ecuación $P_{(3i)} = 0$. Desarrollando la segunda, $P_{(-3i)} = 0$, hubiéramos obtenido exactamente el mismo resultado.

Ejemplo 23

Determinar si es divisible por $x - 2$ un polinomio de tercer grado cuyo término independiente es -2 , es divisible por $x^2 + 1$ y al ser dividido por $x + 3$ arroja un residuo de -50 .

Para poder determinar si el polinomio es divisible por $x - 2$ debemos primero conocerlo.

Sabemos que es de tercer grado y que su término independiente es -2 . Tendrá, por tanto, esta forma:

$$P_{(x)} \equiv Ax^3 + Bx^2 + Cx - 2$$

Si es divisible por $x^2 + 1$, debe cumplirse que

$$P_{(i)} = 0$$

Desarrollando la igualdad:

$$Ai^3 + Bi^2 + Ci - 2 = 0$$

Reduciendo las potencias de i :

$$-Ai - B + Ci - 2 = 0$$

Agrupando parte real y parte imaginaria:

$$-B - 2 + (-A + C)i = 0$$

Igualando a cero ambas partes:

$$-B - 2 = 0$$

de donde

$$\boxed{B = -2}$$

y

$$-A + C = 0 \quad (I)$$

Si al dividir $P_{(x)}$ entre $x + 3$ se obtiene un residuo de -50 , tenemos que:

$$P_{(-3)} = -50$$

Desarrollando:

$$-27A + 9B - 3C - 2 = -50$$

Sustituyendo el valor conocido de B :

$$-27A - 18 - 3C - 2 = -50$$

$$-27A - 3C = -30$$

Simplificando:

$$-9A - C = -10 \quad (II)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones I y II:

$$\begin{cases} -A + C = 0 \\ -9A - C = -10 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$\begin{cases} A = 1 \\ C = 1 \end{cases}$$

El polinomio será, entonces:

$$P_{(x)} = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Verificamos ahora si es divisible por $x - 2$, para lo cual calculamos $P_{(2)}$:

$$P_{(2)} = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2$$

$$P_{(2)} = 0$$

Por tanto

$$P_{(x)} \text{ es divisible por } x - 2$$

Ejercicio 7

- 1) Determinar m y n para que $P_{(x)} \equiv 3x^3 + mx^2 + nx - 6$ sea divisible por $x + 1$ y por $x - 3$.
- 2) Determinar p y q para que $P_{(x)} \equiv 3x^3 + px^2 + qx - 2$ sea divisible por $x + 2$ y por $x - 1$.
- 3) Determinar A y B para que $P_{(x)} \equiv x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 3x + 7$ sea divisible por $x^2 - 1$.
- 4) Determinar m y n para que $P_{(x)} \equiv x^3 + mx^2 + nx - 15$ sea divisible por $x^2 + 2x - 3$.
- 5) Determinar m , n y p para que $P_{(x)} \equiv x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 6$ sea divisible por $x + 1$, por $x - 2$ y por $x + 3$.
- 6) Determinar m , n y p para que $P_{(x)} \equiv x^4 + mx^3 + nx^2 + px + 12$ sea divisible por $x - 1$ y por $x^2 - 4$.
- 7) Determinar p para que $P_{(x)} \equiv x^{n+1} + px^n + 3x^{n-1} + 7$ sea divisible por $x - 1$.
- 8) Determinar p y q para que $P_{(x)} \equiv px^{2n} + 3x^{n+1} + qx^n - 7$ sea divisible por $x^2 - 1$ ($n =$ entero impar).
- 9) Determinar p y q para que al dividir $P_{(x)} \equiv x^3 + px^2 + qx - 2$ entre $x - 2$ y $x + 3$ los residuos sean, respectivamente, 20 y 25.
- 10) Determinar m y n para que al dividir $P_{(x)} \equiv 2x^3 + mx^2 + nx - 11$ entre $x + 1$ y $x + 2$ los residuos sean, respectivamente, -8 y -3 .

- 11) Determinar m , n y p para que $P_{(x)} \equiv x^3 + mx^2 + nx + p$ sea divisible por $x - 1$, y al dividirlo entre $x - 2$ y $x + 3$ los residuos sean, respectivamente, 11 y 16.
- 12) Determinar A , B y C para que $P_{(x)} \equiv x^3 + Ax^2 + Bx + C$ sea divisible por $-x^2 - 3x + 2$ y al dividirlo entre $x - 3$ el residuo sea 16.
- 13) Construir un polinomio de tercer grado cuyo primer coeficiente sea 1, sea divisible por $x - 2$ y $x - 3$, y al dividirlo entre $x - 5$ el residuo de la división sea 36.
- 14) Construir el polinomio de tercer grado cuyo término independiente es 2, es divisible por $x + 2$ y al dividirlo entre $x + 1$ y $x + 3$ los residuos son, respectivamente, 6 y -28.
- 15) Determinar el residuo que se obtiene al dividir un polinomio de tercer grado por $2x + 1$ sabiendo que dicho polinomio es divisible por $x^2 - 4$, al dividirlo entre $x - 1$ el residuo es -6 y sabiendo que el término independiente del polinomio es -4.
- 16) Determinar m y n para que $P_{(x)} \equiv x^3 + mx^2 + nx - 3$ sea divisible por $x^2 + 1$.
- 17) Determinar A , B y C para que $P_{(x)} \equiv Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 - 5x + 6$ sea divisible por $x^2 + 1$ y al dividirlo entre $x - 1$ el residuo de la división sea 4.
- 18) Determinar A , B , C y D para que $P_{(x)} \equiv x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx - 16$ sea divisible por $x^4 - 16$.

Método de Horner

(para expresar un polinomio en x en términos de $x + a$)

Si, dado $P_{(x)}$, queremos encontrar un polinomio $P_{(x+a)}$ equivalente al anterior, podemos conseguir nuestro objetivo a través de una serie de divisiones y aplicando la identidad fundamental de la división $P_{(x)} \equiv (x + a)Q_{(x)} + R$ tal como se ilustra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 23

Dado $P_{(x)} \equiv 2x^4 - 13x^3 + 25x^2 - 15x + 6$, determinar $P_{(x-2)}$.

Dividamos $P_{(x)}$ por $x - 2$ utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -13 & 25 & -15 & 6 \\
 2 & & 4 & -18 & 14 & -2 \\
 \hline
 & 2 & -9 & 7 & -1 & 4
 \end{array}$$

Aplicando la identidad de la división, tenemos:

$$P_{(x)} = (x - 2)(\underbrace{2x^3 - 9x^2 - 7x - 1}_{M_{(x)}}) + 4 \quad (I)$$

Dividamos $M_{(x)}$ por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & -9 & 7 & -1 \\ & & 4 & -10 & -6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & -7 \end{array}$$

Aplicando la identidad de la división:

$$M_{(x)} = (x - 2)(2x^2 - 5x - 3) - 7$$

Sustituyendo en (I):

$$P_{(x)} = (x - 2)[(x - 2)(2x^2 - 5x - 3) - 7] + 4$$

Multiplicando:

$$P_{(x)} = (x - 2)(\underbrace{2x^2 - 5x - 3}_{N_{(x)}}) - 7(x - 2) + 4 \quad (II)$$

Dividamos $N_{(x)}$ por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 2 & -5 & -3 \\ & & 4 & -2 \\ \hline & 2 & -1 & -5 \end{array}$$

Aplicando la identidad de la división:

$$N_{(x)} = (x - 2)(2x - 1) - 5$$

Sustituyendo en (II):

$$P_{(x)} = (x - 2)^2[(x - 2)(2x - 1) - 5] - 7(x - 2) + 4$$

Multiplicando:

$$P_{(x)} = (x - 2)^3(\underbrace{2x - 1}_{T_{(x)}}) - 5(x - 2)^2 - 7(x - 2) + 4 \quad (III)$$

Dividamos $T_{(x)}$ por $x - 2$:

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 2 & -1 \\ & & 4 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

Aplicando la identidad de la división:

$$T_{(x)} = (x - 2) \cdot 2 + 3$$

Sustituyendo en (III):

$$P_{(x)} = (x - 2)^3[(x - 2) \cdot 2 + 3] - 5(x - 2)^2 - 7(x - 2) + 4$$

Multiplicando:

$$\boxed{P_{(x-2)} = 2(x - 2)^4 + 3(x - 2)^3 - 5(x - 2)^2 - 7(x - 2) + 4} \quad (IV)$$

El Método de Horner es una disposición que nos permite realizar este proceso de forma mucho más sencilla mediante divisiones reiteradas, tal como mostraremos a continuación:

Tomemos $P_{(q)}$ del ejemplo anterior y dividamos reiteradamente por $x - 2$:

	2	-13	25	-15	6
2		4	-18	14	-2
2	2	-9	7	-1	4
2		4	-10	-6	
2	2	-5	-3	-7	
2		4	-2		
2	2	-1	-5		
2		4			
2	2	3			

Escribamos la expresión IV obtenida anteriormente:

$$P_{(x-2)} = 2(x-2)^4 + 3(x-2)^3 - 5(x-2)^2 - 7(x-2) + 4$$

Podemos observar que los residuos obtenidos cada vez que realizamos una división son los coeficientes, en orden creciente, de las potencias de $x - 2$.

Ejemplo 24

Expresar $P_{(x)} \equiv 3x^4 + 8x^3 - x^2 - 9x - 14$ en términos de $x + 1$.

Utilizando Horner:

	3	8	-1	-9	-14
-1		-3	-5	6	3
-1	3	5	-6	-3	-11
-1		-3	-2	8	
-1	3	2	-8	5	
-1		-3	1		
-1	3	-1	-7		
-1		-3			
-1	3	-4			

Tendremos, entonces, que:

$$P_{(x-1)} = 3(x+1)^4 - 4(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 5(x+1) - 11$$

Ejemplo 25

$P_{(x)} \equiv x^3 + (3-3i)x^2 + (6-6i)x - 6-8i$; calcular $P_{(x+2-i)}$

Utilizando Horner:

	1	3-3i	6-6i	-6-8i
-2+i		-2+i	5i	-11-8i
-2+i	1	1-2i	6-i	-17
-2+i		-2+i	3+i	
-2+i	1	-1-i	9	
-2+i		-2+i		
-2+i	1	-3		

$$P_{(x+2-i)} = (x+2-i)^3 - 3(x+2-i)^2 + 9(x+2-i) - 17$$

Ejemplo 26

$$P_{(x)} \equiv 16x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x + 5; \text{ determinar } P_{(2x-1)}$$

Utilizando Horner, vamos a determinar primero

$$P_{\left(x-\frac{1}{2}\right)}:$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 16 & -8 & 16 & -8 & 5 \\ 1/2 & & 8 & 0 & 8 & 0 \\ \hline & 16 & 0 & 16 & 0 & 15 \\ 1/2 & & 8 & 4 & 20 & \\ \hline & 16 & 8 & 20 & 20 & \\ 1/2 & & 8 & 8 & & \\ \hline & 16 & 16 & 28 & & \\ 1/2 & & 8 & & & \\ \hline & 16 & 24 & & & \end{array}$$

Tenemos que:

$$P_{\left(x-\frac{1}{2}\right)} = 16\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 + 24\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 + 28\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 20\left(x-\frac{1}{2}\right) + 5$$

Para obtener $P_{(2x-1)}$ haremos las siguientes transformaciones:

$$16\left(x-\frac{1}{2}\right)^4 = 16\left(\frac{2x-1}{2}\right)^4 = 16\frac{(2x-1)^4}{2^4} = (2x-1)^4$$

$$24\left(x-\frac{1}{2}\right)^3 = 24\left(\frac{2x-1}{2}\right)^3 = 24\frac{(2x-1)^3}{2^3} = 3(2x-1)^3$$

$$28\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = 28\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 = 28\frac{(2x-1)^2}{2^2} = 7(2x-1)^2$$

$$20\left(x-\frac{1}{2}\right) = 20\left(\frac{2x-1}{2}\right) = 10(2x-1)$$

En definitiva:

$$P_{(2x-1)} = (2x-1)^4 + 3(2x-1)^3 + 7(2x-1)^2 + 10(2x-1) + 5$$

Ejemplo 27

$$P_{(x)} \equiv 9x^3 - 15x^2 + x + 14; \text{ determinar } P_{(3x+2)}$$

Utilizando Horner, vamos a determinar primero

$$P_{\left(x+\frac{2}{3}\right)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 9 & -15 & 1 & 14 \\ -2/3 & & -6 & 14 & -10 \\ \hline & 9 & -21 & 15 & 4 \\ -2/3 & & -6 & 18 & \\ \hline & 9 & -27 & 33 & \\ -2/3 & & -6 & & \\ \hline & 9 & -33 & & \end{array}$$

Tenemos que:

$$P_{\left(x+\frac{2}{3}\right)} = 9\left(x+\frac{2}{3}\right)^3 - 33\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 + 33\left(x+\frac{2}{3}\right) + 4$$

Para obtener $P_{(3x+2)}$ haremos las siguientes transformaciones:

$$9\left(x+\frac{2}{3}\right)^3 = 9\left(\frac{3x+2}{3}\right)^3 = 9\frac{(3x+2)^3}{3^3} = \frac{1}{3}(3x+2)^3$$

$$33\left(x+\frac{2}{3}\right)^2 = 33\left(\frac{3x+2}{3}\right)^2 = 33\frac{(3x+2)^2}{3^2} = \frac{11}{3}(3x+2)^2$$

$$33\left(x+\frac{2}{3}\right) = 33\left(\frac{3x+2}{3}\right) = 11(3x+2)$$

En definitiva:

$$P_{(3x+2)} = \frac{1}{3}(3x+2)^3 - \frac{11}{3}(3x+2)^2 + 11(3x+2) + 4$$

Ejercicio 8

1) $P_{(x)} \equiv 3x^3 + 10x^2 + 4x + 5$

Determinar $P_{(x+3)}$

2) $P_{(x)} \equiv x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x + 3$

Determinar $P_{(x-2)}$

3) $P_{(x)} \equiv 2x^4 + 4x^3 - 3x^2 + x + 10$

Determinar $P_{(x+2)}$

4) $P_{(x)} \equiv x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Determinar $P_{(x-1)}$

5) $P_{(x)} \equiv 2x^4 + \sqrt{2}x^3 - 5x^2 - \sqrt{2}x + 1$

Determinar $P_{(x-\sqrt{2})}$

6) $P_{(x)} \equiv x^3 + (2-3a)x^2 + (3a^2-4a+3)x - a^3 + 2a^2 - 3a + 1$

Determinar $P_{(x-a)}$

7) $P_{(x)} \equiv x^3 - (3m-1)x^2 + (3m^2-2m+1)x - m^3 + m^2 - 2$

Determinar $P_{(x-m)}$

8) $P_{(x)} \equiv x^4 + (2+4i)x^3 - (6-6i)x^2 - (8+4i)x + 1 - i$

Determinar $P_{(x+i)}$

9) $P_{(x)} \equiv x^3 - (2+3i)x^2 + (3+4i)x - 2 - 5i$

Determinar $P_{(x-1-i)}$

$$10) P_{(x^5)} \equiv x^{20} - 5x^{15} + 7x^{10} - 7x^5 + 4$$

Determinar $P_{(x^5-2)}$

$$11) P_{(x^3)} \equiv x^9 - 4x^6 + 5x^3 - 7$$

Determinar $P_{(x^3-3)}$

$$12) P_{(x)} \equiv 8x^3 + 4x^2 - 3$$

Determinar $P_{(2x+1)}$

$$13) P_{(x)} \equiv 8x^3 - 24x^2 + 28x - 11$$

Determinar $P_{(2x-3)}$

$$14) P_{(x)} \equiv 27x^3 - 27x^2 + 15x + 2$$

Determinar $P_{(3x-1)}$

$$15) P_{(x)} \equiv 8x^3 - 48x^2 + 90x - 3$$

Determinar $P_{(2x-5)}$

$$16) P_{(x)} \equiv 4x^3 - 22x^2 + 4x + 7$$

Determinar $P_{(2x-1)}$

$$17) P_{(x)} \equiv 9x^4 + 24x^3 - 2x^2 + 15x + 7$$

Determinar $P_{(3x+1)}$

$$18) P_{(x)} \equiv 8x^4 - 32x^3 - 42x^2 + 98x + 330$$

Determinar $P_{(2x-7)}$

Variante

Hallar $P_{(x+a)}$ equivalente a $P_{(x)}$ y que carezca de un cierto término.

La tarea consiste en determinar cuál debe ser el valor de a para que $P_{(x+a)}$ carezca del término indicado.

Utilizaremos un ejemplo concreto para explicarlo:

Ejemplo 28

Dado $P_{(x)} \equiv x^3 - 9x^2 + 24x - 17$ determinar $P_{(x+a)}$ tal que $P_{(x+a)}$ carezca del término de segundo grado.

Hacemos el siguiente Cambio de Variable:

$$x + a = y$$

y, por tanto,

$$x = y - a$$

Calculamos $P_{(y-a)}$:

$$P_{(y-a)} = (y-a)^3 - 9(y-a)^2 + 24(y-a) - 17$$

Desarrollando:

$$= y^3 - 3ay^2 + 3a^2y - a^3 - 9y^2 + 18ay - 9a^2 + 24y - 24a - 17$$

Reduciendo términos y sacando factor común:

$$= y^3 - (3a+9)y^2 + (3a^2+18a+24)y - a^3 - 9a^2 - 24a - 17 \quad (1)$$

Para que este nuevo polinomio no tenga el término de segundo grado, debe cumplirse que

$$3a + 9 = 0$$

de donde

$$a = -3$$

Si a toma el valor -3 , el polinomio resultante $P_{(x-3)}$ no tendrá el término cuadrático.

Para calcular $P_{(x-3)}$ tenemos dos opciones: la primera, hacer en la ecuación (1) las siguientes sustituciones:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

la segunda, calcular $P_{(x-3)}$ a partir de $P_{(x)}$ utilizando el Método de Horner.

Seguiremos este segundo camino:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -9 & 24 & -17 \\ 3 & & 3 & -18 & 18 \\ \hline & 1 & -6 & 6 & 1 \\ 3 & & 3 & -9 & \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

En conclusión:

$$P_{(x-3)} = (x-3)^3 - 3(x-3) + 1$$

Ejemplo 29

Dado $P_{(x)} \equiv 2x^3 + 7x^2 + 4x + 2$ determinar $P_{(x+a)}$ tal que $P_{(x+a)}$ carezca del término de primer grado.

Hacemos el siguiente Cambio de Variable:

$$x + a = y$$

y, por tanto,

$$x = y - a$$

Calculamos $P_{(y-a)}$:

$$P_{(y-a)} = 2(y-a)^3 + 7(y-a)^2 + 4(y-a) + 2$$

Desarrollando:

$$= 2y^3 - 6ay^2 + 6a^2y - 2a^3 + 7y^2 - 14ay + 7a^2 + 4y - 4a + 2$$

Reduciendo términos y sacando factor común:

$$= 2y^3 - (6a - 7)y^2 + (6a^2 - 14a + 4)y - 2a^3 + 7a^2 - 4a + 2$$

Para que este nuevo polinomio no tenga el término de primer grado debe cumplirse que

$$6a^2 - 14a + 4 = 0$$

Simplificando;

$$3a^2 - 7a + 2 = 0$$

Ecuación cuyas soluciones son:

$$a = 2$$

$$a = \frac{1}{3}$$

El problema tiene dos soluciones, pues tanto

$P_{(x+2)}$ como $P_{\left(x+\frac{1}{3}\right)}$

satisfacen la condición.

Primera solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 4 & 2 \\ -2 & & -4 & -6 & -4 \\ \hline & 2 & 3 & -2 & 6 \\ -2 & & -4 & 2 & \\ \hline & 2 & -1 & 0 & \\ -2 & & -4 & & \\ \hline & 2 & -5 & & \end{array}$$

$$P_{(x+2)} = 2(x+2)^3 - 5(x+2)^2 + 6$$

Segunda solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & 4 & 2 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & -\frac{10}{9} & -\frac{17}{27} \\ \hline & 2 & \frac{10}{3} & \frac{17}{9} & \frac{34}{27} \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & -\frac{17}{9} & \\ \hline & 2 & \frac{17}{3} & 0 & \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & & \\ \hline & 2 & -5 & & \end{array}$$

$$P_{\left(x+\frac{1}{3}\right)} = 2\left(x+\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(x+\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{34}{27}$$

Ejercicio 9

Determinar en cada ejercicio $P_{(x+a)}$ tal que $P_{(x+a)}$ carezca del término que se indica entre paréntesis.

- 1) $P_{(x)} \equiv x^3 - 6x^2 + 5x + 1$ (Término de segundo grado)
- 2) $P_{(x)} \equiv 3x^3 + 9x^2 + 5x + 1$ (Término de segundo grado)
- 3) $P_{(x)} \equiv 2x^3 - 30x^2 + 120x - 25$ (Término de segundo grado)
- 4) $P_{(x)} \equiv 4x^3 - 12x^2 + 13x - 7$ (Término de segundo grado)

- 5) $P_{(x)} \equiv x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ (Término de segundo grado)
- 6) $P_{(x)} \equiv x^3 - 3x + 2$ (Término de primer grado)
- 7) $P_{(x)} \equiv x^3 + x^2 - 5x + 2$ (Término de primer grado)
- 8) $P_{(x)} \equiv 2x^3 + x^2 - 4x + 1$ (Término de primer grado)
- 9) $P_{(x)} \equiv x^3 - x^2 - 16x - 10$ (Término de primer grado)
- 10) $P_{(x)} \equiv x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x + 4$ (Término de segundo grado)

Factorización de un polinomio en x

Ya vimos que, si $P_{(x)}$ es divisible por $x + a$, entonces $P_{(-a)} = 0$ y $-a$ es raíz o cero de $P_{(x)}$.

Recíprocamente, si $P_{(k)} = 0$, podemos concluir que k es raíz de $P_{(x)}$ y que $P_{(x)}$ es divisible por $x - k$.

Supongamos que un polinomio

$$P_{(x)} \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

de grado n tiene n raíces distintas:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$$

1) Al ser α_1 raíz de $P_{(x)}$ podemos afirmar que $P_{(\alpha_1)} = 0$ y que $P_{(x)}$ es divisible por $x - \alpha_1$ y en consecuencia

$$P_{(x)} = (x - \alpha_1) \cdot Q_{1(x)} \quad (\text{I})$$

donde $Q_{1(x)}$ será un polinomio de grado $n - 1$ cuyo primer coeficiente será a_0 (por la regla de Ruffini).

2) Dado que α_2 también es raíz de $P_{(x)}$ debe cumplirse que $P_{(\alpha_2)} = 0$ y, por tanto,

$$P_{(\alpha_2)} = (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot Q_{1(\alpha_2)} = 0$$

Como $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$ por ser cantidades distintas, necesariamente $Q_{1(\alpha_2)} = 0$

y en ese caso $Q_{1(x)}$ es divisible por $x - \alpha_2$. En consecuencia

$$Q_{1(x)} = (x - \alpha_2) \cdot Q_{2(x)}$$

siendo $Q_{2(x)}$ un polinomio de grado $n - 2$ cuyo primer coeficiente es a_0 .

Sustituyendo en (I) tenemos:

$$P_{(x)} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot Q_{2(x)} \quad (\text{II})$$

3) Al ser α_3 raíz de $P_{(x)}$ se cumple que $P_{(\alpha_3)} = 0$

$$P_{(\alpha_3)} = (\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot Q_{2(\alpha_3)} = 0$$

Nuevamente, $\alpha_3 - \alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_3 - \alpha_2 \neq 0$, por lo que $Q_{2(\alpha_3)} = 0$ y $Q_{2(x)}$ es divisible por $x - \alpha_3$:

$$Q_{2(x)} = (x - \alpha_3) \cdot Q_{3(x)}$$

siendo $Q_{3(x)}$ un polinomio de grado $n - 3$ cuyo primer coeficiente es a_0 .

Sustituyendo en (II):

$$P_{(x)} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot Q_{3(x)}$$

4) Prosiguiendo en forma idéntica obtendremos la igualdad

$$P_{(x)} = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n) Q_{n(x)} \quad (\text{III})$$

siendo $Q_{n(x)}$ un polinomio de grado cero cuyo primer coeficiente es a_0 .

Si $Q_{n(x)}$ es un polinomio de grado cero, se tratará de un polinomio constante y, en tal caso

$$Q_{n(x)} = a_0$$

Sustituyendo en (III):

$$P_{(x)} = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n) \quad (\text{IV})$$

que es la identidad que nos permitirá factorizar un polinomio cuando conozcamos sus raíces o ceros.

Si sustituimos en (IV) un nuevo valor k , distinto de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$, raíces del polinomio, tenemos:

$$P_{(k)} = a_0(k - \alpha_1)(k - \alpha_2)(k - \alpha_3) \cdots (k - \alpha_n)$$

y, como ninguno de los factores del miembro de la derecha es igual a cero, tampoco lo será $P_{(k)}$, y en consecuencia k no puede ser un cero o raíz de $P_{(x)}$.

En conclusión

Un polinomio $P_{(x)}$ de grado n no puede tener más de n raíces o ceros.

Raíces múltiples

Es posible que un polinomio $P_{(x)}$ sea divisible no sólo por $x + a$, sino también por un grado más alto de $x + a$, por ejemplo, por $(x + a)^m$. En tal caso se dice que $-a$ es una raíz múltiple de $P_{(x)}$ o que $P_{(x)}$ tiene raíces múltiples o repetidas y m es el orden de multiplicidad de la raíz $-a$.

Por ejemplo, sea

$$P_{(x)} \equiv x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

al factorizar, aplicando un conocido producto notable, tenemos:

$$P_{(x)} = (x - 1)^3$$

Decimos entonces que 1 es raíz múltiple de $P_{(x)}$ y que el orden de multiplicidad de esa raíz es 3.

Raíces enteras de una ecuación

Sea la ecuación de segundo grado $(x - a)(x - b) = 0$ de raíces enteras $x_1 = a$ y $x_2 = b$. La ecuación desarrollada será $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ en la que el término independiente es el producto de las raíces de la ecuación.

De igual forma, al desarrollar la ecuación $(x - a)(x - b)(x - c) = 0$ de raíces enteras $x_1 = a$, $x_2 = b$ y $x_3 = c$ se obtiene la ecuación $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = 0$ en la que el término independiente es el producto de las raíces.

En general, en toda ecuación $(x - a)(x - b)(x - c) \cdots (x - n) = 0$ de raíces enteras $a, b, c, \dots, n$ el término independiente de la ecuación desarrollada es el producto de las raíces de la ecuación: Término Independiente = $a \cdot b \cdot c \cdots n$.

Esta propiedad de las ecuaciones desarrolladas nos será de gran utilidad al emplear el Método de Ruffini para calcular las raíces enteras de una ecuación.

Acotación de raíces

Un número a es **cota** o **límite superior** de las raíces reales de una ecuación si no hay otras raíces mayores que a .

Un número b es **cota** o **límite inferior** de las raíces reales de una ecuación si no hay otras raíces menores que b .

1) Si al realizar la división sintética en una ecuación con el número a todos los coeficientes del cociente resultante son positivos, entonces a es la cota o límite superior de las raíces reales de la ecuación.

2) Si al realizar la división sintética en una ecuación con el número b los coeficientes del cociente resultante son alternadamente positivos y negativos, entonces b es la cota o límite inferior de las raíces reales de la ecuación.

Método de Ruffini

para resolver ecuaciones de raíces enteras

El método es de tanteo y consiste en hacer divisiones sintéticas con distintas raíces hasta obtener residuos nulos. Por las propiedades anteriormente estudiadas, sabemos que tenemos que buscar esas raíces entre los divisores del término independiente, pues éste proviene de la multiplicación de las raíces.

Ejemplo 30

Resolver la ecuación $P_{(x)} \equiv x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18 = 0$

Buscamos los divisores del término independiente y construimos una tabla:

Tabla
de posibles raíces enteras
 $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6 \pm 9 \pm 18$

Disponemos los coeficientes de las respectivas potencias de x para realizar la división sintética y probamos con la primera de las posibles raíces:

	1	1	-11	-9	18
1		1	2	-9	-18
	1	2	-9	-18	0

Al probar con 1 se obtiene residuo nulo, por lo tanto dicho número es raíz de la ecuación:

$x_1 = 1$

Aplicando la identidad de la división, podemos escribir:

$$P_{(x)} \equiv (x-1) \underbrace{(x^3 + 2x^2 - 9x + 18)}_{M_{(x)}} = 0 \quad (\text{I})$$

Repetimos el proceso con $M_{(x)}$. La Tabla de posibles raíces enteras sigue siendo la misma, pues el término independiente sigue siendo 18.

Al volver a probar con 1 (puede ser raíz múltiple), y al probar con 2, los residuos que se obtienen son distintos de cero, por lo cual dichos números no son raíces de $M_{(x)}$ y los eliminamos de la Tabla de posibles raíces. Esta queda así:

Tabla de posibles raíces enteras						
-1	-2	±3	±6	±9	±18	

Al probar con 3 (la siguiente raíz positiva), obtenemos cero en el residuo:

3	1	2	-9	-18
		3	15	18
	1	5	6	0

Por tanto tenemos una nueva raíz:

$$x_2 = 3$$

y

$$M_{(x)} = (x-3)(x^2 + 5x + 6)$$

Sustituyendo en (I):

$$P_{(x)} \equiv (x-1)(x-3)\underbrace{(x^2 + 5x + 6)}_{N_{(x)}} = 0 \quad (\text{II})$$

Obsérvese que al realizar la división sintética con el número 3, los coeficientes del cociente obtenido resultaron todos positivos. En consecuencia, 3 es la **cota superior** de las raíces reales de la ecuación.

Por lo tanto, antes de continuar el proceso con $N_{(x)}$, eliminamos de la tabla de posibles raíces el 3 y los números superiores a 3. Eliminamos también los números -9 y -18, pues éstos no son ya divisores del término independiente.

La Tabla queda así:

Tabla de posibles raíces enteras				
-1	-2	-3	-6	

Continuamos el proceso para $N_{(x)}$ probando con -1.

Al dar residuo distinto de cero lo eliminamos de la Tabla y probamos con -2:

-2	1	5	6
		-2	-6
	1	3	0

Obtenemos residuo nulo, por lo cual:

$$x_3 = -2$$

y

$$N_{(x)} = (x+2)(x+3)$$

Sustituyendo en (II): $P_{(x)} \equiv (x-1)(x-3)(x+2)(x+3) = 0$

Y las raíces de la ecuación son:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -3 \end{array}$$

(La cuarta raíz la leímos directamente de la ecuación factorizada).

No es necesario realizar por etapas el proceso descrito en el ejemplo anterior, sino que puede ser hecho en forma continua (teniendo en cuenta todas las observaciones que se hicieron), con idéntico resultado:

	1	2	-11	-9	-18
1		1	2	-9	-18
	1	2	-9	-18	<u>10</u>
3		3	15	18	
	1	5	6	<u>10</u>	
-2		-2	-6		
	1	3	<u>10</u>		
-3		-3			
	1	<u>10</u>			

Raíces de la ecuación:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = -2 \\ x_4 = -3 \end{array}$$

Y, conociendo las raíces, podemos factorizar (de ser necesario) la ecuación utilizando la relación (IV) de la pág. 36:

$$P_{(x)} \equiv (x-1)(x-3)(x+2)(x+3) = 0$$

Para realizar la búsqueda de las raíces enteras de una ecuación con la menor pérdida de tiempo es conveniente prestar atención a las siguientes

Sugerencias

1) Cerciorarse de que la ecuación esté debidamente ordenada en potencias decrecientes, simplificar los coeficientes (si es posible) y sacar factor común si no existe el término independiente (con lo cual se obtiene ya la raíz $x_1 = 0$).

2) Construir la *Tabla de posibles raíces enteras* con los divisores del término independiente (positivos y negativos).

3) Realizar las divisiones sintéticas comenzando por lo números positivos (de menor a mayor) hasta alcanzar la cota superior de las raíces enteras.

4) Proseguir con las posibles raíces negativas (de mayor a menor) hasta alcanzar la cota inferior o hasta terminar el proceso, si la ecuación sólo tiene raíces enteras.

5) Cada vez que se obtiene residuo distinto de cero, eliminar de la Tabla el número con el que se probó la división.

6) Cada vez que se obtiene un residuo nulo, revisar la Tabla de posibles raíces para eliminar aquellas que ya no dividen el término independiente del polinomio restante o sean mayores que la cota superior, si ésta fue alcanzada.

7) Si la ecuación original tiene todos los términos positivos, la ecuación sólo puede tener raíces negativas. Si los términos de la ecuación original son alternadamente positivos y negativos (y ningún coeficiente es nulo), ésta sólo tiene raíces positivas.

8) Un número puede ser raíz múltiple de la ecuación. Por consiguiente no se debe eliminar un número de la Tabla hasta comprobar que, efectivamente, ya no es raíz del polinomio restante.

Ejemplo 31

Resolver la siguiente ecuación y factorizar el polinomio del primer miembro:

$$114x^3 - 26x^4 - 18x^5 + 172x^2 - 240x - 2x^6 = 0$$

(Damos en las notas que están después del ejercicio la explicación de los pasos seguidos y de los razonamientos hechos)

$$-2x^6 - 18x^5 - 26x^4 + 114x^3 + 172x^2 - 240x = 0 \quad (1)$$

$$2x^6 + 18x^5 + 26x^4 - 114x^3 - 172x^2 + 240x = 0 \quad (2)$$

$$x^6 + 9x^5 + 13x^4 - 57x^3 - 86x^2 + 120x = 0 \quad (3)$$

$$x(x^5 + 9x^4 + 13x^3 - 57x^2 - 86x + 120) = 0 \quad (4)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 9 & 13 & -57 & -86 & 120 \\ 1 & & & & & & \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 10 & 23 & -34 & -120 & \underline{10} \\ 2 & & & & & & \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 12 & 47 & 60 & \underline{10} & \\ -3 & & & & & & \end{array} \quad (7)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 9 & 20 & \underline{10} & & \\ -4 & & & & & & \end{array} \quad (8)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 5 & \underline{10} & & & \\ -5 & & & & & & \end{array} \quad (9)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & & & & & \\ 1 & & & & & & \end{array} \quad \underline{10}$$

- (1) Ordenamos la ecuación en potencias decrecientes.
- (2) Multiplicamos toda la ecuación por -1 para que el término de mayor grado sea positivo.
- (3) Dividimos todos los términos por 2 para simplificar la ecuación.
- (4) Como no existe término independiente, podemos sacar factor común x . Con esto obtenemos ya la primera raíz de la ecuación: $x_1 = 0$
- (5) Disponemos los coeficientes del polinomio del paréntesis para realizar las divisiones sintéticas. Elaboramos la Tabla de posibles raíces enteras con los divisores del término independiente:

Tabla de posibles raíces enteras							
± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 8	± 10
± 12	± 15	± 20	± 24	± 30	± 40	± 60	± 120

- (6) Comenzamos a probar con 1 y obtenemos el primer residuo nulo. Volvemos a probar con 1 (para eliminar la posibilidad de que dicha raíz esté repetida) sin obtener residuo nulo. Podemos, pues, eliminarlo de la Tabla:

Tabla de posibles raíces enteras							
-1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6	± 8	± 10
± 12	± 15	± 20	± 24	± 30	± 40	± 60	± 120

- (7) Probamos con 2, obteniendo residuo nulo. Esta raíz es la cota superior, dado que todos los coeficientes del polinomio restante son positivos. Eliminamos, por tanto, el 2 y todos los números mayores que 2. Eliminamos también aquellos que no dividen ya el último término. La Tabla queda así:

Tabla de posibles raíces enteras							
-1	-2	-3	-4	-5	-6		-10
-12	-15	-20		-30		-60	

- (8) Probamos ahora con -1 y -2 sin resultado (los eliminamos de la Tabla) y a continuación con -3 obteniendo una nueva raíz. Al eliminar los números que no dividen el último término del polinomio restante la Tabla de posibles raíces enteras queda así:

Tabla
de posibles raíces enteras

-4 -5 -10
-20

(9) Al probar con -4 obtenemos otra raíz y en la última etapa ya es evidente que la raíz que falta es -5.

Las raíces de la ecuación son, pues:

$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_3 = 2$
$x_4 = -3$
$x_5 = -4$
$x_6 = -5$

Y, utilizando la relación IV. de la pág. 36, factorizamos el polinomio:

$2x(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)(x+5) = 0$

Ejercicio 10

Resolver las siguientes ecuaciones y factorizar en cada caso el polinomio del primer miembro:

- 1) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
- 2) $2x^3 + 4 - 6x = 0$
- 3) $7x^3 + 7 - 7x - 7x^2 = 0$
- 4) $3x^4 + 33x^2 - 18x - 18x^3 = 0$
- 5) $6x - x^4 - 4x^3 - x^2 = 0$
- 6) $x^3 - 4x - 3x^2 + 12 = 0$
- 7) $5x^3 - 10x^2 - 20x + 40 = 0$
- 8) $x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 5x = 0$
- 9) $10x^3 - 40x^2 - 30x + 180 = 0$
- 10) $x^3 - 22x - x^2 + 40 = 0$
- 11) $34x^2 - 2x^4 - 120x + 8x^3 = 0$
- 12) $180 - 180x^2 - 20x + 20x^3 = 0$
- 13) $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 = 0$
- 14) $x^5 - 15x^3 + 10x^2 + 24x = 0$
- 15) $5x^3 - x^4 - 240 + 28x^2 - 92x = 0$
- 16) $5x^5 - 10x^4 - 60x^3 + 90x^2 + 135x = 0$

- (17) $x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 80x + 48 = 0$
- 18) $x^5 - 3x^4 - 28x^3 + 36x^2 + 144x = 0$
- 19) $x^4 + 6x^3 - 16x^2 - 150x - 225 = 0$
- 20) $x^5 - 11x^4 + 33x^3 + 11x^2 - 154x + 120 = 0$
- (21) $x^5 - 15x^3 + 5x^4 - 125x^2 - 226x - 120 = 0$
- 22) $2x^6 - 10x^5 - 22x^4 + 138x^3 + 36x^2 - 432x = 0$
- 23) $276x^2 + 25x^4 - x^6 - 144x - 160x^3 + 4x^5 = 0$
- 24) $17x^3 + 684x - 8x^4 + 276x^2 + 432 - x^5 = 0$
- 25) $3x^6 + 18x^5 + 27x^4 - 36x^3 - 144x^2 - 144x - 48 = 0$
- 26) $x^7 - 6x^6 + 4x^5 + 30x^4 - 41x^3 - 24x^2 + 36x = 0$
- 27) $x^6 - 3x^5 - 12x^4 + 24x^3 + 48x^2 - 48x - 64 = 0$
- 28) $x^6 - 20x^5 + 108x^4 - 142x^3 - 37x^2 + 162x - 72 = 0$
- 29) $x^7 + 5x^6 - 4x^5 - 50x^4 - 51x^3 + 45x^2 + 54x = 0$
- (30) $x^7 - 6x^6 - 20x^5 + 170x^4 - 161x^3 - 484x^2 + 900x - 400 = 0$
- 31) $x^8 - 4x^7 - 25x^6 + 92x^5 + 152x^4 - 544x^3 - 272x^2 + 960x = 0$

Raíces fraccionarias de una ecuación con coeficientes enteros

Sea la ecuación $(ax - m)(bx - n) = 0$ de raíces fraccionarias $x_1 = \frac{m}{a}$ y $x_2 = \frac{n}{b}$. La ecuación desarrollada toma la siguiente forma:

$$abx^2 - (an + bm)x + mn = 0$$

Podemos observar que el término independiente de la ecuación es el producto de los numeradores de las raíces fraccionarias y que el coeficiente del término de mayor grado, o primer coeficiente, es el producto de los denominadores.

Lo mismo sucede en la ecuación $(ax - m)(bx - n)(cx - p) = 0$ de raíces $x_1 = \frac{m}{a}$, $x_2 = \frac{n}{b}$ y $x_3 = \frac{p}{c}$. La ecuación desarrollada es

$$abcx^3 - (acn + bcm + abp)x^2 + (anp + bmp + cmn)x - mnp = 0.$$

Nuevamente el término independiente es el producto de los numeradores de las raíces y el primer coeficiente es el producto de los denominadores.

Generalizando para una ecuación de cualquier grado, podemos establecer las propiedades de las posibles raíces fraccionarias de la ecuación: éstas son de la forma $\frac{M}{N}$, donde

M es divisor del término independiente y

N es divisor del primer coeficiente.

Resolución de ecuaciones con raíces fraccionarias

Observaciones:

1) Es obvio que una ecuación de coeficientes enteros sólo puede tener raíces fraccionarias (racionales) si el coeficiente del primer término es distinto de 1.

2) Al resolver una ecuación es conveniente buscar primero las raíces enteras, si las tiene, y posteriormente las fraccionarias.

3) Para buscar las raíces fraccionarias, conviene probar con las fracciones positivas (desde las de menor denominador) y proseguir con las negativas (desde las de menor denominador también).

4) Al realizar la división sintética con una fracción M/N los coeficientes del cociente resultante serán siempre divisibles por N , como se comprobará en los ejemplos que resolveremos. Si simplificamos dichos coeficientes por N , trabajaremos con cantidades más pequeñas y se nos facilitará la tarea de eliminar de la Tabla de posibles raíces las fracciones que no lo sean.

Ejemplo 32

Resolver la siguiente ecuación y factorizar el primer miembro:

$$24x^5 - 128x^4 + 250x^3 - 220x^2 + 86x - 12 = 0$$

(Las notas al final del ejercicio explican los pasos seguidos y los razonamientos hechos)

$$12x^5 - 64x^4 + 125x^3 - 110x^2 + 43x - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 12 & -64 & 125 & -110 & 43 & -6 \\ 1 & & 12 & -52 & 73 & -37 & 6 \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 12 & -52 & 73 & -37 & 6 & \underline{10} \\ 2 & & 24 & -56 & 34 & -6 & \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 12 & -28 & 17 & -3 & \underline{10} & \\ 1/2 & & 6 & -11 & 3 & & \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & -22 & 6 & \underline{10} \\ 1/2 & & 6 & -11 & 3 \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -11 & 3 & \\ 3/2 & & 9 & -3 & \\ & 6 & -2 & \underline{10} & \end{array} \quad (6)$$

$$\begin{array}{r|rr} & 3 & -1 \\ 1/3 & & \underline{1} \\ & 3 & \underline{10} \end{array} \quad (7)$$

(1) Simplificamos la ecuación y verificamos si está ordenada en forma decreciente.

(2) Disponemos los coeficientes para realizar la división sintética. Elaboramos la Tabla de

posibles raíces enteras con los divisores del término independiente; dado que los coeficientes son alternadamente positivos y negativos, la ecuación sólo tiene raíces positivas.

*Tabla
de posibles raíces enteras*

1	2	3	6
---	---	---	---

(3) Probamos con 1 obteniendo residuo nulo.

(4) Volvemos a probar con 1 (podría ser raíz múltiple) sin resultado. Tachamos el 1 de la Tabla. Probamos con 2 y obtenemos residuo nulo. Revisamos la Tabla, de la que eliminamos los números que no dividen el último término del cociente resultante:

*Tabla
de posibles raíces enteras*

3

(5) Probamos con 3 y, al no obtener residuo nulo, concluimos que la ecuación no tiene más raíces enteras. Fabricamos la *Tabla de posibles raíces fraccionarias*. Son de la forma M/N :

M puede tomar los valores 1 y 3 (divisores del último término)

N puede tomar los valores 2, 3, 4, 6, y 12 (divisores del primero)

*Tabla
de posibles raíces fraccionarias*

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{12}$

Eliminamos de la Tabla los números $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{6}$ y $\frac{3}{12}$, pues, al ser simplificados, o no son fracciones o repiten algunas de las anteriores. Por otra parte, no colocamos valores negativos pues ya determinamos, al comenzar el ejercicio, que la ecuación sólo tiene raíces positivas.

*Tabla
de posibles raíces fraccionarias*

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{3}{2}$		$\frac{3}{4}$		

Probamos con $\frac{1}{2}$ obteniendo residuo nulo.

(6) Simplificamos por 2 los coeficientes del cociente resultante y eliminamos de la Tabla las fracciones cuyos denominadores no dividen ya al primer coeficiente:

Tabla
de posibles raíces fraccionarias

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{2} & & \end{array}$$

Volvemos a probar con $\frac{1}{2}$ sin resultado (lo eliminamos de la Tabla) y a continuación con $\frac{3}{2}$ obteniendo residuo nulo.

- (7) Simplificamos por 2 los coeficientes del cociente resultante y eliminamos las fracciones que ya no pueden ser raíces.

Tabla
de posibles raíces fraccionarias

$$\frac{1}{3}$$

Con $\frac{1}{3}$ obtenemos el último residuo nulo.

Las raíces de la ecuación son en definitiva:

$$\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{3}{2} \\ x_5 = \frac{1}{3} \end{array}$$

Para factorizar el primer miembro tenemos dos opciones:

- a) Utilizar la relación IV de la pág. 36:

$$12(x-1)(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Descomponemos el 12 así:

$$(x-1)(x-2) \cdot 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \cdot 2\left(x-\frac{3}{2}\right) \cdot 3\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Multiplicamos:

$$(x-1)(x-2)(2x-1)(2x-3)(3x-1) = 0$$

- b) Teniendo en cuenta que $\frac{b}{a}$ es la raíz que se obtiene del factor $ax - b$ si la ecuación tiene coeficientes enteros, escribimos un factor en esa forma por cada raíz fraccionaria sin necesidad de colocar entonces a_0 (en este caso 12) como primer factor:

$$(x-1)(x-2)(2x-1)(2x-3)(3x-1) = 0$$

Ejemplo 33

Resolver la ecuación $36x^4 + 24x^3 - 47x^2 + x + 6 = 0$, sabiendo que no tiene raíces enteras. Factorizar el primer miembro.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 36 & 24 & -47 & 1 & 6 \\ 1/2 & & 18 & 21 & -13 & -6 \\ \hline & 36 & 42 & -26 & -12 & \underline{0} \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 18 & 21 & -13 & -6 \\ 2/3 & & 12 & 22 & 6 \\ \hline & 18 & 33 & 9 & \underline{0} \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 6 & 11 & 3 \\ -3/2 & & -9 & -3 \\ \hline & 6 & 2 & \underline{0} \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{r|rr} & 3 & -1 \\ -1/3 & & 1 \\ \hline & 3 & \underline{0} \end{array} \quad (4)$$

Notas explicativas

- (1) Después de expresarle nuestro más profundo agradecimiento al autor del libro por habernos dado el dato de que la ecuación no tiene raíces enteras (lo cual nos ahorra el trabajo infructuoso de probar con los números ± 1 , ± 2 , ± 3 y ± 6), elaboramos la Tabla de posibles raíces fraccionarias:

Posibles numeradores: 1, 2, 3, 6 (divisores del último término)

Posibles denominadores: 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36 (divisores del primero)

Tabla de posibles raíces fraccionarias							
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{1}{6}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm \frac{1}{12}$	$\pm \frac{1}{18}$	$\pm \frac{1}{36}$
$\pm \frac{2}{2}$	$\pm \frac{2}{3}$	$\pm \frac{2}{4}$	$\pm \frac{2}{6}$	$\pm \frac{2}{9}$	$\pm \frac{2}{12}$	$\pm \frac{2}{18}$	$\pm \frac{2}{36}$
$\pm \frac{3}{2}$	$\pm \frac{3}{3}$	$\pm \frac{3}{4}$	$\pm \frac{3}{6}$	$\pm \frac{3}{9}$	$\pm \frac{3}{12}$	$\pm \frac{3}{18}$	$\pm \frac{3}{36}$
$\pm \frac{6}{2}$	$\pm \frac{6}{3}$	$\pm \frac{6}{4}$	$\pm \frac{6}{6}$	$\pm \frac{6}{9}$	$\pm \frac{6}{12}$	$\pm \frac{6}{18}$	$\pm \frac{6}{36}$

Eliminando los números que, al ser simplificados, resultan enteros o repiten fracciones anteriores, la Tabla queda así:

Tabla de posibles raíces fraccionarias							
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{1}{6}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm \frac{1}{12}$	$\pm \frac{1}{18}$	$\pm \frac{1}{36}$
	$\pm \frac{2}{3}$			$\pm \frac{2}{9}$			
$\pm \frac{3}{2}$		$\pm \frac{3}{4}$					

(2) Probamos la división con $\frac{1}{2}$ y obtenemos el primer residuo nulo.

(3) Simplificamos por 2 los coeficientes del cociente resultante y eliminamos de la Tabla las fracciones que ya no pueden ser raíces de la ecuación:

Tabla de posibles raíces fraccionarias				
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{6}$	$\pm \frac{1}{9}$	$\pm \frac{1}{18}$
	$\pm \frac{2}{3}$		$\pm \frac{2}{9}$	
$\pm \frac{3}{2}$				

(4) Al probar con $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{3}$, no obtenemos residuo nulo, por lo que los vamos tachando de la Tabla. (Casi nunca hay que llegar a terminar una división sintética para constatar que una determinada fracción no es raíz: si al multiplicar un coeficiente del cociente por ella el resultado no es entero, ya podemos descartarla).

Al probar con $\frac{2}{3}$ obtenemos residuo nulo.

(5) Simplificamos por 3 los coeficientes del cociente resultante y eliminamos de la Tabla las fracciones que ya no pueden ser raíces. Eliminamos también los signos positivos, pues el último cociente tiene coeficientes positivos.

Tabla de posibles raíces fraccionarias		
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$
	$-\frac{2}{3}$	
$-\frac{3}{2}$		

Probamos con $-\frac{1}{2}$ sin resultado y luego con $-\frac{3}{2}$, que sí es raíz.

(6) Simplificamos por 2 los coeficientes del cociente resultante y revisamos la Tabla.

Tabla de posibles raíces fraccionarias	
$-\frac{1}{3}$	

$-\frac{1}{3}$ es la última raíz.

Las raíces de la ecuación son, en definitiva:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \\ x_2 &= \frac{2}{3} \\ x_3 &= -\frac{3}{2} \\ x_4 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

y la ecuación, factorizada:

$$(2x-1)(3x-2)(2x+3)(3x+1)=0$$

Otro método

para resolver una ecuación con raíces fraccionarias consiste en hacer un Cambio de Variable para transformar la ecuación en una que sólo tenga raíces enteras, es decir, en una ecuación en la que el coeficiente del primer término sea 1.

En la ecuación que acabamos de resolver, esto se logra con el siguiente Cambio de Variable:

$$x = \frac{y}{6}$$

En efecto, la ecuación dada es

$$36x^4 + 24x^3 - 47x^2 + x + 6 = 0$$

Haciendo el Cambio de Variable:

$$36 \frac{y^4}{6^4} + 24 \frac{y^3}{6^3} - 47 \frac{y^2}{6^2} + \frac{y}{6} + 6 = 0$$

Simplificando:

$$\frac{y^4}{36} + \frac{y^3}{9} - 47 \frac{y^2}{36} + \frac{y}{6} + 6 = 0$$

Multiplicando la ecuación por 36:

$$y^4 + 4y^3 - 47y^2 + 6y + 216 = 0$$

Resolvemos, como ya sabemos, por Ruffini:

3	1	4	-47	6	216
		3	21	-78	-216
4	1	7	-26	-72	10
		4	44	72	
-2	1	11	18	10	
		-2	-18		
-9	1	9	10		
		-9			
	1	10			

Las raíces de la ecuación son:

$$y_1 = 3$$

$$y_2 = 4$$

$$y_3 = -2$$

$$y_4 = -9$$

Deshaciendo el Cambio de

$$x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$x_4 = -\frac{1}{3}$$

Ejercicio 11

Resolver las siguientes ecuaciones y factorizar en cada caso el polinomio del primer miembro:

- 1) $60x^2 - 5x + 20x^3 - 15 = 0$
- 2) $19x^3 + 6x^4 + 14x^2 - x - 2 = 0$
- 3) $18x^4 - 18x + 18x^3 - 14x^2 - 4 = 0$
- 4) $32x^2 - 8x^4 - 13x^3 - 12x + 4x^5 = 0$
- 5) $12x^4 - 32x^3 + 13x^2 + 8x - 4 = 0$
- 6) $30x^4 - 29x^3 - 7x^2 + 5x + 1 = 0$
- 7) $144x^5 + 36x^4 - 28x^3 - 3x^2 + x = 0$
- 8) $225 + 16x^4 - 136x^2 = 0$
- 9) $120x^5 + 154x^4 + 71x^3 + 14x^2 + x = 0$
- 10) $20x^4 + 62x^3 + 70x^2 + 34x + 6 = 0$
- 11) $140x^2 - 490x^4 - 10 + 360x^6 = 0$
- 12) $16x^6 - 112x^5 + 216x^4 - 8x^3 - 247x^2 + 105x = 0$
- 13) $30x^4 + 49x^3 - 106x^2 + 49x - 6 = 0$
- 14) $10x^5 + 21x^4 - 35x^3 - 15x^2 + 25x - 6 = 0$
- 15) $36x^5 + 12x^4 - 71x^3 - 48x^2 + 5x + 6 = 0$
- 16) $18x^5 - 33x^4 - 22x^3 + 33x^2 - 4 = 0$

Raíces complejas de una ecuación con coeficientes reales

Si un complejo $a + bi$ es raíz de la ecuación con coeficientes reales $P_{(x)} = 0$, entonces su conjugado $a - bi$ también es raíz de la ecuación.

En efecto, sea la ecuación $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$

Si $a + bi$ es raíz, entonces $P_{(a+bi)} = 0$

Al calcular $P_{(a+bi)}$,

sustituyendo la variable de la ecuación por $a + bi$, las potencias pares de bi producirán números reales, mientras que las potencias impares de bi producirán diversos múltiplos de la unidad imaginaria,

Si representamos por M la suma algebraica de las

partes reales que resultan de esta sustitución y por N la de las imaginarias, tendremos que

$$M + Ni = 0$$

y en consecuencia que

$$M = 0$$

$$N = 0$$

Si ahora hallamos $P_{(a-bi)}$, las potencias pares de $-bi$ serán iguales a las potencias pares de bi . Las potencias impares de $-bi$ tendrán signo opuesto a las de bi . Por tanto

$$P_{(a-bi)} = M - Ni$$

y, dado que M y N son iguales a cero, quedará que

$$P_{(a-bi)} = 0$$

y en consecuencia $a - bi$ también será raíz de la ecuación.

Raíces irracionales de una ecuación con coeficientes racionales

Si un número irracional $a + \sqrt{b}$ es raíz de la ecuación de coeficientes racionales $P_{(x)} = 0$, entonces su conjugado $a - \sqrt{b}$ también es raíz de la ecuación.

La demostración de esta afirmación es análoga a la que utilizamos en el punto anterior para las raíces complejas de una ecuación.

Resolución de ecuaciones con dos raíces complejas o dos raíces irracionales

Si una ecuación con coeficientes racionales tiene dos raíces complejas o dos raíces irracionales, éstas pueden ser halladas utilizando la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado al terminar de hallar las raíces enteras y fraccionarias, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 34

Resolver la ecuación $2x^4 - x^3 - 15x^2 + 23x + 15 = 0$

Buscamos, tal como hemos hecho hasta ahora las raíces enteras y fraccionarias:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 2 & -1 & -15 & 23 & 15 \\
 -3 & & -6 & 21 & -18 & -15 \\
 \hline
 & 2 & -7 & 6 & 5 & \underline{10} \\
 -1/2 & & -1 & 4 & -5 & \\
 \hline
 & 2 & -8 & 10 & \underline{10} &
 \end{array}$$

Después de agotar las posibilidades de raíces enteras y fraccionarias, queda la ecuación:

$$2x^2 - 8x + 10 = 0$$

Simplificando:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2i}{2}$$

$$x = 2 \pm i$$

Raíces de la ecuación:

$$\begin{array}{l}
 x_1 = -3 \\
 x_2 = -\frac{1}{2} \\
 x_{3,4} = 2 \pm i
 \end{array}$$

Ejemplo 35

Resolver la ecuación $x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 30x - 40 = 0$

Buscamos las raíces enteras:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 7 & 7 & -30 & -40 \\
 2 & & 2 & 18 & 50 & 40 \\
 \hline
 & 1 & 9 & 25 & 20 & \underline{10} \\
 -4 & & -4 & -20 & -20 & \\
 \hline
 & 1 & 5 & 5 & \underline{10} &
 \end{array}$$

La ecuación no tiene más raíces enteras. Fraccionarias tampoco por ser 1 el primer coeficiente. Queda, pues, para resolver la ecuación

$$x^2 + 5x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Raíces de la ecuación:

$$\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -4 \\ x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}$$

Ejercicio 12

Resolver las siguientes ecuaciones:

- 1) $17x + x^4 - 4x^3 - 14 = 0$
- 2) $x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 37x - 38 = 0$
- 3) $4x^4 + 22x^3 + 12x^2 - 8x - 2 = 0$
- 4) $9x^4 + 123x^2 - 60x^3 - 42x - 30 = 0$
- 5) $x^4 + 3x^3 - 26x^2 - 75x + 25 = 0$
- 6) $x^5 - 15x^3 + 16x^2 + 2x^4 - 4x = 0$
- 7) $18x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 12x + 12 = 0$
- 8) $24x^4 + 4x^2 - 4x^3 + 8 - 20x = 0$
- 9) $9x^5 + 4x^3 - 2x + 5x^2 - 6x^4 = 0$
- 10) $6x^6 + 5x^5 + 4x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 3x + 2 = 0$

Ecuaciones recíprocas

Llamaremos **Ecuación recíproca de primer tipo** a una ecuación de la forma

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$$

en la que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.

Llamaremos **Ecuación recíproca de segundo tipo** a una ecuación de la forma

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots - cx^2 - bx - a = 0$$

en la que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son opuestos.

Las ecuaciones recíprocas de cualquiera de los dos tipos pueden ser de **grado par** o de **grado impar**.

Las ecuaciones anteriormente descritas se llaman recíprocas porque gozan de la propiedad de poseer pares de raíces recíprocas: esto quiere decir que si α es raíz de la ecuación, también lo será $1/\alpha$.

En efecto, en las de primer tipo tenemos que

$$P_{(\alpha)} = a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2} + \dots + c\alpha^2 + b\alpha + a$$

Y, por otra parte,

$$P_{(\frac{1}{\alpha})} = \frac{a}{\alpha^n} + \frac{b}{\alpha^{n-1}} + \frac{c}{\alpha^{n-2}} + \dots + \frac{c}{\alpha^2} + \frac{b}{\alpha} + a$$

Sacando mínimo común denominador:

$$P_{(\frac{1}{\alpha})} = \frac{a + b\alpha + c\alpha^2 + \dots + c\alpha^{n-2} + b\alpha^{n-1} + a\alpha^n}{\alpha^n}$$

El numerador es igual al desarrollo de $P_{(\alpha)}$, por consiguiente:

$$P_{(\frac{1}{\alpha})} = \frac{P_{(\alpha)}}{\alpha^n}$$

Si $P_{(\alpha)}$ es cero, por ser α raíz de la ecuación, entonces también $P_{(\frac{1}{\alpha})}$ es cero y en consecuencia $1/\alpha$ también es raíz de la ecuación.

Se puede comprobar fácilmente a través de un razonamiento análogo que lo dicho es válido para las ecuaciones recíprocas de segundo tipo.

Resolución de ecuaciones recíprocas

Las ecuaciones recíprocas tienen características especiales según su tipo y grado. Las estudiaremos, por tanto, por separado.

A) Ecuaciones recíprocas de primer tipo de grado par

Para resolverlas utilizaremos el siguiente procedimiento (ejemplificado con una ecuación de sexto grado):

$$\text{Sea la ecuación } ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

1) Dividimos cada uno de los términos por $x^{n/2}$ (en este caso por x^3):

$$\frac{ax^6}{x^3} + \frac{bx^5}{x^3} + \frac{cx^4}{x^3} + \frac{dx^3}{x^3} + \frac{cx^2}{x^3} + \frac{bx}{x^3} + \frac{a}{x^3} = 0$$

Simplificando:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{c}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x^3} = 0$$

Agrupamos los pares de términos equidistantes de los extremos, sacando factor común en cada par:

$$\left(ax^3 + \frac{a}{x^3}\right) + \left(bx^2 + \frac{b}{x^2}\right) + \left(cx + \frac{c}{x}\right) + d = 0$$

$$a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0$$

Preparamos el siguiente
Cambio de Variable:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$$

Para calcular $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$
procederemos así:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$$

Y, por último, para calcular

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right):$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = y^3$$

$$x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3} = y^3$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = y^3$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = y^3 - 3y$$

Efectuando el Cambio de
Variable:

$$a(y^3 - 3y) + b(y^2 - 2) + cy + d = 0$$

4) Resolvemos la ecuación
en y obteniendo, en este
caso, tres raíces:

$$y = y_1$$

$$y = y_2$$

$$y = y_3$$

5) Deshacemos el Cambio
de Variable y resolvemos
cada una de las ecuaciones

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = y_1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = y_2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = y_3$$

Veámoslo con un ejemplo práctico:

Ejemplo 36

Resolver la ecuación $3x^6 - 8x^5 - 92x^4 + 54x^3 - 92x^2 - 8x + 3 = 0$

Es una ecuación del pri-
mer tipo y de grado par.

Procedemos, pues, a resolverla utilizando el procedimiento antes explicado.

1) Dividimos cada término por x^3 :

$$\frac{3x^6}{x^3} - \frac{8x^5}{x^3} - \frac{92x^4}{x^3} + \frac{54x^3}{x^3} - \frac{92x^2}{x^3} - \frac{8x}{x^3} + \frac{3}{x^3} = 0$$

Simplificando:

$$3x^3 - 8x^2 - 92x + 54 - \frac{92}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{3}{x^3} = 0$$

Agrupando los pares de términos equidistantes de los extremos y sacando factor común en cada par:

$$3\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - 8\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 92\left(x + \frac{1}{x}\right) + 54 = 0$$

Haciendo el Cambio de

Variable $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$

(y los derivados de él):

$$3(y^3 - 3y) - 8(y^2 - 2) - 92y + 54 = 0$$

Después de multiplicar y reducir términos semejantes queda:

$$3y^3 - 8y^2 - 101y + 70 = 0$$

Resolvemos la ecuación utilizando Ruffini:

3	-8	-101	70
7	21	91	-70
	3	13	-10
-5	-15	10	0
	3	-2	0
2/3	2		
	3	0	

Con los siguientes resultados:

$$y_1 = 7$$

$$y_2 = -5$$

$$y_3 = \frac{2}{3}$$

Deshaciendo el Cambio de Variable, tenemos:

a)

$$x + \frac{1}{x} = 7$$

$$x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

b)

$$x + \frac{1}{x} = -5$$

$$x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4}}{2}$$

$$x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

c)

$$x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$$

$$3x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 36}}{2 \cdot 3}$$

$$x_{5,6} = \frac{1}{3} \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}i$$

B) Ecuaciones recíprocas de primer tipo de grado impar

Tienen la particularidad de que admiten la raíz -1 y son divisibles, por tanto, por $x + 1$. Esto es fácilmente verificable hallando $P_{(-1)}$.

Para resolverlas aprovechamos esta particularidad y separamos primero la raíz -1 mediante una división sintética. El cociente resultante será recíproco del primer tipo de grado par y se resuelve con el método anteriormente descrito.

Ejemplo 37

$$\text{Resolver } 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x + 2 = 0$$

Como es una ecuación recíproca de primer tipo y de grado impar, admite la raíz -1 .

La separamos mediante una división sintética:

	2	-3	-4	-4	-3	-2
-1		-2	5	-1	5	-2
	2	-5	1	-5	2	0

Obtenemos así la primera raíz de la ecuación:

$$x_1 = -1$$

y nos queda el cociente

$$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$$

que, por ser de primer tipo y de grado par, puede ser resuelto por el método conocido.

Dividiendo cada término por x^2 y simplificando:

$$2x^2 - 5x + 1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} = 0$$

Agrupando los pares de términos equidistantes de los extremos y sacando factor común en cada par:

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

Efectuando el Cambio de Variable $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$

$$2(y^2 - 2) - 5y + 1 = 0$$

queda la ecuación:

$$2y^2 - 5y - 3 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$y_1 = 3 \quad y_2 = -\frac{1}{2}$$

Deshaciendo el Cambio de Variable, tenemos:

a)

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

b)

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$$

$$2x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{4}$$

$$x_{4,5} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{15}}{4}i$$

C) Ecuaciones recíprocas de segundo tipo de grado par

Las ecuaciones recíprocas de segundo tipo de grado par tienen dos particularidades:

1) Su término central debe ser nulo, porque el coeficiente de dicho término debe ser opuesto a sí mismo y esta condición no la satisface ningún número distinto de cero.

Por ejemplo, en la ecuación $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx - a = 0$, el primero y segundo coeficientes tienen su opuesto, respectivamente, en el último y penúltimo coeficientes. El término central debe tener su opuesto en sí mismo y esto sólo es posible si, como hemos dicho, c es igual a cero. En tal caso tendremos la ecuación $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$ que sí es recíproca de segundo tipo y de grado par.

2) Admiten las raíces 1 y -1, lo cual es fácilmente comprobable hallando $P_{(1)}$ y $P_{(-1)}$.

Resolución: separamos primero las raíces 1 y -1 mediante dos divisiones sintéticas y el cociente resultante (que será recíproco del primer tipo y de grado par) lo procesamos por el método conocido.

Ejemplo 38

$$\text{Resolver } 2x^8 + x^7 - 17x^6 + x^5 - x^3 + 17x^2 - x - 2 = 0$$

La ecuación es de segundo tipo y de grado par por lo cual admite las raíces 1 y -1.

Las separamos mediante divisiones sintéticas:

		2	1	-17	1	0	-1	17	-1	-2
1			2	3	-14	-13	-13	-14	3	2
		2	3	-14	-13	-13	-14	3	2	<u>0</u>
-1			-2	-1	15	-2	15	-1	-2	
		2	1	-15	2	-15	1	2	<u>0</u>	

Obtenemos así las dos primeras raíces:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Y la ecuación restante es del primer tipo y de grado par.

$$2x^6 + x^5 - 15x^4 + 2x^3 - 15x^2 + x + 2 = 0$$

Dividiendo cada término por x^3 :

$$2x^3 + x^2 - 15x + 2 - \frac{15}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 0$$

Agrupando pares y sacando factor común:

$$2\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 15\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Haciendo el Cambio de

Variable $\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$ $2(y^3 - 3y) + (y^2 - 2) - 15y + 2 = 0$

Multiplicando y reduciendo términos semejantes:

$$2y^3 + y^2 - 21y = 0$$

Sacando factor común:

$$y(2y^2 + y - 21) = 0$$

Factorizando la expresión del paréntesis:

$$y(2y + 7)(y - 3) = 0$$

de donde

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = -\frac{7}{2}$$

$$y_3 = 3$$

•Deshaciendo el Cambio de Variable:

a)

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x_{3,4} = \pm i$$

b)

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{7}{2}$$

$$2x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$x_{5,6} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$$

c)

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x_{7,8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

D) Ecuaciones recíprocas de segundo tipo de grado impar

Admiten la raíz 1.

Para resolverlas, separamos primero la raíz 1 mediante una división sintética y continuamos después como en los ejemplos anteriores.

del primer-tipo

$$P_{(x)} \equiv ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$$

si n es PAR

Dividir $P_{(x)}$ entre $x^{\frac{n}{2}}$; agrupar por pares los términos equidistantes de los extremos, sacar factor común y efectuar el siguiente Cambio de Variable:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = y$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = y^2 - 2$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = y^3 - 3y$$

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) = y^4 - 4y^2 + 2, \text{ etc.}$$

Resolver $P_{(y)}$ y deshacer el Cambio de Variable

si n es IMPAR

$P_{(x)}$ admite la raíz -1

del segundo tipo

$$P_{(x)} \equiv ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots - cx^2 - bx - a = 0$$

si n es PAR

(y el término central es nulo)

$P_{(x)}$ admite las raíces 1 y -1

si n es IMPAR

$P_{(x)}$ admite la raíz 1

Ejercicio 13

Resolver las siguientes ecuaciones:

- 1) $3x^4 + 4x^3 - 14x^2 + 4x + 3 = 0$
- 2) $6x^4 + 35x^3 + 62x^2 + 35x + 6 = 0$
- 3) $12x^4 - 11x^3 - 146x^2 - 11x + 12 = 0$
- 4) $2x^4 - 5x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$
- 5) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$
- 6) $2x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 7x + 2 = 0$
- 7) $72x^4 - 6x^3 - 181x^2 - 6x + 72 = 0$

- 8) $150x^4 - 95x^3 - 686x^2 - 95x + 150 = 0$
- 9) $6x^5 + 11x^4 - 33x^3 - 33x^2 + 11x + 6 = 0$
- 10) $6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0$
- 11) $6x^5 + 29x^4 + 27x^3 - 27x^2 - 29x - 6 = 0$
- 12) $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$
- 13) $2x^5 - 15x^4 + 37x^3 - 37x^2 + 15x - 2 = 0$
- 14) $12x^6 + 35x^5 - 112x^4 - 270x^3 - 112x^2 + 35x + 12 = 0$
- 15) $2x^6 - 5x^5 + 2x^4 - 2x^2 + 5x - 2 = 0$
- 16) $x^6 - 5x^5 + x^4 - x^2 + 5x - 1 = 0$
- 17) $3x^6 + 14x^5 + 11x^4 - 11x^2 - 14x - 3 = 0$
- 18) $x^6 - 11x^5 + 37x^4 - 46x^3 + 37x^2 - 11x + 1 = 0$
- 19) $2x^6 - 3x^5 - 2x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 3x + 2 = 0$
- 20) $6x^7 + 5x^6 - 15x^5 + 4x^4 + 4x^3 - 15x^2 + 5x + 6 = 0$
- 21) $6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^3 + 35x^2 - 6x = 0$
- 22) $2x^7 - 19x^6 + 39x^5 - 21x^4 + 21x^3 - 39x^2 + 19x - 2 = 0$
- 23) $6x^8 + 13x^7 - 53x^6 - 137x^5 + 137x^3 + 53x^2 - 13x - 6 = 0$
- 24) $6x^8 + 7x^7 + 24x^6 + 20x^5 + 36x^4 + 20x^3 + 24x^2 + 7x + 6 = 0$
- 25) $2x^8 + 7x^7 - 43x^6 + 14x^5 - 41x^4 + 14x^3 - 43x^2 + 7x + 2 = 0$
- 26) $a^2b^2x^5 + a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^3 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2x + a^2b^2 = 0$
- 27) $ax^4 - (a-1)^2x^3 - (2a^2 - 2a + 2)x^2 - (a-1)^2x + a = 0$

Ecuaciones trascendentes de grado superior

Resolveremos ecuaciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales de grado mayor que 2.

Si se hacen convenientes Cambios de Variable, se transforman en ecuaciones como las resueltas hasta ahora.

De no hacer Cambios de Variable, es necesario tener en cuenta que las raíces que se obtienen no son los valores de x que anulan la ecuación, sino los valores de $\text{sen } x$, $\text{tg } x$, $\lg x$, e^x , 3^x , etc., que sí la anulan.

Para la resolución de ecuaciones trascendentes elementales remitiremos a nuestro libro Selección de Temas de Matemática 4: páginas

79 y ss. (para las ecuaciones exponenciales),

87 y ss. (para las logarítmicas) y

185 y ss. (para las trigonométricas).

Ejemplo 39

Resolver la ecuación $8\cos^4 x - 4\cos^3 x - 10\cos^2 x + 3\cos x + 3 = 0$

Utilizando Ruffini:

	8	-4	-10	3	3
1		8	4	-6	-3
	8	4	-6	-3	10
-1/2		-4	0	3	
	8	0	-6	10	

La ecuación no tiene más raíces racionales. Factorizando, tendremos:

$$(\cos x - 1)(\cos x + \frac{1}{2})(8\cos^2 x - 6) = 0$$

o también:

$$(\cos x - 1)(2\cos x + 1)(4\cos^2 x - 3) = 0$$

En consecuencia:

$$\cos x = 1$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

Resolvemos estas tres ecuaciones elementales:

a) $\cos x = 1$

$$x = 2k\pi$$

b) $\cos x = -\frac{1}{2}$

$$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

c) $\cos^2 x = \frac{3}{4}$

$$\cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 40

Resolver: $2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$

Utilizando Ruffini:

	2	3	-3	-2
1		2	5	2
	2	5	2	10
-2		-4	-2	
	2	1	10	
-1/2		2		
	3	10		

El proceso da origen a las siguientes ecuaciones elementales:

a) $\operatorname{sen} x = 1$

de donde

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

b) $\operatorname{sen} x = -2$

que no tiene solución

(INADMISIBLE)

c) $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$

de donde

$$x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$$

Ejemplo 41

Resolver: $3\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2 = 0$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & -2 & -3 & 2 \\ & & 3 & 1 & -2 \\ \hline & 3 & 1 & -2 & \underline{0} \\ -1 & & -3 & 2 & \\ \hline & 3 & -2 & \underline{0} & \\ 2/3 & & 2 & & \\ \hline & 3 & \underline{0} & & \end{array}$$

Resolvemos ahora las siguientes ecuaciones elementales:

a) $\operatorname{tg} x = \pm 1$

de donde

$$x = k \cdot 180^\circ \pm 45^\circ$$

b) $\operatorname{tg} x = \frac{2}{3} = 0,667$

de donde

$$x = k \cdot 180^\circ + 33^\circ 41'$$

Ejemplo 42

Resolver: $12\cos^2 x + 16\cos x - 4\sec x - \operatorname{tg}^2 x = 0$

Antes de resolver la ecuación debemos hacer algunas transformaciones para unificar la variable.

Utilizaremos conocidas identidades trigonométricas.

Transformando el cuarto término:

$$12 \cos^2 x + 16 \cos x - 4 \sec x - \sec^2 x + 1 = 0$$

Multiplicando toda la ecuación por $\cos^2 x$:

$$12 \cos^4 x + 16 \cos^3 x - 4 \cos x - 1 + \cos^2 x = 0$$

Ordenando:

$$12 \cos^4 x + 16 \cos^3 x + \cos^2 x - 4 \cos x - 1 = 0$$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 12 & 16 & 1 & -4 & -1 \\ & & -12 & -4 & 3 & 1 \\ \hline & 12 & 4 & -3 & -1 & 0 \\ 1/2 & & 6 & 5 & 1 & \\ \hline & 12 & 10 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1/2 & 6 & 5 & 1 \\ & & -3 & -1 \\ \hline & 6 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1/3 & 3 & 1 \\ & & -1 \\ \hline & 3 & 0 \end{array}$$

Resultan las siguientes ecuaciones elementales:

a) $\cos x = -1$

de donde $x = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$

$$x = 180^\circ (1 + 2k)$$

b) $\cos x = \pm \frac{1}{2}$

de donde $x = k \cdot 180^\circ \pm 60^\circ$

c) $\cos x = -\frac{1}{3}$

$$\cos x = -0,333$$

de donde $x = k \cdot 360^\circ \pm 109^\circ 28'$

Ejemplo 43

Resolver: $\lg^3 x - 7 \lg x + 6 = 0$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -7 & 6 \\
 1 & & 1 & 1 & -6 \\
 \hline
 & 1 & 1 & -6 & \underline{10} \\
 2 & & 2 & 6 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & \underline{10} & \\
 -3 & & -3 & & \\
 \hline
 & 1 & \underline{10} & &
 \end{array}$$

Resultan las siguientes ecuaciones elementales:

a) $\lg_2 x = 1$

de donde

$$x = 2$$

b) $\lg_2 x = 2$

de donde

$$x = 4$$

c) $\lg_2 x = -3$

de donde

$$x = \frac{1}{8}$$

Ejemplo 44

Resolver: $3^{3x} - 10 \cdot 3^{2x} + 7 \cdot 3^x + 18 = 0$

Utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -10 & 7 & 18 \\
 2 & & 2 & -16 & -18 \\
 \hline
 & 1 & -8 & -9 & \underline{10} \\
 9 & & 9 & 9 & \\
 \hline
 & 1 & 1 & \underline{10} & \\
 1 & & -1 & & \\
 \hline
 & 1 & \underline{10} & &
 \end{array}$$

Resultan las siguientes ecuaciones elementales:

a) $3^x = 2$

de donde

$$x = \lg_3 2 = 0,6309$$

b) $3^x = 9$

$$3^x = 3^2$$

de donde

$$x = 2$$

c) $3^x = -1$

que no tiene solución: (INADMISIBLE)

Ejemplo 45

Resolver: $2^{4x+4} - 53 \cdot 2^{3x+1} + 189 \cdot 2^{2x} - 43 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

Hacemos las siguientes transformaciones para unificar la variable:

$$2^{4x+4} = 2^{4x} \cdot 2^4 = 16 \cdot 2^{4x} = 16(2^x)^4$$

$$2^{3x+1} = 2^{3x} \cdot 2 = 2(2^x)^3$$

$$2^{2x} = (2^x)^2$$

$$2^{x+1} = 2^x \cdot 2 = 2(2^x)$$

Sustituyendo:

$$16(2^x)^4 - 106(2^x)^3 + 189(2^x)^2 - 86(2^x) + 8 = 0$$

Utilizando Ruffini:

2	16	-106	189	-86	8
		32	-148	82	-8
4	16	-74	41	-4	0
		64	-40	4	
1/2	16	-10	1	0	
		8	-1		
	16	-2	0		

1/8	8	-1
		1
	8	0

Resultan las siguientes ecuaciones elementales:

a) $2^x = 2$

de donde

$x = 1$

b) $2^x = 4$

de donde

$x = 2$

c) $2^x = \frac{1}{2}$

de donde

$x = -1$

d) $2^x = \frac{1}{8}$

de donde

$x = -3$

Ejercicio 14

Resolver las siguientes ecuaciones:

- 1) $4\sin^4 x - 12\sin^3 x + 7\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$
- 2) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^3 x - 5\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 6 = 0$
- 3) $2\cos^3 x + 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$
- 4) $2\sec^4 x + 9\sec^3 x - 18\sec^2 x - 71\sec x - 30 = 0$
- 5) $2\sin^3 x + 3\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$
- 6) $10\sin^3 x + 13\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$
- 7) $8\sin^4 x + 4\sin^3 x + 10\cos^2 x - 3\sin x - 7 = 0$
- 8) $2\operatorname{tg}^4 x + \sec^4 x - 3\operatorname{tg}^3 x - 5\sec^2 x - 4\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 6 = 0$
- 9) $12\sin^2 x - 25\sin x + 2\csc x + 1 = 0$
- 10) $10\cos^2 x - 17\cos x - 7\sec x + 3\operatorname{tg}^2 x - 34 = 0$
- 11) $\lg^3 x - 6\lg^2 x + 11\lg x - 6 = 0$
- 12) $7\lg^3 x - 23\lg^2 x + 20\lg x - 4 = 0$
- 13) $7\lg^3 x - 8\lg^2 x - 41\lg x + 6 = 0$
- 14) $\lg_2^4 x - 8\lg_2^3 x + 17\lg_2^2 x + 2\lg_2 x - 24 = 0$
- 15) $6\lg^3 x - 11\lg^2 x + 6\lg x + \operatorname{colg} 10 = 0$
- 16) $3\lg^3 x + 2\lg^2 x + 7\operatorname{colg} x + \lg 100 = 0$
- 17) $\lg_3^5 x + 2\lg_3^4 x - 16\lg_3^3 x - 2\lg_3^2 x + 15\lg_3 x = 0$
- 18) $6\lg^4 x - \lg^3 x - 24\lg^2 x + 4\lg x = 0$
- 19) $2^{3x} - 7 \cdot 2^{2x} + 14 \cdot 2^x - 8 = 0$
- 20) $2^{3x} - 6 \cdot 2^{2x} + 11 \cdot 2^x - 6 = 0$
- 21) $3^{4x} - 12 \cdot 3^{3x} + 26 \cdot 3^{2x} + 12 \cdot 3^x - 27 = 0$
- 22) $2^{4x} - 10 \cdot 2^{3x} + 35 \cdot 2^{2x} - 50 \cdot 2^x + 24 = 0$
- 23) $8^x - 4^x - 2^{x+1} + 2 = 0$
- 24) $2^{3x} - 2^{2x+3} - 5 \cdot 2^x + 84 = 0$
- 25) $e^{3x} - 13e^{2x} + 47e^x - 35 = 0$
- 26) $4^{3x} - 9 \cdot 4^{2x} + 26 \cdot 4^x - 24 = 0$
- 27) $4 \cdot 2^{4x+3} - 14 \cdot 2^{3x+2} - 92 \cdot 2^{2x} + 43 \cdot 2^{x+1} - 15 = 0$
- 28) $m^{3x} - (a+b+1)m^{2x} + (a+ab+b)m^x - ab = 0$

Factorización y simplificación de fracciones

Sabiendo ya hallar las raíces de un polinomio y sabiendo factorizarlos, la factorización y simplificación de fracciones no reviste ninguna novedad.

Sin embargo, es bueno prestar atención a la siguiente observación: el método que tradicionalmente se maneja desde cursos anteriores al factorizar expresiones cuadráticas cuyo primer coeficiente es distinto de la unidad, implica multiplicar toda la expresión por dicho coeficiente. Esto no afecta en absoluto el resultado si se trata de una ecuación igualada a cero, pero sí altera el resultado si se trata del numerador o del denominador de una fracción no igualada a cero.

Veámoslo con un ejemplo:

Al resolver la ecuación $6x^2 - 7x - 5 = 0$

por el método citado efectuamos el siguiente proceso:

Formamos dos factores binómicos cuyo primer término es $6x$:

$$(6x \quad)(6x \quad) = 0$$

Colocamos como signo del segundo término del primer binomio el signo del segundo término de la ecuación:

$$(6x - \quad)(6x \quad) = 0$$

y como signo del segundo término del segundo binomio el producto de los signos del segundo y tercer término de la ecuación:

$$(6x - \quad)(6x + \quad) = 0$$

Dado que los signos colocados son opuestos, buscamos dos números que multiplicados den $6 \times 5 = 30$ y restados den 7. Estos números son 10 y 3. (Colocamos el mayor en el primer factor):

$$(6x - 10)(6x + 3) = 0$$

Puede constatarse fácilmente que, si efectuamos la multiplicación indicada en esta última expresión, obtenemos la expresión multiplicada por 6.

Por consiguiente, si al factorizar una expresión cuadrática utilizamos este método, tenemos que compensar la multiplicación implícita de la ecuación dividiendo por 6.

Es decir, la factorización de la expresión $6x^2 - 7x - 5$ es:

$$\frac{(6x - 10)(6x + 3)}{6}$$

Siempre podremos simplificar los términos de uno de los factores por ese número o, como en este caso, cada factor por un submúltiplo de ese número:

$$\frac{(6x-10)(6x+3)}{2 \cdot 3}$$

obteniéndose

$$(3x-5)(2x+1)$$

Ejemplo 46

Factorizar y simplificar la siguiente fracción:

$$\frac{x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 + 8x - 4}{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6}$$

Buscamos, utilizando Ruffini, las raíces del numerador para poder factorizarlo:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 1 & -5 & -1 & 8 & -4 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & -4 & 4 & 10 \\ 1 & & 1 & 3 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & -4 & 10 & \\ 1 & & 1 & 4 & 4 & 4 & \\ \hline & 1 & 4 & 4 & 10 & & \\ -2 & & -2 & -4 & & & \\ \hline & 1 & 2 & 10 & & & \\ -2 & & -2 & & & & \\ \hline & 1 & 10 & & & & \end{array}$$

El numerador es

$$(x-1)^3(x+2)^2$$

Buscamos ahora las raíces del denominador:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 4 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 1 & -6 & 10 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 10 & \\ -2 & & -2 & -6 & & \\ \hline & 1 & 3 & 10 & & \\ -3 & & -3 & & & \\ \hline & 1 & 10 & & & \end{array}$$

El denominador es

$$(x-1)^2(x+2)(x+3)$$

y la fracción factorizada:

$$\frac{(x-1)^3(x+2)^2}{(x-1)^2(x+2)(x+3)}$$

Simplificando:

$$\frac{(x-1)(x+2)}{(x+3)}$$

Ejemplo 47

Factorizar y simplificar la fracción $\frac{10x^2 - 9x + 2}{10x^4 - 9x^3 - 8x^2 + 9x - 2}$

Factorizamos el numerador:

$$\frac{(10x-5)(10x-4)}{10}$$

Simplificando por 5 el primer factor y por 2 el segundo:

$$(2x-1)(5x-2)$$

Factorizamos el denominador utilizando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 10 & -9 & -8 & 9 & -2 \\ & & 10 & 1 & -7 & 2 \\ \hline -1 & 10 & 1 & -7 & 2 & \underline{10} \\ & & -10 & 9 & -2 & \\ \hline 1/2 & 10 & -9 & 2 & \underline{10} & \\ & & 5 & -2 & \\ \hline & 10 & -4 & \underline{10} & & \\ \\ 2/5 & 5 & -2 & \underline{10} & & \\ & & 2 & & & \\ \hline & 5 & \underline{10} & & & \end{array}$$

El denominador es:

$$(x-1)(x+1)(2x-1)(5x-2)$$

La fracción queda así:

$$\frac{(2x-1)(5x-2)}{(x-1)(x+1)(2x-1)(5x-2)}$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{1}{(x-1)(x+1)}}$$

Ejercicio 15

Factorizar las siguientes fracciones y simplificarlas:

1) $\frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}{x^3 - 7x - 6}$

2) $\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6}$

3) $\frac{2x^3 + 3x^2 - 18x + 8}{4x^4 - 17x^2 + 4}$

- 4) $\frac{x^5 - 21x^3 + 16x^2 + 108x - 144}{x^4 + 2x^3 - 17x^2 - 18x + 72}$
- 5) $\frac{6x^4 + x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{6x^4 + 7x^3 + 5x^2 - x - 2}$
- 6) $\frac{60x^4 + 16x^3 - 21x^2 - 3x + 2}{60x^4 - 104x^3 + 7x^2 + 25x - 6}$
- 7) $\frac{x^4 + 6x^3 + 3x + 140}{x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 53x - 140}$
- 8) $\frac{2x^6 + 3x^5 - 32x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 96x - 45}{x^5 + 2x^4 - 15x^3 - 3x^2 - 6x + 45}$
- 9) $\frac{2x^4 + 6x^3 - 56x^2}{x^4 + 2x^3 - 31x^2 + 28x}$
- 10) $\frac{6x^4 + 11x^3 + 18x^2 + 11x + 2}{9x^4 + 9x^3 + 17x^2 - x - 2}$

Límites con la indeterminación $\frac{0}{0}$

En matemáticas se dice que el cociente $\frac{k}{0}$ no está definido.

Al estudiar, por ejemplo, el dominio de la función

$$f_{(x)} = \frac{1}{x-2}$$

afirmamos que la variable puede tomar cualquier valor real a excepción del 2, pues en tal caso se anula el denominador y no se obtiene para la función un valor definido.

Sin embargo, se dice que $\frac{5}{0} = \infty$, $\frac{-3}{0} = -\infty$, etc., utilizando el criterio de que, a medida que el denominador de una fracción va tomando valores cada vez más pequeños, el cociente se va haciendo proporcionalmente cada vez más grande y, si el denominador toma un valor infinitamente pequeño cercano a cero, el cociente se hace infinitamente grande.

No sucede lo mismo con la expresión $\frac{0}{0}$.

Esta se considera en matemáticas una **Indeterminación**, es decir, un resultado respecto al cual no podemos afirmar absolutamente nada.

Estudiaremos a continuación algunos casos de funciones fraccionarias que, para determinados valores de la variable, dan origen a esta indeterminación.

Veamos el caso de la función

$$f_{(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

Haremos el gráfico de $f(x)$ mediante una tabla de valores:

x	$f(x)$
0	-2
1	-1
2	0
3	???
4	2
5	3
6	4

Al tratar de calcular $f(3)$ obtuvimos el resultado $0/0$. La función no existe, por tanto, para $x = 3$.

Llevando los valores a un gráfico, obtenemos el de la figura 1:

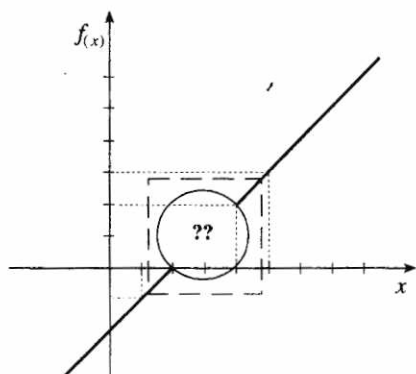


Fig. 1

Para tener una visión más completa de la función en el punto crítico $x = 3$, haremos una ampliación del recuadro de la Fig. 1 y fabricaremos la siguiente tabla adicional:

x	$f(x)$
2,7	0,7
2,8	0,8
2,9	0,9
3	???
3,1	1,1
3,2	1,2
3,3	1,3

El recuadro ampliado y con los nuevos valores señalados aparece en la Fig. 2:

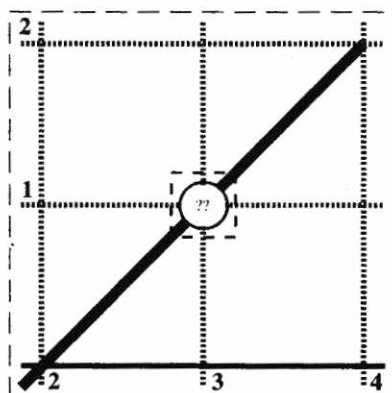


Fig. 2

Ampliamos el recuadro pequeño central de la Fig. 2 y añadimos los puntos de una nueva tabla:

x	$f(x)$
2,97	0,97
2,98	0,98
2,99	0,99
3	???
3,01	1,01
3,02	1,02
3,03	1,03

El resultado puede verse en la Fig. 3:

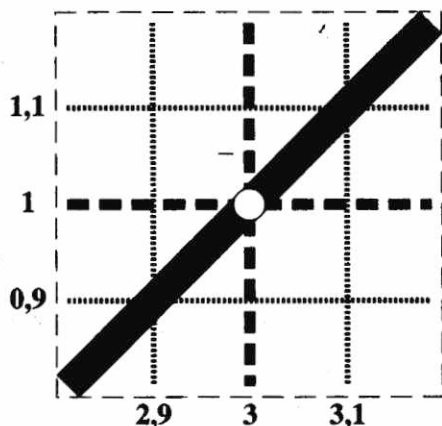


Fig. 3

El punto de discontinuidad siempre existirá por más que tomemos valores de la variable cada vez más cercanos a 3. Pero ese punto es infinitesimal y por eso podemos decir que, cuando la variable se acerca al valor 3, la función se acerca al valor 1.

En el lenguaje matemático ese concepto se expresa de esta forma:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} = 1$$

(y se lee así: el límite, cuando x tiende a 3, de $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ es 1).

Para calcular este tipo de límites procederemos de la siguiente forma:

Ejemplo 48

Calcular $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

(El mismo ejercicio anterior, resuelto ahora en forma analítica).

1) Comprobamos, calculando $f(3)$, que se trata de un límite de la forma 0/0:

$$f_{(3)} = \frac{0}{0}$$

(Indeterminación)

2) Si el numerador y el denominador se anulan para $x = 3$ es porque 3 es raíz o cero de ambas expresiones y, por tanto, ambas son divisibles por $x - 3$. Trataremos entonces de aislar ese factor que es el que produce la indeterminación.

En nuestro ejemplo, basta con factorizar el numerador:

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$$

3) El valor al que se acerca nuestra función es el mismo al que se acerca *esta otra* (que no tiene el factor que produce la indeterminación):

$$= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2)$$

4) Y el límite se calcula sustituyendo la variable por 3:

$$= 3 - 2$$

$$= \boxed{1}$$

Nota: es importante insistir en que en ningún momento hemos afirmado que las funciones $f_{(x)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ y $f_{(x)} = (x - 2)$ sean iguales. Ambas se comportan en forma *casi* idéntica, pero la primera tiene un punto de discontinuidad que la segunda no posee. Lo que podemos afirmar es que ambas funciones se acercan al mismo punto cuando la variable tiende a 3.

Ejemplo 49

Calcular $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 12x - 4}{x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 19x + 30}$

Comprobamos que

$$f_{(-2)} = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Si el numerador y el denominador se anulan para $x = -2$ es porque -2 es raíz de ambas expresiones y ambas son divisibles por $x + 2$, que es el factor que produce la indeterminación. Aislaremos, ese factor.

Dividimos el numerador por $x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 3 & -3 & -12 & -4 \\ -2 & & -2 & -2 & 10 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

Probamos de nuevo con -2 (puede ser una raíz múltiple) sin resultado.

El numerador es igual a: $(x + 2)(x^3 + x^2 - 5x - 2)$

(No nos interesa factorizar por completo el numerador sino tan sólo aislar el factor que produce la indeterminación).

Dividimos el denominador por $x + 2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 4 & 6 & 19 & 30 \\ -2 & & -2 & -4 & -4 & -30 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 15 & 0 \end{array}$$

Al no dividir al último término del cociente resultante, -2 no puede ser raíz múltiple del denominador. Este será igual, entonces, a:

$$(x + 2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 15)$$

Y el límite que deseamos calcular es

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)(x^3 + x^2 - 5x - 2)}{(x + 2)(x^3 + 2x^2 + 2x + 15)}$$

que es equivalente a

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + x^2 - 5x - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x + 15}$$

Sustituyendo la variable por -2 para calcular el límite:

$$\begin{aligned} &= \frac{-8 + 4 + 10 - 2}{-8 + 8 - 4 + 15} \\ &= \boxed{\frac{4}{11}} \end{aligned}$$

Ejercicio 16

Calcular los siguientes límites:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^3 + 2x^2 - 13x + 10}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - x^2 - 6x}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 - 8x^2 + 21x - 18}$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 3}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 + 5x^4 - 9x^3 - 8x^2 - 3x - 2}{3x^4 - 5x^3 + 7x - 22}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8x - 7}{2x^6 - 2x^5 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 5x + 1}{4x^3 - 4x^2 - 7x - 2}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{3x^4 - 7x^3 - 2x - 4}{3x^4 - 10x^3 + 7x^2 + x - 6}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{54x^3 - 81x^2 + 36x - 5}{27x^3 - 27x^2 + 9x - 1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x + 4}{2x^5 + 7x^4 - 2x^2 + 11x + 8}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 8x^2 + 14x - 3}{x^3 + 2x^2 + 4x + 21}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{9x^4 - 3x^3 - 23x^2 - 13x - 2}{9x^4 + 15x^3 + 16x^2 + 7x + 1}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{8x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 4x + 1}{4x^4 + 10x^3 + 4x^2 - 6x - 3}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{x^2 + (2+a)x + 2a}{x^2 + 2ax + a^2}$

Límites de funciones trascendentes con la indeterminación $\frac{0}{0}$

Con un acertado Cambio de Variable, los límites de funciones trascendentes se transforman en límites como los que se acaban de estudiar. Veámoslo con algunos ejemplos.

Ejemplo 50

Calcular $\lim_{x \rightarrow 100} \frac{\lg^3 x - 7 \lg x + 6}{\lg^3 x - 3 \lg^2 x - 4 \lg x + 12}$

Cuando la variable x tiende a 100, la expresión $\lg x$ tiende al valor 2:

$$\begin{array}{ll} \text{si} & x \rightarrow 100 \\ \text{entonces} & \lg x \rightarrow \lg 100 \\ & \lg x \rightarrow 2 \end{array}$$

Podemos expresar entonces el límite anterior de la siguiente forma:

$$= \lim_{\lg x \rightarrow 2} \frac{\lg^3 x - 7 \lg x + 6}{\lg^3 x - 3 \lg^2 x - 4 \lg x + 12}$$

y, si hacemos el siguiente Cambio de Variable

$$\lg x = y$$

el límite que tendremos que calcular es éste:

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - 7y + 6}{y^3 - 3y^2 - 4y + 12}$$

Verificamos que

$$f_{(2)} = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Aislamos, dividiendo por $y - 2$, el factor que produce la indeterminación:

En el numerador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

Dado que 2 no puede ser raíz del cociente, el numerador será:

$$(y - 2)(y^2 + 2y - 3)$$

En el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -4 & 12 \\ 2 & & 2 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 \end{array}$$

Dado que 2 no es raíz del cociente resultante (compruébese), el denominador será:

$$(y - 2)(y^2 - y - 6)$$

El límite a calcular será:

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y - 2)(y^2 + 2y - 3)}{(y - 2)(y^2 - y - 6)}$$

equivalente a éste otro:

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y^2 + 2y - 3)}{(y^2 - y - 6)}$$

$$= \frac{4 + 4 - 3}{4 - 2 - 6}$$

$$= \boxed{-\frac{5}{4}}$$

Ejercicio 17

Calcular los siguientes límites:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg^2 x + 2 \lg x - 3}{\lg^2 x + 4 \lg x - 5}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 100} \frac{\lg^3 x - 12 \lg x + 16}{\lg^3 x - 3 \lg^2 x + 4}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 0.001} \frac{\lg^3 x + 9 \lg^2 x + 26 \lg x + 24}{\lg^3 x + 7 \lg^2 x + 7 \lg x - 15}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\lg_2^4 x - 5 \lg_2^3 x + 5 \lg_2^2 x + 5 \lg_2 x - 6}{\lg_2^3 x + 3 \lg_2^2 x - 10 \lg_2 x - 24}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg^3 x - \lg^2 x - \lg x + 1}{\lg^4 x - \lg^3 x - 3 \lg^2 x + 5 \lg x - 2}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{9}} \frac{\lg_3^3 x + 5 \lg_3^2 x + 2 \lg_3 x - 8}{\lg_3^3 x + 6 \lg_3^2 x + 11 \lg_3 x + 6}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{\lg_5^2 x + 5 \lg_5 x - 14}{\lg_5^3 x - 2 \lg_5^2 x - \lg_5 x + 2}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{\lg^3 x + 5 \lg^2 x - 7 \lg x + 1}{\lg^3 x - 6 \lg^2 x + 2 \lg x + 3}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln^3 x + \ln^2 x - 2 \ln x}{\ln^2 x + (e-1) \ln x - e}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}} \frac{\ln^3 x + 2 \ln^2 x - \ln x - 2}{\ln^3 x - 3 \ln x - 2}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 1000} \frac{\lg^3 x - 5 \lg^2 x + 3 \lg x + 9}{\lg^3 x - 6 \lg^2 x + 11 \lg x - 6}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\lg_2^3 x - 5 \lg_2^2 x + 3 \lg_2 x + 9}{\lg_2^3 x - 4 \lg_2^2 x - 3 \lg_2 x + 18}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\lg_7^3 x + \lg_7^2 x - 5 \lg_7 x + 3}{2 \lg_7^3 x - \lg_7^2 x - 3 \lg_7 x + 2}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2 \lg_2^3 x + 5 \lg_2^2 x - 19 \lg_2 x - 42}{\lg_2^3 x + 6 \lg_2^2 x + 3 \lg_2 x - 10}$

Ejemplo 51

Calcular: $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{2 \cos^4 x - \cos^3 x + 21 \cos^2 x + 5 \cos x - 3}{2 \cos^5 x + \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 13 \cos x + 7}$

Si

$$x \rightarrow \frac{2\pi}{3}$$

Entonces

$$\cos x \rightarrow \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos x \rightarrow -\frac{1}{2}$$

El límite se puede expresar así:

$$= \lim_{\cos x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2 \cos^4 x - \cos^3 x + 21 \cos^2 x + 5 \cos x - 3}{2 \cos^5 x + \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 13 \cos x + 7}$$

Haciendo el Cambio de Variable $\cos x = y$, tenemos:

$$= \lim_{y \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2y^4 - y^3 + 21y^2 + 5y - 3}{2y^5 + y^4 - 2y^2 + 13y + 7}$$

Comprobamos que

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Aislando el factor $2y + 1$, que es el que produce la indeterminación, en el numerador y en el denominador (mediante divisiones sintéticas):

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(2y+1)(y^3 - y^2 + 11y - 3)}{(2y+1)(y^4 - y + 7)} \\ &= \lim_{y \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{y^3 - y^2 + 11y - 3}{y^4 - y + 7} \\ &= \frac{-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{11}{2} - 3}{\frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 7} \\ &= \boxed{-\frac{142}{121}} \end{aligned}$$

Ejemplo 52

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{4 \cos^8 x + 12 \cos^6 x - 3 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 3}{4 \cos^8 x - 16 \cos^6 x + 21 \cos^4 x - 11 \cos^2 x + 2}$

Si

$$x \rightarrow \frac{3\pi}{4}$$

entonces

$$\cos x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y

$$\cos^2 x \rightarrow \frac{1}{2}$$

(Nótese que todos los términos de la función son potencias de $\cos^2 x$)

El límite se puede expresar así:

$$= \lim_{\cos^2 x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4 \cos^8 x + 12 \cos^6 x - 3 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 3}{4 \cos^8 x - 16 \cos^6 x + 21 \cos^4 x - 11 \cos^2 x + 2}$$

Haciendo el Cambio de Variable $\cos^2 x = y$, tenemos:

$$= \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4y^4 + 12y^3 - 3y^2 - 8y + 3}{4y^4 - 16y^3 + 21y^2 - 11y + 2}$$

Comprobamos que

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Aislando el factor $2y - 1$, causante de la indeterminación, en el numerador y en el denominador (mediante divisiones sintéticas):

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2y-1)^2 (y^2 + 4y + 3)}{(2y-1)^2 (y^2 - 3y + 2)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{y^2 + 4y + 3}{y^2 - 3y + 2} \\ &= \frac{\frac{1}{4} + 2 + 3}{\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2} \\ &= \boxed{7} \end{aligned}$$

Ejercicio 18

Calcular los siguientes límites:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 2}{3 \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x + 2}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{4 \operatorname{sen}^3 x - 3 \operatorname{sen} x + 1}{4 \operatorname{sen}^3 x - 12 \operatorname{sen}^2 x + 9 \operatorname{sen} x - 2}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{16 \operatorname{sen}^4 x - 8 \operatorname{sen}^2 x - 3}{16 \operatorname{sen}^4 x - 16 \operatorname{sen}^2 x + 3}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{3}} \frac{2 \cos^3 x + \cos^2 x - 13 \cos x + 6}{2 \cos^3 x - 3 \cos^2 x - 11 \cos x + 6}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x - 3}{\operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 15}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos^4 x + 4 \cos^2 x - 3}{4 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 3}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \sec^2 x - 4 \sec x - 4}{5 \sec^2 x - 8 \sec x - 4}$$

- 8) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^5 x + 6 \operatorname{tg}^4 x + 14 \operatorname{tg}^3 x + 16 \operatorname{tg}^2 x + 9 \operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg}^5 x + 2 \operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^3 x - 8 \operatorname{tg}^2 x - 7 \operatorname{tg} x - 2}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{2 \operatorname{sen}^4 x + 5 \operatorname{sen}^2 x - 3}{2 \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^2 x - 1}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\operatorname{ctg}^6 x - 3 \operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x + 3}{\operatorname{ctg}^4 x - 9}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 2}{\operatorname{tg}^3 x + 3 \operatorname{tg}^2 x - 9 \operatorname{tg} x + 5}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4 \cos^6 x - 3 \cos^2 x + 1}{8 \cos^6 x - 4 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^4 x - \operatorname{tg}^3 x - 9 \sec^2 x + \operatorname{tg} x + 14}{\sec^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 3}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{6 \cos^3 x + 7 \cos^2 x - 1}{4 \cos^3 x - 2 \cos^2 x - \cos x - 1}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^3 x + 4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6}{\operatorname{tg}^3 x - 6 \operatorname{tg}^2 x + 11 \operatorname{tg} x - 6}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2 \operatorname{tg}^4 x - 7 \operatorname{tg}^2 x + 3}{\operatorname{tg}^4 x - 6 \operatorname{tg}^2 x + 9}$

Ejemplo 53

Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x+1} + 5 \cdot 2^x + 12}{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8}$

Descomponemos las expresiones que tienen una suma como exponente:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{3x} - 6 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 12}{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8}$$

Si $x \rightarrow 2$

entonces $2^x \rightarrow 4$

El límite se puede expresar así:

$$= \lim_{2^x \rightarrow 4} \frac{2^{3x} - 6 \cdot 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 12}{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8}$$

Haciendo el Cambio de Variable $2^x = y$, tenemos:

$$= \lim_{y \rightarrow 4} \frac{y^3 - 6y^2 + 5y + 12}{y^3 - 3y^2 - 6y + 8}$$

Comprobamos que

$$f(4) = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Aislamos el factor que produce la indeterminación:

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 4} \frac{(y-4)(y^2 - 2y - 3)}{(y-4)(y^2 + y - 2)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 4} \frac{y^2 - 2y - 3}{y^2 + y - 2} \\ &= \frac{16 - 8 - 3}{16 + 4 - 2} \\ &= \boxed{\frac{5}{18}} \end{aligned}$$

Ejemplo 54

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2^{9x} - 2^{6x} - 2^{3x+2} + 4}{2^{9x} - 2^{6x+1} - 5 \cdot 2^{3x} + 10}$

Descomponemos primero las expresiones que tienen una suma como exponente:

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{2^{9x} - 2^{6x} - 4 \cdot 2^{3x} + 4}{2^{9x} - 2 \cdot 2^{6x} - 5 \cdot 2^{3x} + 10}$$

Si $x \rightarrow \frac{1}{3}$

entonces $2^{3x} \rightarrow 2$

(Tomaremos 2^{3x} como expresión básica para el Cambio de Variable dado que todos los términos de la función son potencia de 2^{3x}).

El límite se puede expresar así:

$$= \lim_{2^{3x} \rightarrow 2} \frac{2^{9x} - 2^{6x} - 4 \cdot 2^{3x} + 4}{2^{9x} - 2 \cdot 2^{6x} - 5 \cdot 2^{3x} + 10}$$

Haciendo el Cambio de Variable $2^{3x} = y$, tenemos:

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^3 - y^2 - 4y + 4}{y^3 - 2y^2 - 5y + 10}$$

Comprobamos que

$$f(2) = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Aislamos el factor $y - 2$ en el numerador y en el denominador:

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)(y^2 + y - 2)}{(y-2)(y^2 - 5)}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^2 + y - 2}{y^2 - 5}$$

$$= \frac{4 + 2 - 2}{4 - 5}$$

$$= \boxed{-4}$$

Ejercicio 19

Calcular los siguientes límites:

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4^{3x} + 2 \cdot 4^{2x} - 5 \cdot 4^x - 6}{4^{3x} - 10 \cdot 4^{2x} + 23 \cdot 4^x - 14}$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^{3x} + 4\pi^{2x} - 11\pi^x + 6}{\pi^{3x} + 11\pi^{2x} - 25\pi^x + 13}$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 2^{2x} - 11 \cdot 2^x + 3}{2 \cdot 2^{3x} - 2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{e^{2x} + 2e^x - 3}$$

$$5) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{2x} + e^{x+1} - 2e^2}{e^{2x} - 3e^{x+1} + 2e^2}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{3x} - 2^{2x} - 11 \cdot 2^x - 4}{2^{3x} + 2^{2x} - 21 \cdot 2^x + 4}$$

$$7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{3x} + 4 \cdot 5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 2}{5^{3x} - 7 \cdot 5^{2x} + 10 \cdot 5^x - 4}$$

$$8) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3^{2x+2} + 8 \cdot 3^x - 1}{3^{2x+2} - 10 \cdot 3^x - 1}$$

$$9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} + 3 \cdot 2^{2x+1} - 2^{x+3} + 1}{2^{3x+1} + 2^{2x} - 2^x - 2}$$

$$10) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{5^{6x} - 4 \cdot 5^{4x} - 7 \cdot 5^{2x} + 10}{2 \cdot 5^{6x} - 11 \cdot 5^{4x} + 2 \cdot 5^{2x} + 15}$$

$$11) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{e^{2x+1} + (e^2 - 1)e^x - e}{e^{2x+1} - (e^2 + 1)e^x + e}$$

$$12) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{3x+1} - 5 \cdot 2^{2x+1} - 7 \cdot 2^{x+3} + 8}{3 \cdot 2^{3x+1} - 17 \cdot 2^{2x} + 9 \cdot 2^x + 8}$$

$$13) \quad \lim_{x \rightarrow \lg_2 3} \frac{2^{3x} + 2^{2x} - 17 \cdot 2^x + 15}{2^{3x} - 2^{2x} - 41 \cdot 2^x + 105}$$

- 14) $\lim_{x \rightarrow \lg_3 5} \frac{3^{4x} - 11 \cdot 3^{3x} + 11 \cdot 3^{2x+1} - 5 \cdot 3^x - 50}{3^{4x} - 3 \cdot 3^{3x+2} + 13 \cdot 3^{2x} + 5 \cdot 3^{x+2} - 50}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow \ln 3} \frac{-5e^{3x} - 18e^{2x} + 7e^x + 6}{4e^{3x} - 15e^{2x} - e^x + 30}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\pi^{9x} + 2\pi^{6x+1} - \pi^{3x+2} - 2\pi^3}{\pi^{9x} - 6\pi^{6x+1} + 11\pi^{3x+2} - 6\pi^3}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{5x+1} - 3 \cdot 2^{4x} + 2^{3x+3} - 3 \cdot 2^{2x+2} + 2^{x+4} - 11}{2^{5x+2} - 3 \cdot 2^{4x+2} + 13 \cdot 2^{3x} - 7 \cdot 2^{2x} + 2}$

Límites de funciones irracionales (Primer tipo)

Los límites de funciones irracionales en los que la variable se presenta en la forma $\sqrt[n]{x}$ (y que llevan a la indeterminación $\frac{0}{0}$) pueden ser calculados con un simple Cambio de Variable como se hizo con los límites de funciones trascendentes.

Posteriormente veremos otros límites de funciones irracionales que deben ser racionalizados previamente para poder ser calculados.

Ejemplo 55

Calcular $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x - 2\sqrt[6]{x^5} - 22\sqrt[3]{x^2} + 66\sqrt{x} - 11\sqrt[3]{x} - 76\sqrt[6]{x} + 20}{x - 4\sqrt[6]{x^5} - 7\sqrt[3]{x^2} + 48\sqrt{x} - 54\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[6]{x} + 24}$

Si $x \rightarrow 64$

entonces $\sqrt[6]{x} \rightarrow 2$

El límite se puede expresar así:

$$= \lim_{\sqrt[6]{x} \rightarrow 2} \frac{x - 2\sqrt[6]{x^5} - 22\sqrt[3]{x^2} + 66\sqrt{x} - 11\sqrt[3]{x} - 76\sqrt[6]{x} + 20}{x - 4\sqrt[6]{x^5} - 7\sqrt[3]{x^2} + 48\sqrt{x} - 54\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[6]{x} + 24}$$

Hacemos el Cambio de Variable:

$$\sqrt[6]{x} = y$$

(Se muestran al lado las transformaciones hechas en los demás términos para unificar la variable):

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{x^2} = y^2$$

$$\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3} = y^3$$

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4} = y^4$$

$$\sqrt[6]{x^5} = y^5$$

$$x = \sqrt[6]{x^6} = y^6$$

Tenemos, entonces:

$$= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^6 - 2y^5 - 22y^4 + 66y^3 - 11y^2 - 76y + 20}{y^6 - 4y^5 - 7y^4 + 48y^3 - 54y^2 - 8y + 24}$$

Comprobamos que

$$f(2) = \frac{0}{0} \quad (\text{Indeterminación})$$

Aislamos el factor $y - 2$ causante de la indeterminación:

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{(y-2)^2 (y^4 + 2y^3 - 18y^2 - 14y + 5)}{(y-2)^2 (y^4 - 11y^2 + 4y + 6)} \\ &= \lim_{y \rightarrow 2} \frac{y^4 + 2y^3 - 18y^2 - 14y + 5}{y^4 - 11y^2 + 4y + 6} \\ &= \frac{16 + 16 - 72 - 28 + 5}{16 - 44 + 8 + 6} \\ &= \boxed{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 20

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 2\sqrt{x} - 8}{x - 4}$

2) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x\sqrt{x} - 7x + 7\sqrt{x} + 15}{x\sqrt{x} - 7x - 9\sqrt{x} + 63}$

3) $\lim_{x \rightarrow -27} \frac{x + 7\sqrt[3]{x^2} + 15\sqrt[3]{x} + 9}{x + 2\sqrt[3]{x^2} - 15\sqrt[3]{x} - 36}$

4) $\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x\sqrt{x} - 6x + 3\sqrt{x} + 10}{x\sqrt{x} - 4x - 7\sqrt{x} + 10}$

5) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x + 6\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt{x} - 26\sqrt[4]{x} - 24}{x - 4\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x} + 16\sqrt[4]{x} - 12}$

6) $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6}{\sqrt[4]{x^3} - 5\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} + 9}$

7) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x + \sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x}}{x - 6\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + 10}$

8) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{x - 7\sqrt[6]{x^5} + 8\sqrt[3]{x^2} + 32\sqrt{x} - 64\sqrt[3]{x} - 16\sqrt[6]{x} + 64}{x - 7\sqrt[6]{x^5} + 9\sqrt[3]{x^2} + 43\sqrt{x} - 154\sqrt[3]{x} + 180\sqrt[6]{x} - 72}$

- 9) $\lim_{x \rightarrow -125} \frac{x\sqrt[3]{x} + 14x + 60\sqrt[3]{x^2} + 50\sqrt[3]{x} - 125}{x\sqrt[3]{x} + 6x - 20\sqrt[3]{x^2} - 150\sqrt[3]{x} - 125}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{8}} \frac{2x + 3\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 2}{6x - 29\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x} + 5}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos^{\frac{3}{4}}x - 7\cos^{\frac{1}{2}}x + 7\cos^{\frac{1}{4}}x - 2}{3\cos^{\frac{3}{4}}x + 4\cos^{\frac{1}{2}}x - 5\cos^{\frac{1}{4}}x - 2}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{6\operatorname{tg}x - 11\operatorname{tg}^{\frac{3}{4}}x - 12\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}x + 23\operatorname{tg}^{\frac{1}{4}}x - 6}{6\operatorname{tg}^{\frac{3}{4}}x - 13\operatorname{tg}^{\frac{1}{2}}x + 9\operatorname{tg}^{\frac{1}{4}}x - 2}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow 81} \frac{x - 3x^{\frac{3}{4}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 11x^{\frac{1}{4}} - 6}{x^{\frac{3}{4}} - 4x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 6}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{x - 2\sqrt[4]{x^3} + \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} - 2}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x - 7\sqrt[3]{x} - 6}{x + 3\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} - 12}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[6]{x} - 4}{\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x} + 4\sqrt[6]{x} - 12}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^{\frac{4}{3}}x - 5\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}x + 4}{\operatorname{tg}^{\frac{4}{3}}x + 3\operatorname{tg}x - 11\operatorname{tg}^{\frac{2}{3}}x - 3\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}}x + 10}$

Divisibilidad de $x^n \pm a^n$ por $x \pm a$

Analizaremos a continuación qué condiciones deben darse para que $P_{(x)} \equiv x^n \pm a^n$ sea divisible por $x \pm a$. Por el Teorema del Resto sabemos que $P_{(x)}$ es divisible por $x \pm a$ si $P_{(\mp a)} = 0$.

1) $x^n - a^n$ siempre es divisible por $x - a$. En efecto, cualquiera que sea n ,

$$P_{(a)} = a^n - a^n = 0$$

El cociente lo podemos calcular por una simple división sintética:

a	1	0	0		0	0	0	$-a^n$
		a	a^2		a^{n-3}	a^{n-2}	a^{n-1}	a^n
	1	a	a^2		a^{n-3}	a^{n-2}	a^{n-1}	<u>0</u>

Por tanto:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1} \quad (\text{I})$$

2) $x^n + a^n$ **nunca es divisible** por $x - a$. En efecto, cualquiera que sea n ,

$$P(a) = a^n + a^n = 2a^n \neq 0$$

3) $x^n - a^n$ es divisible por $x + a$ **si n es par**. En efecto, si n es par tenemos:

$$P(-a) = (-a)^n - a^n = a^n - a^n = 0$$

En cambio, si n es impar:

$$P(-a) = (-a)^n - a^n = -a^n - a^n = -2a^n \neq 0$$

El cociente, para n par, es:

$$\frac{x^n - a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x - a^{n-1} \quad (\text{II})$$

4) $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ **si n es impar**. En efecto, si n es impar:

$$P(-a) = (-a)^n + a^n = -a^n + a^n = 0$$

lo que no ocurre para un valor par de n .

El cociente es:

$$\frac{x^n + a^n}{x + a} = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-3}x^2 - a^{n-2}x + a^{n-1} \quad (\text{III})$$

Los cocientes I, II y III reciben el nombre de **cocientes notables**.

Ejemplos de desarrollos de algunos cocientes notables:

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

$$\frac{x^4 - y^4}{x + y} = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\frac{x^4 + y^4}{x - y} \quad (\text{No es divisible})$$

$$\frac{x^4 + y^4}{x + y} \quad (\text{No es divisible})$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$\frac{x^5 - y^5}{x + y} \quad (\text{No es divisible})$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x - y} \quad (\text{No es divisible})$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4$$

Ejercicio 21

Determinar, en caso de que sea exacto, el cociente en cada una de las siguientes divisiones:

$$1) \quad x^3 + y^3 \div x + y$$

$$2) \quad x^6 + y^6 \div x - y$$

$$3) \quad a^4 - 16 \div a + 2$$

$$4) \quad a^7 + b^7 \div a + b$$

$$5) \quad a^6 - 64 \div a - 2$$

$$6) \quad 81 + a^4 \div 3 - a$$

$$7) \quad 125 - x^3 \div 5 - x$$

$$8) \quad m^4 + n^4 \div m + n$$

$$9) \quad x^4 - 81 \div x + 3$$

$$10) \quad a^3 - b^3 \div a + b$$

$$11) \quad a^8 - b^8 \div a - b$$

$$12) \quad a^7 + b^7 \div a - b$$

$$13) \quad m^5 - 32 \div m - 2$$

$$14) \quad 27 - m^3 \div 3 - m$$

$$15) \quad x^8 - 1 \div x + 1$$

$$16) \quad a^4 b^4 - 625 \div ab - 5$$

$$17) \quad 27m^3 + 8n^3 \div 3m + 2n$$

$$18) \quad a^5 - 1 \div a - 1$$

Racionalización de denominadores

Se llama **racionalización** al proceso de multiplicar una expresión irracional M por una cantidad adecuada E (que llamaremos **conjugada** de M) de tal forma que el producto $M \times E$ sea una expresión racional. Si M es el denominador de una fracción, el proceso recibe el nombre de racionalización del denominador.

Estudiaremos tres casos de racionalización de denominadores:

A) Cuando el denominador contiene radicales en forma de factor

Si el denominador es $a\sqrt{b}$, la conjugada es $E = \sqrt{b}$.

Si el denominador es $a^n\sqrt[n]{b^m}$ ($n > m$), la conjugada es $E = \sqrt[n]{b^{n-m}}$. Si $n < m$, la conjugada será $E = \sqrt[n]{b^p}$, donde p es una cantidad tal que $m + p$ sea múltiplo de n (véase el Ejemplo 59).

Ejemplo 56

Racionalizar el denominador: $\frac{15\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}$

Conjugada del denominador: $E = \sqrt{5}$

Multiplicamos numerador y denominador por E :

$$= \frac{15\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

Efectuando:

$$= \frac{15\sqrt{35}}{2 \cdot 5}$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{35}}{2}}$$

Ejemplo 57

Racionalizar el denominador: $\frac{2a}{3\sqrt[5]{a^3}}$

Conjugada del denominador: $E = \sqrt[5]{a^2}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{2a \cdot \sqrt[5]{a^2}}{3\sqrt[5]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^2}}$$

Efectuando:

$$= \frac{2a \cdot \sqrt[5]{a^2}}{3a}$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{2\sqrt[5]{a^2}}{3}}$$

Ejemplo 58

Racionalizar el denominador: $\frac{6a^3bc^2}{\sqrt[6]{324a^3b^5c}}$

Descomponemos primero los coeficientes del numerador y de la cantidad subradical del denominador:

$$= \frac{2 \cdot 3a^3bc^2}{\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^4 a^3 b^5 c}}$$

Conjugada del denominador: $E = \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2 a^3 bc^5}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{2 \cdot 3a^3bc^2 \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2 a^3 bc^5}}{\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^4 a^3 b^5 c} \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2 a^3 bc^5}}$$

Efectuando:

$$= \frac{2 \cdot 3a^3bc^2 \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2 a^3 bc^5}}{2 \cdot 3abc}$$

Simplificando:

$$= \boxed{a^2c \sqrt[6]{2^4 \cdot 3^2 a^3 bc^5}}$$

Ejemplo 59

Racionalizar el denominador: $\frac{2a^3bc^2}{\sqrt[7]{32a^{11}b^{23}c^8}}$

Descomponemos el coeficiente de la cantidad subradical:

$$= \frac{2a^3bc^2}{\sqrt[7]{2^5a^{11}b^{23}c^8}}$$

Construimos la conjugada del denominador de tal forma que los exponentes de los factores, sumados con los de los factores de la cantidad subradical del denominador, den todos múltiplos de 7:

$$E = \sqrt[7]{2^2a^3b^5c^6}$$

Multiplcamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{2a^3bc^2\sqrt[7]{2^2a^3b^5c^6}}{\sqrt[7]{2^5a^{11}b^{23}c^8}\sqrt[7]{2^2a^3b^5c^6}}$$

Efectuando y simplificando:

$$= \frac{2a^3bc^2\sqrt[7]{2^2a^3b^5c^6}}{\sqrt[7]{2^7a^{14}b^{28}c^{14}}}$$

$$= \frac{2a^3bc^2\sqrt[7]{2^2a^3b^5c^6}}{2a^2b^4c^2}$$

$$= \boxed{\frac{a\sqrt[7]{4a^3b^5c^6}}{b^3}}$$

Ejemplo 60

Racionalizar el denominador: $\frac{3x^2 - 3y^2}{\sqrt[3]{x+y}}$

Conjugada del denominador:

$$E = \sqrt[3]{(x+y)^2}$$

Multiplcamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{(3x^2 - 3y^2)\sqrt[3]{(x+y)^2}}{\sqrt[3]{x+y}\sqrt[3]{(x+y)^2}}$$

Factorizando en el numerador y efectuando el producto del denominador:

$$= \frac{3(x+y)(x-y)\sqrt[3]{(x+y)^2}}{x+y}$$

$$= \boxed{3(x-y)\sqrt[3]{x^2 + 2xy + y^2}}$$

Ejercicio 22

Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones y simplificar:

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$

10) $\frac{14\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}$

18) $\frac{2a^3b^2c}{\sqrt[5]{144a^8b^{16}c^{17}}}$

2) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

11) $\frac{22\sqrt{3}}{3\sqrt{11}}$

19) $\frac{5a^2b^5c}{\sqrt[3]{625a^{39}b^{18}c^4}}$

3) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

12) $\frac{2x^2 - 2y^2}{\sqrt{x+y}}$

20) $\frac{18a^2 - 2b^2}{\sqrt[3]{3a+b}}$

4) $\frac{3}{2\sqrt{6}}$

13) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}}$

21) $\frac{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}{\sqrt[3]{a^2 + 2ab + b^2}}$

5) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

14) $\frac{2}{\sqrt[4]{4ab^3}}$

22) $\frac{x^2 + x - 6}{\sqrt[4]{x^2 + 6x + 9}}$

6) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$

15) $\frac{bc}{\sqrt[5]{16a^3bc^2}}$

23) $\frac{x^3 - 7x - 6}{\sqrt[4]{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}}$

7) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$

16) $\frac{6ab}{\sqrt[4]{72ab^3}}$

24) $\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 1}}$

8) $\frac{6}{5\sqrt{2}}$

17) $\frac{3abc}{\sqrt[5]{162ab^2c^3}}$

9) $\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$

B) Cuando el denominador es un suma algebraica de raíces cuadradas

Si el denominador es $a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}$, la conjugada es $E = a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d}$.

Si el denominador es $a\sqrt{b} \pm c$, la conjugada es $E = a\sqrt{b} \mp c$.

Si el denominador tiene más de dos términos, la racionalización se realiza mediante un proceso reiterativo, como se muestra en el Ejemplo 66.

Ejemplo 61

Racionalizar el denominador: $\frac{7+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-3}$

Conjugada del denominador: $E = 2\sqrt{5} + 3$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E:

$$= \frac{(7+\sqrt{5})(2\sqrt{5}+3)}{(2\sqrt{5}-3)(2\sqrt{5}+3)}$$

Efectuando:

$$= \frac{14\sqrt{5} + 21 + 2 \cdot 5 + 3\sqrt{5}}{4 \cdot 5 - 9}$$
$$= \boxed{\frac{17\sqrt{5} + 31}{11}}$$

Ejemplo 62

Racionalizar el denominador: $\frac{2\sqrt{14}}{4\sqrt{7} + 3\sqrt{2}}$

Conjugada del denominador:

$$E = 4\sqrt{7} - 3\sqrt{2}$$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{2\sqrt{14}(4\sqrt{7} - 3\sqrt{2})}{(4\sqrt{7} + 3\sqrt{2})(4\sqrt{7} - 3\sqrt{2})}$$

Efectuando:

$$= \frac{56\sqrt{2} - 12\sqrt{7}}{16 \cdot 7 - 9 \cdot 2}$$

$$= \frac{56\sqrt{2} - 12\sqrt{7}}{94}$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{28\sqrt{2} - 6\sqrt{7}}{47}}$$

Ejemplo 63

Racionalizar el denominador: $\frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}}$

Conjugada del denominador:

$$E = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+2}$$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})^2}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2})}$$

Efectuando:

$$= \frac{x+3+2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}{x+3-(x+2)}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$= \boxed{2x+5+2\sqrt{x^2+5x+6}}$$

Ejemplo 64

Racionalizar el denominador: $\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{3-\sqrt{5}}$

Conjugada del denominador: $E = 3 + \sqrt{5}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}$$

Introducimos el segundo factor del numerador en el radical y efectuamos el producto del denominador:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{(2+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^2}}{9-5} \\
 &= \frac{\sqrt{(2+\sqrt{5})(9+6\sqrt{5}+5)}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{(2+\sqrt{5})(14+6\sqrt{5})}}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{28+12\sqrt{5}+14\sqrt{5}+30}}{4} \\
 &= \boxed{\frac{\sqrt{58+26\sqrt{5}}}{4}}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 65

Racionalizar el denominador: $\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{4+\sqrt{3}}}$

Conjugada del denominador: $E = \sqrt{4-\sqrt{3}}$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}}}$$

Introducimos el primer factor del numerador en el radical y efectuamos el producto del denominador:

$$= \frac{\sqrt{(1+\sqrt{3})^2(4-\sqrt{3})}}{\sqrt{16-3}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1+2\sqrt{3}+3)(4-\sqrt{3})}}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}}{\sqrt{13}}$$

$$= \frac{\sqrt{16-4\sqrt{3}+8\sqrt{3}-6}}{\sqrt{13}}$$

Volvemos a multiplicar ambos términos de la fracción, esta vez por:

$$F = \sqrt{13}$$

$$= \frac{\sqrt{10+4\sqrt{3}}\sqrt{13}}{\sqrt{13}\sqrt{13}}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{130+52\sqrt{3}}}{13}}$$

Ejemplo 66

Racionalizar el denominador: $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$

Dado que el denominador tiene tres términos, el proceso de racionalización lo hacemos por partes. Agrupamos los dos primeros términos del denominador y multiplicamos por E :

$$E = [(\sqrt{3}+\sqrt{2})+1]$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})[(\sqrt{3}+\sqrt{2})+1]}{[(\sqrt{3}+\sqrt{2})-1][(\sqrt{3}+\sqrt{2})+1]}$$

$$= \frac{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2-1}$$

$$= \frac{5+2\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3+2\sqrt{6}+2-1}$$

$$= \frac{5+2\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4+2\sqrt{6}}$$

Sacamos factor común en el denominador (cosa que, de ser posible, es siempre muy conveniente hacer para trabajar con números más pequeños) y multiplicamos numerador y denominador por la conjugada F :

$$\begin{aligned}
 F &= 2 - \sqrt{6} \\
 &= \frac{(5 + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2})(2 - \sqrt{6})}{2(2 + \sqrt{6})(2 - \sqrt{6})} \\
 &= \frac{10 + 4\sqrt{6} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 12 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2(4 - 6)} \\
 &= \frac{-2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{-4} \\
 &= \boxed{\frac{2 + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 23

Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones y simplificar:

1) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

2) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

3) $\frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$

4) $\frac{2}{\sqrt{2} - 1}$

5) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$

6) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

7) $\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}$

8) $\frac{b - c}{\sqrt{ab} - \sqrt{ac}}$

9) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

10) $\frac{3\sqrt{2} + 1}{3\sqrt{2} - 1}$

11) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{5}}{5\sqrt{2} - \sqrt{5}}$

12) $\frac{4}{\sqrt{32} - 2\sqrt{2}}$

13) $\frac{9}{2\sqrt{27} + 4\sqrt{3}}$

14) $\frac{mn}{m\sqrt{n} - n\sqrt{m}}$

15) $\frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$

16) $\frac{5\sqrt{2x-1} + 10}{\sqrt{5x-1} - 2}$

17) $\frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a}}$

18) $\frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{x-a} - \sqrt{a-x}}$

- 19) $\frac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}{2+\sqrt{3}}$
- 20) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{21}}$
- 21) $\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$
- 22) $\frac{1}{\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$
- 23) $\frac{10-4\sqrt{3}}{\sqrt{37-12\sqrt{3}}}$
- 24) $\frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{4}-\sqrt{7}}$
- 25) $\frac{6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{14}-4\sqrt{6}}$
- 26) $\frac{1}{a-\sqrt{a^2-\sqrt{a}}}$
- 27) $\frac{a-1}{\sqrt{a+1+2\sqrt{a}}}$
- 28) $\frac{a^2-9}{\sqrt{a+3-2\sqrt{3a}}}$
- 29) $\frac{13+\sqrt{2}}{4-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
- 30) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+1}$
- 31) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
- 32) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$
- 33) $\frac{5+6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$
- 34) $\frac{12+6\sqrt{6}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{6}}$
- 35) $\frac{4}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
- 36) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$
- 37) $\frac{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}$
- 38) $\frac{3+\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3+\sqrt{6}+\sqrt{3}}$
- 39) $\frac{1+2\sqrt{35}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{11}}$
- 40) $\frac{4}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{6}-2}$
- 41) $\frac{16}{\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{3}-1}$
- 42) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-2}$
- 43) $\frac{15\sqrt{2}+15\sqrt{3}+5\sqrt{6}-\sqrt{30}+10}{2\sqrt{3}+3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}}$
- 44) $\frac{5\sqrt{15}-5\sqrt{10}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-5}{5\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1}$
- 45) $\frac{45}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{15}}$
- 46) $\frac{\sqrt{\frac{3}{7}}-\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{7}}+\sqrt{\frac{1}{3}}}$
- 47) $\frac{\sqrt{\frac{11}{7}}-\sqrt{\frac{7}{11}}}{\sqrt{\frac{1}{7}}+\sqrt{\frac{1}{11}}}$
- 48) $\frac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{120}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}$
- 49) $\frac{a-\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}}$

C) Cuando el denominador es una suma algebraica de radicales de índices superiores a 2

El cálculo de la conjugada para expresiones como $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ ó $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$, etc., es una aplicación de lo visto en la pág. 88 al estudiar los criterios de divisibilidad de $x^n \pm a^n$ entre $x \pm a$.

Utilizando, por ejemplo, el cociente notable (I), sabemos que

$$\frac{x^4 - y^4}{x - y} = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$$

que podemos también escribir así:

$$(x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = x^4 - y^4$$

Si hacemos ahora los siguientes cambios:

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$$y = \sqrt[n]{b}$$

la expresión anterior se transforma así:

$$(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) \underbrace{\left(\sqrt[n]{a^3} + \sqrt[n]{a^2b} + \sqrt[n]{ab^2} + \sqrt[n]{b^3} \right)}_E = a - b$$

En ella el segundo factor del miembro de la izquierda es la conjugada de la diferencia de radicales del primer factor, pues el producto es una expresión racional.

De la misma manera, efectuando un proceso análogo con el cociente notable (II), se obtiene:

$$(\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}) \underbrace{\left(\sqrt[n]{a^3} - \sqrt[n]{a^2b} + \sqrt[n]{ab^2} - \sqrt[n]{b^3} \right)}_E = a + b$$

expresión en la que el segundo factor es la conjugada de la suma de radicales del primer factor.

Dejamos al estudiante que realice este mismo proceso con los cocientes notables (I) y (III) para expresiones como $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$.

Como consecuencia de lo anterior, podemos establecer que

para $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

la conjugada es $E = \sqrt[n]{a^{n-1}} - \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} - \dots - \sqrt[n]{b^{n-1}}$

para $\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$

la conjugada es $E = \sqrt[n]{a^{n-1}} + \sqrt[n]{a^{n-2}b} + \sqrt[n]{a^{n-3}b^2} + \dots + \sqrt[n]{b^{n-1}}$

Téngase, además, en cuenta que

si n es impar	$\begin{cases} (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})E = a + b \\ (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})E = a - b \end{cases}$
si n es par	$\begin{cases} (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})E = a - b \\ (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b})E = a + b \end{cases}$

En el caso, por ejemplo, de $\sqrt[5]{a+b}$, la conjugada toma la siguiente forma:

$$E = \sqrt[5]{a^4} - b\sqrt[5]{a^3} + b^2\sqrt[5]{a^2} - b^3\sqrt[5]{a} + b^4$$

y el producto será: $(\sqrt[5]{a} + b)E = a + b^5$

Ejemplo 67

Racionalizar el denominador: $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$

Construimos la conjugada del denominador:

$$E = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$$

Multiplicamos ambos términos de la fracción por E :

$$= \frac{(a^2 - b^2)E}{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})E}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)E}{a - b}$$

Factorizamos el numerador para poder simplificar:

$$= \frac{(a + b)(a - b)E}{a - b}$$

$$= (a + b)E$$

$$= \boxed{(a + b)(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}$$

Ejemplo 68

Racionalizar el denominador: $\frac{x^2 - 14x - 32}{\sqrt[4]{x} + 2}$

Construimos la conjugada del denominador:

$$E = \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt[4]{x^2} + 4\sqrt[4]{x} - 8$$

Simplificando el radical del segundo término:

$$E = \sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 8$$

Multiplicamos numerador y denominador por E :

$$= \frac{(x^2 - 14x - 32)E}{(\sqrt[4]{x} + 2)E}$$

Factorizamos el numerador y efectuamos el producto del denominador:

$$= \frac{(x - 16)(x + 2)E}{x - 16}$$

$$= (x + 2)E$$

$$= \boxed{(x + 2)(\sqrt[4]{x^3} - 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} - 8)}$$

Ejemplo 69

Racionalizar el denominador: $\frac{5}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}}$

Construimos la conjugada del denominador:

$$E = \sqrt[3]{3^4} - \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + \sqrt[3]{3^2 \cdot 2^2} - \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} + \sqrt[3]{2^4}$$

$$E = \sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}$$

Racionalizando:

$$= \frac{5E}{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})E}$$

$$= \frac{5E}{3 + 2}$$

$$= E$$

$$= \boxed{\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{16}}$$

Ejemplo 70

Racionalizar el denominador: $\frac{a - b}{\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{a^2b}}$

Sacamos factor común en el denominador:

$$= \frac{a - b}{\sqrt[4]{a^2}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}$$

$$= \frac{a - b}{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}$$

La conjugada del primer factor del denominador es:

$$E = \sqrt{a}$$

La del segundo:

$$F = \sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{b^3}$$

Racionalizando:

$$= \frac{(a-b)EF}{\sqrt{a} \cdot E(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})F}$$

$$= \frac{(a-b)EF}{a(a-b)}$$

$$= \frac{EF}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{a^2b} + \sqrt[4]{ab^2} + \sqrt[4]{b^3})}{a}$$

Ejemplo 71

Racionalizar el denominador: $\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt[3]{b}}$

Transformamos los radicales del denominador en dos radicales equivalentes que tengan el mismo índice:

$$= \frac{a-b}{\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}}$$

Construimos la conjugada:

$$E = \sqrt[6]{a^{15}} - \sqrt[6]{a^{12}b^2} + \sqrt[6]{a^9b^4} - \sqrt[6]{a^6b^6} + \sqrt[6]{a^3b^8} - \sqrt[6]{b^{10}}$$

$$E = \sqrt{a^5} - \sqrt[3]{a^6b} + \sqrt[6]{a^9b^4} - ab + \sqrt[6]{a^3b^8} - \sqrt[3]{b^5}$$

$$E = a^2\sqrt{a} - a^2\sqrt[3]{b} + a\sqrt[6]{a^3b^4} - ab + b\sqrt[6]{a^3b^2} - b\sqrt[3]{b^2}$$

Racionalizando:

$$= \frac{(a-b)E}{(\sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2})E}$$

$$= \frac{(a-b)E}{a^3 - b^2}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2\sqrt{a} - a^2\sqrt[3]{b} + a\sqrt[6]{a^3b^4} - ab + b\sqrt[6]{a^3b^2} - b\sqrt[3]{b^2})}{a^3 - b^2}$$

Ejemplo 72

Racionalizar el denominador: $\frac{x^2 - x}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[6]{x^5}}$

Transformamos los radicales en dos radicales equivalentes de igual índice:

$$= \frac{x^2 - x}{\sqrt[6]{x^4} - \sqrt[6]{x^5}}$$

Sacamos factor común en el denominador:

$$= \frac{x^2 - x}{\sqrt[6]{x^4}(1 - \sqrt[6]{x})}$$

$$= \frac{x^2 - x}{\sqrt[3]{x^2}(1 - \sqrt[6]{x})}$$

La conjugada del primer factor del denominador es:

$$E = \sqrt[3]{x}$$

La del segundo:

$$F = 1 + \sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3} + \sqrt[6]{x^4} + \sqrt[6]{x^5}$$

$$F = 1 + \sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}$$

Racionalizando:

$$= \frac{(x^2 - x)EF}{\sqrt[3]{x^2}E(1 - \sqrt[6]{x})F}$$

$$= \frac{x(x-1)EF}{x(1-x)}$$

$$= -EF$$

$$= \boxed{-\sqrt[3]{x} \left(1 + \sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5} \right)}$$

Ejercicio 24

Racionalizar el denominador de las siguientes fracciones y simplificar:

1) $\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$

8) $\frac{1}{\sqrt[4]{a} - 2}$

2) $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$

9) $\frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{3}}$

3) $\frac{4}{\sqrt[4]{7} + \sqrt[4]{3}}$

10) $\frac{x^2 - 26x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$

4) $\frac{a+b}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$

11) $\frac{a^2 - 2a + 1}{\sqrt[6]{a} + 1}$

5) $\frac{a-b}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$

12) $\frac{7}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$

6) $\frac{2}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}}$

13) $\frac{m^2 + mn - 2n^2}{\sqrt[4]{a^2m} - \sqrt[4]{a^2n}}$

7) $\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2}$

14) $\frac{x-y}{\sqrt[4]{a^3x} - \sqrt[4]{a^3y}}$

$$\begin{aligned}
 15) & \frac{a-b}{\sqrt[4]{a^4b} + \sqrt[4]{a^3b^2}} \\
 16) & \frac{4x+2y}{\sqrt[3]{8x} + \sqrt[3]{4y}} \\
 17) & \frac{1}{\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{y}} \\
 18) & \frac{x^2 - y^2}{\sqrt[5]{x^2y} - \sqrt[5]{y^3}} \\
 19) & \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt[3]{b}} \\
 20) & \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{2}} \\
 21) & \frac{b-a}{\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}} \\
 22) & \frac{a^2 + a}{\sqrt{a} - \sqrt[6]{a}} \\
 23) & \frac{2}{\sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{2}} \\
 24) & \frac{17}{\sqrt[3]{3} + \sqrt{2}} \\
 25) & \frac{x}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}
 \end{aligned}$$

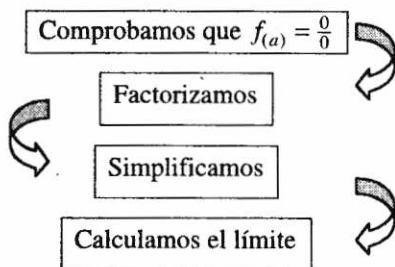
$$\begin{aligned}
 26) & \frac{x^2 - x}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}} \\
 27) & \frac{14}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}} \\
 28) & \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}} \\
 29) & \frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}} \\
 30) & \frac{5}{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4}} \\
 31) & \frac{3}{\sqrt[4]{125} - \sqrt[4]{50} + \sqrt[4]{20} - \sqrt[4]{8}} \\
 32) & \frac{x^3 - y^3}{\sqrt[5]{x^4} - \sqrt[5]{x^3y} + \sqrt[5]{x^2y^2} - \sqrt[5]{xy^3} + \sqrt[5]{y^4}} \\
 33) & \frac{2x-2}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} \\
 34) & \frac{1}{\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{7}} \\
 35) & \frac{17}{2\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{3}}
 \end{aligned}$$

Límites de funciones irracionales (Segundo tipo)

El procedimiento que hemos seguido en el cálculo de los límites que se estudian en este capítulo se pueden resumir así:

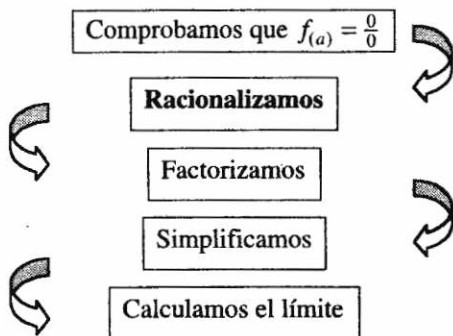
- 1) Comprobamos que se trata de un límite con la indeterminación $\frac{0}{0}$.
- 2) Aislamos, factorizando, el factor que origina la indeterminación.
- 3) Buscamos un límite equivalente que no tenga esa indeterminación.
- 4) Sustituimos la variable por el valor al que tiende para calcular el límite.

Esquemáticamente:



En los casos que siguen, dado que la variable aparece afectada por el símbolo de radical, el segundo paso, la factorización, no puede ser ejecutado si no racionalizamos antes la expresión irracional. Tendremos, pues, que racionalizar el numerador, o el denominador, o ambos.

El esquema del procedimiento será éste:



Ejemplo 73

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^4 - x^3 + x} - \sqrt{x+8}}{3x^3 - 8x^2 + 5x - 2}$

Comprobamos que

$$f(2) = \frac{0}{0}$$

(Indeterminación)

No podemos aislar en el numerador el factor $x - 2$, que es el que produce la indeterminación. Racionalizamos, pues, el numerador multiplicando ambos términos de la fracción por la conjugada E :

$$\begin{aligned}
 E &= \sqrt{x^4 - x^3 + x} + \sqrt{x+8} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^4 - x^3 + x} - \sqrt{x+8})E}{(3x^3 - 8x^2 + 5x - 2)E} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 + x - x - 8}{(3x^3 - 8x^2 + 5x - 2)E} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - x^3 - 8}{(3x^3 - 8x^2 + 5x - 2)E}
 \end{aligned}$$

Aislamos, mediante divisiones sintéticas, el factor $x - 2$ en el numerador y en el denominador:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^3 + x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(3x^2 - 2x + 1)E}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 + 2x + 4}{(3x^2 - 2x + 1)(\sqrt{x^4 - x^3 + x + \sqrt{x+8}})} \\
&= \frac{8 + 4 + 4 + 4}{(12 - 4 + 1)(\sqrt{16 - 8 + 2 + \sqrt{2+8}})} \\
&= \frac{20}{9 \cdot 2\sqrt{10}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{9}}
\end{aligned}$$

Ejemplo 74

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - x - 20}{\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[4]{4x-4}}$

Comprobamos que $f(5) = \frac{0}{0}$ (Indeterminación)

Racionalizamos el denominador para poder aislar el factor $x - 5$ que es el que produce la indeterminación.

Construimos, para eso, la conjugada:

$$E = \sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{(3x+1)^2(4x-4)} + \sqrt[4]{(3x+1)(4x-4)^2} + \sqrt[4]{(4x-4)^3}$$

Multiplicamos numerador y denominador por E :

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - x - 20)E}{(\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[4]{4x-4})E}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - x - 20)E}{3x+1 - 4x+4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x^2 - x - 20)E}{-x+5}$$

Factorizamos el numerador:

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+4)E}{-(x-5)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \left[-(x+4) \left(\sqrt[4]{(3x+1)^3} + \sqrt[4]{(3x+1)^2(4x-4)} + \sqrt[4]{(3x+1)(4x-4)^2} + \sqrt[4]{(4x-4)^3} \right) \right]$$

$$= -(5+4) \left(\sqrt[4]{16^3} + \sqrt[4]{16^3} + \sqrt[4]{16^3} + \sqrt[4]{16^3} \right)$$

$$= -9 \cdot (8+8+8+8) = \boxed{-288}$$

Ejemplo 75

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - \sqrt[3]{5x - 2}}{\sqrt{3x + 3} - \sqrt{x^2 + 5}}$

Comprobamos que

$$f_{(2)} = \frac{0}{0}$$

(Indeterminación)

En esta oportunidad tenemos que racionalizar ambos términos de la fracción para poder aislar el factor $x - 2$.

Construimos la conjugada del numerador:

$$E = \sqrt[3]{(x^2 + 4)^2} + \sqrt[3]{(x^2 + 4)(5x - 2)} + \sqrt[3]{(5x - 2)^2}$$

y la del denominador:

$$F = \sqrt{3x + 3} + \sqrt{x^2 + 5}$$

Multiplicamos numerador y denominador por ambas conjugadas:

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[3]{x^2 + 4} - \sqrt[3]{5x - 2})EF}{(\sqrt{3x + 3} - \sqrt{x^2 + 5})EF}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4 - 5x + 2)F}{(3x + 3 - x^2 - 5)E}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)F}{(-x^2 + 3x - 2)E}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 5x + 6)F}{-(x^2 - 3x + 2)E}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 3)(x - 2)F}{-(x - 2)(x - 1)E}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 3)(\sqrt{3x + 3} + \sqrt{x^2 + 5})}{-(x - 1)(\sqrt[3]{(x^2 + 4)^2} + \sqrt[3]{(x^2 + 4)(5x - 2)} + \sqrt[3]{(5x - 2)^2})}$$

$$= \frac{(-1)(\sqrt{9} + \sqrt{9})}{-(1)(\sqrt[3]{8^2} + \sqrt[3]{8^2} + \sqrt[3]{8^2})}$$

$$= \frac{6}{4 + 4 + 4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Ejercicio 25

Calcular los siguientes límites:

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{2+x}}{2-x}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - \sqrt{13+x}}{3-x}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16-x^2}{2-\sqrt{x}}$
- 5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{8-2x} - \sqrt{x+2}}{x-2}$
- 6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+7}}{\sqrt{7x+2} - 4}$
- 7) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{5x+4}}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{5x-1}}$
- 8) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{10+x} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+8}}$
- 9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x-2}}{\sqrt{3x-1} - \sqrt{11-3x}}$
- 10) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-1}}{\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+7}}$
- 11) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{3x+2}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}$
- 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-1}}{x^5 + 7x^4 - 6x^2 + 3x - 5}$
- 13) $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{\sqrt{x^2+a^2} - \sqrt{a^2-x}}{x+a}$
- 14) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{24-3x}{\sqrt[3]{x}-2}$
- 15) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x + 4}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{2x-1}}$
- 16) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{7x+1} - 2}{x^4 + 5x^3 - 3x^2 - x - 2}$
- 17) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{x^4} + x^3 + 8 - 2}{x^2 - 3x - 10}$
- 18) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{5x+6} - \sqrt[4]{7x+2}}{x^3 - 5x^2 + 5x + 2}$
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{3x+5}}$
- 20) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x + 1 - \sqrt{x^2+7}}{\sqrt{4-x} - \sqrt{x+10}}$
- 21) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt[3]{2x+7} - 2x - 1}{1-2x}$
- 22) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{5x-6} - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{2x+4}}$
- 23) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{7x+2} - \sqrt[4]{5x+6}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-1}}$
- 24) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 7x^4 + 3x^2 + 3}{\sqrt[3]{5x+1} - \sqrt[3]{7x-1}}$
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{b+x} - \sqrt[3]{b-x^2-x^3}}{\sqrt{b+x} - \sqrt{b-x^2}}$
- 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[4]{3x^2+2} - \sqrt[4]{4x+2}}$
- 27) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[4]{5x^2+12x} - \sqrt[4]{2x^3+27}}{\sqrt[3]{2x^2+1} - \sqrt[3]{5x+4}}$
- 28) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - \sqrt[3]{5x-2}}{\sqrt[4]{3x+1} - \sqrt[4]{5x-3}}$
- 29) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{5x^2+7} - 3}{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x+2}}$
- 30) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt[3]{7-x}}{\sqrt[4]{4-5x} - \sqrt[4]{x+10}}$
- 31) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{x+1}}{x}$
- 32) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{7x+2} - \sqrt[4]{9x-2}}{\sqrt{x+7} - 3}$
- 33) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{5x+3}}{\sqrt[5]{13x+19} - \sqrt[5]{20x+12}}$
- 34) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{4+x} - \sqrt[4]{4-x^2+x^3}}{\sqrt{3x+2} - \sqrt{x^2+2}}$

Método de los Coeficientes Indeterminados

Es un método utilizado para hallar los coeficientes de una o varias expresiones algebraicas (de grado y forma determinadas), que, sometidas a ciertas operaciones, deben dar un resultado conocido. El proceso consiste en representar dichos coeficientes por letras y posteriormente calcularlos mediante la aplicación de ciertos principios. Generalmente lleva a la construcción de un sistema de ecuaciones que, una vez resuelto, nos permite conocer el valor exacto de esos coeficientes indeterminados.

Dos de los principios más frecuentemente utilizados son los que siguen:

1) El primero ya fue enunciado al comienzo del capítulo y es el que se refiere a la igualdad de polinomios:

Dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son iguales o equivalentes sólo si los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales:

$$\text{Sean } P_{(x)} \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$\text{y } Q_{(x)} \equiv b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n$$

$$P_{(x)} = Q_{(x)} \leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n \quad (\text{I})$$

2) El segundo es un corolario del primero:

Si dos polinomios $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son iguales, toman igual valor numérico para un mismo valor de la variable:

$$P_{(x)} = Q_{(x)} \rightarrow P_{(k)} = Q_{(k)} \quad (\text{II})$$

Veamos la aplicación de estos principios en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 76

¿Cuáles deben ser los valores de m y n para que $M_{(x)}$ y $N_{(x)}$ sean polinomios equivalentes?

$$M_{(x)} \equiv 5x^3 + (m+n)x^2 + (m+6n)x - 3$$

$$N_{(x)} \equiv 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$$

Para que $M_{(x)}$ y $N_{(x)}$ sean polinomios equivalentes deben ser iguales los coeficientes de los términos del mismo grado (Aplicación del principio I).

Ya son iguales los coeficientes de x^3 y los términos independientes. Deben serlo también los coeficientes de x^2 y de x . Por tanto:

$$\begin{cases} m+n = -7 \\ m+6n = 3 \end{cases}$$

La solución del sistema planteado es:

$$\begin{cases} m = -9 \\ n = 2 \end{cases}$$

Ejemplo 77

Determinar A , B , C y D , sabiendo que

$$M_{(x)} \equiv A(x-1)(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)(x-2) + D(x^2+x+1)(x-2)$$

$$\text{y } N_{(x)} \equiv 8x^3 - 14x^2 + 8x - 17 \text{ son polinomios iguales.}$$

Este ejemplo, que puede ser resuelto si se quiere como el anterior, se puede resolver más fácilmente con la aplicación del principio II.

Si $M_{(x)}$ y $N_{(x)}$ son polinomios iguales, podemos escribir:

$$A(x-1)(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1)(x-2) + D(x^2+x+1)(x-2) = 8x^3 - 14x^2 + 8x - 17$$

Por el principio II, si los polinomios son iguales, toman igual valor numérico para un mismo valor de la variable.

Podemos, por tanto, sustituir la variable por cualquier valor arbitrario y, cada vez que lo hagamos, obtendremos una ecuación con las incógnitas A , B , C y D . Si construimos de esta forma cuatro ecuaciones, podemos formar un sistema y hallar los valores de esas incógnitas.

Sin embargo, si sustituimos la variable por valores que anulen algún término del primer miembro, el trabajo se simplifica. Por ejemplo, para $x = 1$ se anulan los dos primeros términos y se puede obtener de inmediato el valor de D :

Para $x = 1$

$$A(0)(3) + (B+C)(0)(-1) + D(3)(-1) = 8 - 14 + 8 - 17$$

$$-3D = -15$$

$$D = 5$$

Si hacemos $x = 2$, se anulan el segundo y el tercer término y se obtiene el valor de A :

Para $x = 2$

$$A(1)(7) + (2B+C)(1)(0) + D(7)(0) = 64 - 56 + 16 - 17$$

$$7A = 7$$

$$A = 1$$

Para obtener B y C sustituimos la variable por otros del valores. Uno, muy conveniente siempre, es $x = 0$:

Para $x = 0$

$$A(-1)(1) + C(-1)(-2) + D(1)(-2) = -17$$

Reemplazamos los valores ya conocidos de A y D :

$$-1 + 2C - 10 = -17$$

$$2C = -6$$

$$C = -3$$

Para hallar B hacemos una última sustitución, por ejemplo, $x = -1$

Para $x = -1$

$$A(-2)(1) + (-B + C)(-2)(-3) + D(1)(-3) = -8 - 14 - 8 - 17$$

$$-2A - 6B + 6C - 3D = -47$$

Reemplazando valores conocidos:

$$-2 - 6B - 18 - 15 = -47$$

$$-6B = -12$$

$$B = 2$$

Ejercicio 26

¿Qué condiciones deben cumplirse en cada caso para que $M_{(x)}$ y $N_{(x)}$ sean polinomios equivalentes?

- 1)
$$\begin{cases} M_{(x)} \equiv 3x^3 - (m+n)x^2 + (m+2n)x - 2 \\ N_{(x)} \equiv 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2 \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} M_{(x)} \equiv 5x^4 + (2q+5r)x^3 + (q+2r+p)x^2 + (4r+q+2p)x + 5 \\ N_{(x)} \equiv 5x^4 - 10x^3 + x^2 + 2x + 5 \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} M_{(x)} \equiv (m+n)x^3 - 5x^2 + 3x - 4 \\ N_{(x)} \equiv x^3 + (n-m^2)x^2 + 3x - 4 \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} M_{(x)} \equiv x^3 + (n-m)x^2 + (m-4n)x + 6 \\ N_{(x)} \equiv (x+1)(x-2)(x-3) \end{cases}$$
- 5)
$$\begin{cases} M_{(x)} \equiv x^3 + (4m-3n)x^2 + (3m-3n)x - 2m - p - n \\ N_{(x)} \equiv (x-1)(x+5)(x+p) \end{cases}$$
- 6)
$$\begin{cases} M_{(x)} \equiv x^3 + px - 2p - 20 \\ N_{(x)} \equiv x^3 + (a+b+1)x^2 + (a+b+ab)x + ab \end{cases}$$

- $$\begin{aligned}
 7) \quad & \begin{cases} M_{(x)} \equiv (p+3)x^3 + (2p+1)x^2 - 1 \\ N_{(x)} \equiv abx^3 + (b-a+ab)x^2 + (b-a-1)x - 1 \end{cases} \\
 8) \quad & \begin{cases} M_{(x)} \equiv A(x^2+1) + Bx^2 + Cx(x^2+1) \\ N_{(x)} \equiv 1 \end{cases} \\
 9) \quad & \begin{cases} M_{(x)} \equiv (Ax+B)(x-1) + C(x^2+1) \\ N_{(x)} \equiv 2x-3 \end{cases} \\
 10) \quad & \begin{cases} M_{(x)} \equiv Ax(x-1) + B(x-1)(x+2) + Cx(x+2) \\ N_{(x)} \equiv 3x^2 - 5x + 3 \end{cases} \\
 11) \quad & \begin{cases} M_{(x)} \equiv (Ax+B)(x^2-4x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1) \\ N_{(x)} \equiv 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \end{cases} \\
 12) \quad & \begin{cases} M_{(x)} \equiv 4x^3 + (2m-n)x^2 + 11x + 1 \\ N_{(x)} \equiv 4x^3 + 6x^2 + (n^2-m)x + 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Algunas aplicaciones del Método de los Coeficientes Indeterminados

Aprenderemos a utilizar el Método de los Coeficientes Indeterminados a través de algunas aplicaciones prácticas. Las primeras (dividir polinomios, hallar la raíz de un polinomio) tienen como única finalidad la de familiarizarnos con el método, pues existen formas mucho más prácticas para realizar esas operaciones. En cambio dedicaremos mayor atención a la aplicación del Método de los Coeficientes Indeterminados a la separación de fracciones algebraicas en fracciones simples.

A) División de polinomios

Es conveniente, antes de pasar a los ejemplos ilustrativos, releer el Cuadro-resumen que aparece en la pág. 10.

Ejemplo 78

Dividir por el Método de los Coeficientes Indeterminados:

$$D_{(x)} \equiv x^5 + 11x^4 + 28x^3 - 7x^2 - 5x - 3 \quad \text{entre}$$

$$d_{(x)} \equiv x^3 + 7x^2 + 2x - 1$$

La tarea consiste en determinar $Q_{(x)}$ y $R_{(x)}$ (Cociente y Residuo).

Del cociente sólo sabemos que es una expresión de segundo grado y que el coeficiente del primer término es 1. Representando con letras los coeficientes desconocidos de los otros términos, el cociente toma esta forma:

$$Q_{(x)} \equiv x^2 + Ax + B$$

Del residuo sabemos que, de existir, es una expresión cuyo grado no puede ser mayor que 2. Como sus coeficientes son desconocidos, los representamos con letras:

$$R_{(x)} \equiv Cx^2 + Dx + E$$

Por la identidad fundamental de la división, podemos escribir:

$$D_{(x)} = d_{(x)} \cdot Q_{(x)} + R_{(x)}$$

Sustituyendo:

$$x^5 + 11x^4 + 28x^3 - 7x^2 - 5x - 3 = (x^3 + 7x^2 + 2x - 1)(x^2 + Ax + B) + Cx^2 + Dx + E \quad (I)$$

Trabajaremos en el segundo miembro multiplicando, reduciendo términos semejantes y sacando factor común en cada grupo:

$$\begin{aligned} &= x^5 + Ax^4 + Bx^3 + 7x^4 + 7Ax^3 + 7Bx^2 + 2x^3 + 2Ax^2 + 2Bx - x^2 - Ax - B + Cx^2 + Dx + E \\ &= x^5 + (A+7)x^4 + (B+7A+2)x^3 + (7B+2A-1+C)x^2 + (2B-A+D)x - B + E \end{aligned}$$

Con lo que la ecuación (I) queda así:

$$\begin{aligned} x^5 + 11x^4 + 28x^3 - 7x^2 - 5x - 3 &= \\ &= x^5 + (A+7)x^4 + (B+7A+2)x^3 + (7B+2A-1+C)x^2 + (2B-A+D)x - B + E \end{aligned}$$

Aplicando ahora el principio de igualdad de polinomios, podemos igualar los coeficientes de los términos del mismo grado:

En el término de x^4 : $A + 7 = 11$

$A = 4$

En el término de x^3 : $B + 7A + 2 = 28$

Reemplazando el valor conocido de A:

$$B + 7A + 2 = 28$$

$B = -2$

En el término de x^2 :

$$7B + 2A - 1 + C = -7$$

Reemplazando valores conocidos:

$$7(-2) + 2 \cdot 4 - 1 + C = -7$$

$$C = 0$$

En el término de x :

$$2B - A + D = -5$$

$$2(-2) - 4 + D = -5$$

$$D = 3$$

En el término independiente:

$$-B + E = -3$$

$$2 + E = -3$$

$$E = -5$$

Sustituyendo los valores ya conocidos de los coeficientes indeterminados, tenemos, en definitiva, que:

$$\begin{aligned} Q_{(x)} &= x^2 + 4x - 2 \\ R_{(x)} &= 3x - 5 \end{aligned}$$

Ejercicio 27

Hallar por el Método de los Coeficientes Indeterminados el cociente y el residuo de dividir $D_{(x)}$ entre $d_{(x)}$:

- 1)
$$\begin{cases} D_{(x)} \equiv x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6 \\ d_{(x)} \equiv x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} D_{(x)} \equiv x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 9x - 4 \\ d_{(x)} \equiv x^2 + 2x - 2 \end{cases}$$
- 3)
$$\begin{cases} D_{(x)} \equiv x^6 + 2x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 2x + 2 \\ d_{(x)} \equiv x^3 + 2x^2 + 4x + 1 \end{cases}$$
- 4)
$$\begin{cases} D_{(x)} \equiv x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1 \\ d_{(x)} \equiv x^3 - 1 \end{cases}$$
- 5)
$$\begin{cases} D_{(x)} \equiv 3x^6 + x^4 + 7x^3 + 3 \\ d_{(x)} \equiv 3x^3 + x + 1 \end{cases}$$

B) Raíz de un polinomio

Recordemos algunos aspectos elementales referentes a radicación de polinomios:

Raíz n -sima de un polinomio $P_{(x)}$ es otro polinomio $Q_{(x)}$ que, elevado al exponente n , nos da el primero:

$$\sqrt[n]{P_{(x)}} = Q_{(x)} \quad \text{si} \quad P_{(x)} = [Q_{(x)}]^n$$

El grado de $Q_{(x)}$ será igual al grado de $P_{(x)}$ dividido entre n .

Todo esto es cierto si $P_{(x)}$ tiene raíz exacta. En caso contrario, existirá un residuo $R_{(x)}$. Si restamos de $P_{(x)}$ este residuo, la raíz será exacta y tendremos que

$$\sqrt[n]{P_{(x)} - R_{(x)}} = Q_{(x)}$$

Por tanto

$$P_{(x)} - R_{(x)} = [Q_{(x)}]^n$$

y, finalmente:

$$P_{(x)} = [Q_{(x)}]^n + R_{(x)} \quad \text{(I)}$$

El coeficiente del primer término de $Q_{(x)}$ es igual a la raíz n -sima del coeficiente del primer término de $P_{(x)}$.

Nota: Si la raíz buscada es de índice par, existirán dos expresiones, $Q_{(x)}$ y $-Q_{(x)}$, que, elevadas al índice n nos darán $P_{(x)}$. Por tanto, si n es par, la relación (I) se transforma así:

$$P_{(x)} = [\pm Q_{(x)}]^n + R_{(x)} \quad \text{(II)}$$

El máximo grado que puede alcanzar $R_{(x)}$, de existir, es igual a una unidad menos que el grado de $P_{(x)}$ menos el grado de $Q_{(x)}$.

$$\text{Máximo grado de } R_{(x)} = \text{Grado de } P_{(x)} - \text{grado de } Q_{(x)} - 1 \quad \text{(III)}$$

Utilizaremos las relaciones (I) y (II) en el planteamiento de los ejercicios que siguen.

Ejemplo 79

$$\text{Calcular: } \sqrt{x^6 - 6x^5 + 19x^4 - 32x^3 + 21x^2 + 1}$$

Llamando $P_{(x)}$ a la cantidad subradical tenemos (aplicando II):

$$P_{(x)} = [\pm Q_{(x)}]^n + R_{(x)} \quad \text{(I)}$$

El grado de $Q_{(x)}$ será $6 \div 2 = 3$ y el primer coeficiente será 1

Dando a los demás términos coeficientes indeterminados, tenemos:

$$Q_{(x)} = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

$$[\pm Q(x)]^2 = x^6 + 2Ax^5 + (A^2 + 2B)x^4 + (2AB + 2C)x^3 + (B^2 + 2AC)x^2 + 2BCx + C^2$$

El máximo grado que puede alcanzar, de existir, el residuo es (aplicando III):
 $6 - 3 - 1 = 2$.

Dando a sus términos coeficientes indeterminados, el residuo será:

$$R(x) = Dx^2 + Ex + F$$

Sustituyendo en (1):

$$\begin{aligned} x^6 - 6x^5 + 19x^4 - 32x^3 + 21x^2 + 1 &= \\ = x^6 + 2Ax^5 + (A^2 + 2B)x^4 + (2AB + 2C)x^3 + (B^2 + 2AC)x^2 + 2BCx + C^2 + Dx^2 + Ex + F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^6 - 6x^5 + 19x^4 - 32x^3 + 21x^2 + 1 &= \\ = x^6 + 2Ax^5 + (A^2 + 2B)x^4 + (2AB + 2C)x^3 + (B^2 + 2AC + D)x^2 + (2BC + E)x + C^2 + F \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado:

En el término de x^5 : $2A = -6$

$$A = -3$$

En el término de x^4 : $A^2 + 2B = 19$

$$9 + 2B = 19$$

$$B = 5$$

En el término de x^3 : $2AB + 2C = -32$

$$-30 + 2C = -32$$

$$C = -1$$

En el término de x^2 : $B^2 + 2AC + D = 21$

$$25 + 6 + D = 21$$

$$D = -10$$

En el término de x : $2BC + E = 0$

$$-10 + E = 0$$

$$E = 10$$

En el término independiente:

$$C^2 + F = 1$$

$$1 + F = 1$$

$$F = 0$$

Sustituyendo en (1) tendremos, en definitiva:

$$P_{(x)} = \left[\pm(x^3 - 3x^2 + 5x - 1) \right]^2 - 10x^2 + 10x$$

Ejemplo 80

Calcular: $\sqrt[3]{x^6 + 9x^5 + 21x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 36x - 8}$

Llamando $P_{(x)}$ a la cantidad subradical y aplicando (I):

$$P_{(x)} = [Q_{(x)}]^3 + R_{(x)} \quad (1)$$

El grado de $Q_{(x)}$ será $6 \div 3 = 2$ y el coeficiente del primer término será 1. Dando a los demás términos coeficientes indeterminados, tenemos:

$$Q_{(x)} = x^2 + Ax + B$$

y

$$[Q_{(x)}]^3 = x^6 + 3Ax^5 + (3A^2 + 3B)x^4 + (A^3 + 6AB)x^3 + (3A^2B + 3B^2)x^2 + 3AB^2x + B^3$$

El máximo grado del residuo, en caso de existir, será (aplicando III): $6 - 2 - 1 = 3$. Dando a sus términos coeficientes indeterminados:

$$R_{(x)} = Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

Sustituyendo en (1) y reduciendo términos semejantes, tendremos en definitiva:

$$\begin{aligned} & x^6 + 9x^5 + 21x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 36x - 8 = \\ & x^6 + 3Ax^5 + (3A^2 + 3B)x^4 + (A^3 + 6AB + C)x^3 + (3A^2B + 3B^2 + D)x^2 + (3AB^2 + E)x + B^3 + F \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes de los términos de igual grado:

En el término de x^5 :

$$3A = 9$$

$$A = 3$$

En el término de x^4 :

$$3A^2 + 3B = 21$$

$$27 + 3B = 21$$

$$B = -2$$

En el término de x^3 :

$$2AB + 2C = -32$$

$$A^3 + 6AB + C = -4$$

$$27 - 36 + C = -4$$

$$C = 5$$

En el término de x^2 :

$$3A^2B + 3B^2 + D = -22$$

$$-54 + 12 + D = -22$$

$$D = 20$$

En el término de x :

$$3AB^2 + E = 36$$

$$36 + E = 36$$

$$E = 0$$

En el término independiente:

$$B^3 + F = -8$$

$$-8 + F = -8$$

$$F = 0$$

En definitiva:

$$P_{(x)} = (x^2 + 3x - 2)^3 + 5x^3 + 20x^2$$

Ejercicio 28

Calcular las siguientes raíces por el Método de los Coeficientes Indeterminados:

1) $\sqrt{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 3x + 5}$

2) $\sqrt{4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 6x + 9}$

3) $\sqrt{9x^4 - 24x^3 + 28x^2 - 6x + 1}$

4) $\sqrt{x^6 + 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6}$

5) $\sqrt{x^6 + 2x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + 1}$

6) $\sqrt[3]{x^6 - 3x^5 + 6x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 5x + 1}$

7) $\sqrt[3]{x^6 - 3x^5 - 6x^4 + 17x^3 + 27x^2 - 27x - 27}$

8) $\sqrt{(x-1)x(x+1)(x+2)+1}$

C) Separación de fracciones algebraicas en fracciones simples.

La expresión $\frac{P_{(x)}}{D_{(x)}}$,

en la que $P_{(x)}$ y $D_{(x)}$ son polinomios, es una **fracción algebraica racional**. $P_{(x)}$ es el **numerador** y $D_{(x)}$ el **denominador** de dicha fracción.

La fracción algebraica $\frac{P_{(x)}}{D_{(x)}}$

se llama **propia** si el grado de $D_{(x)}$ es mayor que el grado de $P_{(x)}$. Se llama **impropia** en el caso contrario.

Llamaremos **factor lineal** a toda expresión en la forma $ax + b$, siendo a y b números reales ($a \neq 0$).

Llamaremos **factor cuadrático irreducible** a toda expresión en la forma $ax^2 + bx + c$, siendo a , b y c números reales que satisfacen la desigualdad $b^2 < 4ac$

Un factor lineal o un factor cuadrático pueden estar elevados a un exponente n sin dejar de ser tales. Por ejemplo, $(3x - 2)^5$ sigue siendo un factor lineal y $(x^2 + x + 1)^3$ sigue siendo un factor cuadrático irreducible.

La separación en fracciones simples de una fracción algebraica sigue las siguientes normas:

1) A cada factor lineal $ax + b$ que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde una fracción simple de la forma $\frac{A}{ax + b}$, en donde $A \neq 0$ es una constante.

Ejemplo:

$$\frac{P_{(x)}}{(ax + b)(cx + d)(mx + n)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{cx + d} + \frac{C}{mx + n}$$

2) A cada factor lineal $ax + b$ que aparezca k veces como factor del denominador, corresponde la suma de k fracciones simples cuyos denominadores serán el factor $ax + b$ elevado sucesivamente a los exponentes 1, 2, ..., $k-1$, k .

Ejemplo:

$$\frac{P_{(x)}}{(ax + b)^k (cx + d)} = \frac{A}{ax + b} + \frac{B}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{M}{(ax + b)^{k-1}} + \frac{N}{(ax + b)^k} + \frac{P}{cx + d}$$

3) A cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ que aparezca una sola vez como factor del denominador, corresponde una fracción simple de la forma $\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, en donde A y B son constantes no simultáneamente nulas.

Ejemplo:

$$\frac{P_{(x)}}{(ax^2 + bx + c)(mx^2 + nx + p)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{mx^2 + nx + p}$$

4) A cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$ que aparezca k veces como factor del denominador, corresponde la suma de k fracciones simples cuyos denominadores serán el factor $ax^2 + bx + c$ elevado sucesivamente a los exponentes $1, 2, \dots, k-1, k$.

Ejemplo:

$$\frac{P_{(x)}}{(ax^2 + bx + c)^k} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^{k-1}} + \frac{Px + Q}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

En esta expresión, $A, B, C, D, \dots, M, N, P$ y Q son constantes y P y Q no son simultáneamente nulas.

5) Si la fracción algebraica dada es impropia, debe primero efectuarse la división teniendo en cuenta que

$$\frac{P_{(x)}}{D_{(x)}} = Q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{D_{(x)}}$$

con lo que se transforma la fracción impropia original en la suma de un polinomio $Q_{(x)}$ y una fracción propia $\frac{R_{(x)}}{D_{(x)}}$, fracción ésta última que puede ser separada en fracciones simples.

6) El caso especial de la fracción algebraica $\frac{P_{(x)}}{(ax + b)^k}$ en la que el denominador es un único factor lineal repetido k veces, se separa más fácilmente en fracciones simples (aun en el caso de fracciones impropias) utilizando el método de Horner, tal como se muestra en los ejemplos 86 y 87.

Nota: Para hallar el valor de los coeficientes indeterminados A, B, C, D , etc., puede aplicarse indistintamente cualquiera de los dos principios enunciados en la pág. 109. Por su mayor practicidad, siempre que podamos utilizaremos el segundo.

Ejemplo 81

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples: $f_{(x)} = \frac{2x^2 + 18x + 16}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$

Factorizamos, utilizando Ruffini, el denominador:

	1	4	1	-6
1	1	5	6	6
	1	5	6	10
-2		-2	-6	
	1	3	10	
-3		-3		
	1	10		

Tenemos, pues, que

$$f_{(x)} = \frac{2x^2 + 18x + 16}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

El denominador contiene sólo factores lineales. La descomposición en factores simples será de la forma:

$$f_{(x)} = \frac{2x^2 + 18x + 16}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \quad (1)$$

Sacando mínimo común denominador en el segundo miembro:

$$\frac{2x^2 + 18x + 16}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x+3)}$$

Para que dos fracciones de igual denominador sean equivalentes tienen que ser también iguales sus numeradores. Por tanto:

$$2x^2 + 18x + 16 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

Damos valores a la variable x para obtener A , B , y C (es conveniente utilizar las raíces de los factores lineales, pues al hacerlo se anulan siempre algunos términos).

Para $x = 1$

$$2 + 18 + 16 = A(3)(4)$$

$$36 = 12A$$

$$A = 3$$

Para $x = -2$

$$8 - 36 + 16 = B(-3)(1)$$

$$-12 = -3B$$

$$B = 4$$

Para $x = -3$

$$18 - 54 + 16 = C(-4)(-1)$$

$$-20 = 4C$$

$$C = -5$$

Sustituyendo en (1) los valores hallados obtenemos $f_{(x)}$ separado en fracciones simples:

$$f_{(x)} = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{x+3}$$

Ejemplo 82

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples: $f_{(x)} = \frac{-2x^3 - 19x^2 - 18x + 7}{x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 16x + 5}$

Factorizamos el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 8 & 18 & 16 & 5 \\ -1 & & -1 & -7 & -11 & -5 \\ \hline & 1 & 7 & 11 & 5 & \underline{0} \\ -1 & & -1 & -6 & -5 & \\ \hline & 1 & 6 & 5 & \underline{0} & \\ -1 & & -1 & -5 & & \\ \hline & 1 & 5 & \underline{0} & & \\ -5 & & -5 & & & \\ \hline & 1 & \underline{0} & & & \end{array}$$

La fracción es, pues:

$$f_{(x)} = \frac{-2x^3 - 19x^2 - 18x + 7}{(x+1)^3(x+5)}$$

La separación en fracciones simples será de la forma

$$f_{(x)} = \frac{-2x^3 - 19x^2 - 18x + 7}{(x+1)^3(x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x+5}$$

Sacando mínimo común denominador en el segundo miembro:

$$\frac{-2x^3 - 19x^2 - 18x + 7}{(x+1)^3(x+5)} = \frac{A(x+1)^2(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+5) + D(x+1)^3}{(x+1)^3(x+5)}$$

Igualamos numeradores:

$$-2x^3 - 19x^2 - 18x + 7 = A(x+1)^2(x+5) + B(x+1)(x+5) + C(x+5) + D(x+1)^3$$

Damos valores a la variable (primero los valores -1 y -5 por ser raíces de los factores lineales del denominador):

Para $x = -1$

$$2 - 19 + 18 + 7 = C(4)$$

$$8 = 4C$$

$$\boxed{C = 2}$$

Para $x = -5$

$$250 - 475 + 90 + 7 = D(-4)^3$$

$$-128 = -64D$$

$$\boxed{D = 2}$$

No habiendo más raíces de factores lineales, damos a la variable valores cualesquiera. Los dos valores más convenientes son 0 y 1.

Para $x = 0$

$$7 = A(1)(5) + B(1)(5) + C(5) + D(1)$$

Sustituyendo los valores ya conocidos:

$$7 = 5A + 5B + 10 + 2$$

de donde

$$A + B = -1 \quad (1)$$

Para $x = 1$

$$-2 - 19 - 18 + 7 = A(4)(6) + B(2)(6) + C(6) + D(8)$$

$$-32 = 24A + 12B + 12 + 16$$

Reduciendo términos y simplificando:

$$2A + B = -5 \quad (2)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} A + B = -1 \\ 2A + B = -5 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$A = 4$$

$$B = 3$$

$f_{(x)}$, separado en fracciones simples, es:

$$f_{(x)} = -\frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{x+5}$$

Ejemplo 83

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples: $f_{(x)} = \frac{x^3 + 19x^2 - 18x + 22}{x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x - 6}$

Factorizando el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 2 & -1 & 4 & -6 & \\ 1 & & 1 & 3 & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 6 & 10 & \\ -3 & & -3 & 0 & -6 & & \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 10 & & \end{array}$$

El último cociente resultante no tiene raíces reales. La fracción, con el denominador factorizado, es:

$$f_{(x)} = \frac{x^3 + 19x^2 - 18x + 22}{(x-1)(x+3)(x^2+2)}$$

El tercer factor del denominador es cuadrático irreducible. La separación en fracciones simples será de la forma:

$$f_{(x)} = \frac{x^3 + 19x^2 - 18x + 22}{(x-1)(x+3)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

Sacando mínimo común denominador e igualando numeradores, resulta:

$$x^3 + 19x^2 - 18x + 22 = A(x+3)(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)(x+3)$$

Damos valores a la variable:

Para $x = 1$

$$1 + 19 - 18 + 22 = A(4)(3)$$

$$24 = 12A$$

$$A = 2$$

Para $x = -3$

$$-27 + 171 + 54 + 22 = B(-4)(11)$$

$$220 = -44B$$

$$B = -5$$

Para $x = 0$

$$22 = A(3)(2) + B(-1)(2) + D(-1)(3)$$

Sustituyendo valores ya conocidos:

$$22 = 12 + 10 - 3D$$

$$D = 0$$

Para $x = -1$

$$-1 + 19 + 18 + 22 = A(2)(3) + B(-2)(3) + (-C + D)(-2)(2)$$

$$58 = 12 + 30 + 4C$$

$$C = 4$$

$$f_{(x)} = \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} + \frac{4x}{x^2+2}$$

Ejemplo 84

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples: $f_{(x)} = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 7}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1}$

Factorizando el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ & & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

El cociente resultante, aunque no tiene raíces reales, es el desarrollo del binomio

$$(x^2 + 1)^2$$

La fracción, por tanto, con el denominador factorizado es:

$$f_{(x)} = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 7}{(x+1)(x^2+1)^2}$$

La separación en fracciones simples toma la forma:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 7}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Sacando mínimo común denominador e igualando numeradores:

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 7 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)$$

Dando valores a la variable:

Para $x = -1$

$$1 + 2 + 4 - 2 + 7 = A(4)$$

$$12 = 4A$$

$$A = 3$$

Para $x = i$ (raíz imaginaria del factor cuadrático):

$$i^4 - 2i^3 + 4i^2 + 2i + 7 = (Di + E)(i + 1)$$

$$1 + 2i - 4 + 2i + 7 = -D + Di + Ei + E$$

Agrupando en cada miembro la parte real y la parte imaginaria:

$$4 + 4i = -D + E + (D + E)i$$

Igualando partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{cases} -D + E = 4 \\ D + E = 4 \end{cases}$$

de donde

$$D = 0$$

$$E = 4$$

Para $x = 0$

$$7 = A + C(1)(1) + E(1)$$

$$7 = 3 + C + 4$$

$$C = 0$$

Para $x = 1$

$$1 - 2 + 4 + 2 + 7 = A(4) + (B + C)(2)(2) + (D + E)(2)$$

$$12 = 12 + 4B + 8$$

$$B = -2$$

$$f(x) = \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2+1)^2}$$

Nota: en el ejemplo anterior fue muy ventajoso utilizar la raíz imaginaria i del factor cuadrático para hallar los valores de D y E . Si hubiéramos sustituido a continuación la variable por la otra raíz imaginaria $-i$, no habiésemos obtenido nada nuevo, sino otra vez los valores ya conocidos de D y E .

Ejemplo 85

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples:
$$f_{(x)} = \frac{x^7 + 3x^5 - 6x^4 - 19x^3 - 47x^2 - 67x - 102}{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - 32}$$

Tratándose de una fracción impropia, debemos primero efectuar la división:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 3 \quad -6 \quad -19 \quad -47 \quad -67 \quad -102 \\ -1 \quad 2 \quad -8 \quad 16 \quad -16 \quad 32 \\ \hline 2 \quad -5 \quad 10 \quad -35 \quad -15 \\ -2 \quad 4 \quad -16 \quad 32 \quad -32 \quad 64 \\ \hline -1 \quad -6 \quad -3 \quad -47 \quad -3 \\ 1 \quad -2 \quad 8 \quad -16 \quad 16 \quad -32 \\ \hline -8 \quad 5 \quad -63 \quad 13 \quad -134 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad 8 \quad -16 \quad 16 \quad -32 \\ 1 \quad 2 \quad -1 \\ \hline \end{array}$$

De la división resulta que

$$Q_{(x)} = x^2 + 2x - 1$$

$$R_{(x)} = -8x^4 + 5x^3 - 63x^2 + 13x - 134$$

Recordando que

$$\frac{P_{(x)}}{D_{(x)}} = Q_{(x)} + \frac{R_{(x)}}{D_{(x)}}$$

podemos escribir:

$$f_{(x)} = x^2 + 2x - 1 + \frac{-8x^4 + 5x^3 - 63x^2 + 13x - 134}{\underbrace{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 16x^2 + 16x - 32}_{g_{(x)}}}$$

Separaremos ahora $g_{(x)}$ en fracciones simples. Factorizando el denominador:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -2 & 8 & -16 & 16 & -32 \\ 2 & & 2 & 0 & 16 & 0 & 32 \\ \hline & 1 & 0 & 8 & 0 & 16 & 10 \end{array}$$

El denominador sólo podía tener raíces positivas, dado que los coeficientes son alternadamente positivos y negativos. El cociente resultante no admite más raíces positivas, por lo que tenemos que concluir que el denominador no tiene más raíces reales. Sin embargo, el cociente resultante es el desarrollo de

$(x^2 + 4)^2$. Por tanto:

$$g_{(x)} = \frac{-8x^4 + 5x^3 - 63x^2 + 13x - 134}{(x-2)(x^2+4)^2}$$

La separación en fracciones simples toma la forma:

$$g(x) = \frac{-8x^4 + 5x^3 - 63x^2 + 13x - 134}{(x-2)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+4} + \frac{Dx+E}{(x^2+4)^2}$$

Sacando mínimo común denominador e igualando numeradores:

$$-8x^4 + 5x^3 - 63x^2 + 13x - 134 = A(x^2+4)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+4) + (Dx+E)(x-2)$$

Dando valores a la variable:

Para $x = 2$

$$-128 + 40 - 252 + 26 - 134 = A(64)$$

$$-448 = 64A$$

$$A = -7$$

Para $x = 2i$ (raíz imaginaria del factor cuadrático):

$$-128i^4 + 40i^3 + 252 + 26i - 134 = (2Di + E)(2i - 2)$$

$$-128 - 40i + 252 + 26i - 134 = -4D - 4Di + 2Ei - 2E$$

Agrupando partes reales y partes imaginarias:

$$-10 - 14i = -4D - 2E + (-4D + 2E)i$$

Simplificando:

$$-5 - 7i = -2D - E + (-2D + E)i$$

Igualando partes reales y partes imaginarias:

$$\begin{cases} -2D - E = -5 \\ -2D + E = -7 \end{cases}$$

de donde

$$D = 3$$

$$E = -1$$

Para $x = 0$

$$-134 = A(16) + C(-2)(4) + E(-2)$$

$$-134 = -112 - 8C + 2$$

$$-24 = -8C$$

$$C = 3$$

Para $x = 1$

$$-8 + 5 - 63 + 13 - 134 = A(25) + (B+C)(-1)(5) + (D+E)(-1)$$

$$-187 = -175 + (B+3)(-5) + (3-1)(-1)$$

$$-187 = -175 - 5B - 15 - 2$$

$$B = -1$$

$$f_{(x)} = x^2 + 2x - 1 + \frac{-7}{x-2} + \frac{-x+3}{x^2+4} + \frac{3x-1}{(x^2+4)^2}$$

$$f_{(x)} = x^2 + 2x - 1 - \frac{7}{x-2} - \frac{x-3}{x^2+4} + \frac{3x-1}{(x^2+4)^2}$$

Nota: Al comenzar la resolución del ejemplo precedente efectuamos inmediatamente la división por tratarse de una fracción impropia. Sin embargo es, tal vez, preferible, adelantar el trabajo de factorizar el denominador pues, si éste es de la forma $(ax+b)^n$, tal división es completamente innecesaria, como podrá verse en el ejemplo 87.

Ejemplo 86

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples: $f_{(x)} = \frac{3x^3 - 10x^2 + 7}{x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32}$

Factorizando el denominador:

	1	-10	40	-80	80	-32
2		2	-16	48	-64	32
	1	-8	24	-32	16	0
2		2	-12	24	-16	
	1	-6	12	-8	0	
2		2	-8	8		
	1	-4	4	0		
2		2	-4			
	1	-2	0			
2		2				
	1	0				

La fracción, con el denominador factorizado, es:

$$f_{(x)} = \frac{3x^3 - 10x^2 + 7}{(x-2)^5}$$

Dado que el denominador es un único factor lineal, la separación en fracciones simples se hace más fácil si escribimos el numerador en términos de $(x-2)$ utilizando el método de Horner (sin necesidad de acudir al Método de los Coeficientes Indeterminados).

Utilizando Horner:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -10 & 0 & 7 \\
 2 & & 6 & -8 & -16 \\
 \hline
 & 3 & -4 & -8 & \underline{-9} \\
 2 & & 6 & 4 & \\
 \hline
 & 3 & 2 & \underline{-4} & \\
 2 & & 6 & & \\
 \hline
 & 1 & \underline{8} & &
 \end{array}$$

$$f_{(x)} = \frac{3(x-2)^3 + 8(x-2)^2 - 4(x-2) - 9}{(x-2)^5}$$

Dividiendo cada término del numerador por el denominador:

$$f_{(x)} = \frac{3(x-2)^3}{(x-2)^5} + \frac{8(x-2)^2}{(x-2)^5} - \frac{4(x-2)}{(x-2)^5} - \frac{9}{(x-2)^5}$$

Simplificando:

$$f_{(x)} = \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{8}{(x-2)^3} - \frac{4}{(x-2)^4} - \frac{9}{(x-2)^5}$$

Ejemplo 87

Separar $f_{(x)}$ en fracciones simples:
$$f_{(x)} = \frac{x^6 + 7x^5 + 18x^4 + 26x^3 + 40x^2 + 59x + 26}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$$

La fracción a separar es impropia, pero el hecho de que el denominador sea $(x+2)^4$ (compruébese), hace innecesario dividir previamente.

Escribimos, utilizando Horner, el numerador en términos de $(x+2)$:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr}
 -2 & 1 & 7 & 18 & 26 & 40 & 59 & 26 \\
 & & -2 & -10 & -16 & -20 & -40 & -38 \\
 \hline
 & 1 & 5 & 8 & 10 & 20 & 19 & \underline{-12} \\
 -2 & & -2 & -6 & -4 & -12 & -16 & \\
 \hline
 & 1 & 3 & 2 & 6 & 8 & \underline{3} & \\
 -2 & & -2 & -2 & 0 & -12 & & \\
 \hline
 & 1 & 1 & 0 & 6 & \underline{-4} & & \\
 -2 & & -2 & 2 & -4 & & & \\
 \hline
 & 1 & -1 & 2 & \underline{12} & & & \\
 -2 & & -2 & 6 & & & & \\
 \hline
 & 1 & -3 & \underline{8} & & & & \\
 -2 & & -2 & & & & & \\
 \hline
 & 1 & \underline{-5} & & & & &
 \end{array}$$

$$f_{(x)} = \frac{(x+2)^6 - 5(x+2)^5 + 8(x+2)^4 + 2(x+2)^3 - 4(x+2)^2 + 3(x+2) - 12}{(x+2)^4}$$

Dividiendo cada término del numerador por el denominador:

nador y simplificando:

$$f(x) = (x+2)^2 - 5(x+2) + 8 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3} - \frac{12}{(x+2)^4}$$

Desarrollando la parte entera
y reduciendo términos seme-
jantes:

$$f(x) = x^2 - x + 2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3} - \frac{12}{(x+2)^4}$$

Ejercicio 29

Separar $f(x)$ en fracciones simples

$$1) f(x) = \frac{5x+7}{x^2+2x-3}$$

$$2) f(x) = \frac{3x^2-1}{x^3-x}$$

$$3) f(x) = \frac{6x^2-7x-2}{x^3-x^2-4x+4}$$

$$4) f(x) = \frac{4x^2-6x-16}{x^3+x^2-4x-4}$$

$$5) f(x) = \frac{-x^3+7x^2-23x-7}{x^4-x^3-7x^2+x+6}$$

$$6) f(x) = \frac{-2x^3-26x^2+42x+96}{x^4-2x^3-13x^2+14x+24}$$

$$7) f(x) = \frac{x+4}{x^3-4x^2+x+6}$$

$$8) f(x) = \frac{14x^2-13x+2}{4x^3-8x^2+5x-1}$$

$$9) f(x) = \frac{x^3-2x^2}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$$

$$10) f(x) = \frac{x^3-6x^2+15x-10}{x^4-8x^3+24x^2-32x+16}$$

$$11) f(x) = \frac{x^2}{x^3-x^2-x+1}$$

$$12) f(x) = \frac{x^3+6x^2-4x+4}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$$

$$13) f(x) = \frac{5x^3+22x^2+24x+3}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$$

$$14) f(x) = \frac{-2x^3-19x^2-18x+7}{x^4+8x^3+18x^2+16x+5}$$

$$15) f(x) = \frac{5x^4+16x^3+15x^2+4x-1}{x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1}$$

$$16) f(x) = \frac{-4x^3-28x^2+83x-33}{x^4+2x^3-12x^2+14x-5}$$

$$17) f(x) = \frac{7x^3+61x^2+176x+172}{x^4+12x^3+54x^2+108x+81}$$

$$18) f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$$

$$19) f(x) = \frac{3x^2-8x+9}{x^3-6x^2+12x-8}$$

$$20) f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}$$

$$21) f(x) = \frac{5x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+2}$$

$$22) f(x) = \frac{10x^2-5x+9}{x^3-x^2+x-1}$$

$$23) f(x) = \frac{x^3+7x^2+13x+10}{x^4+5x^3+10x^2+10x+4}$$

$$24) f(x) = \frac{26x^2+5x+26}{x^4+2x^3-4x^2-5x-6}$$

$$25) f(x) = \frac{5x^2-3x+10}{x^3-x^2+3x-3}$$

$$26) f(x) = \frac{9x^2-x+14}{x^3+x^2+2x+2}$$

$$27) f(x) = \frac{4x^2+5x+16}{x^3-2x^2+2x-4}$$

$$28) f(x) = \frac{x^3+19x^2-18x+22}{x^4+2x^3-x^2+4x-6}$$

- $$29) \quad f_{(x)} = \frac{10x^4 - 23x + 51}{x^4 - x^3 - 11x^2 - x - 12}$$
- $$30) \quad f_{(x)} = \frac{x^4 + 1}{x^5 + x^3}$$
- $$31) \quad f_{(x)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 9x + 3}$$
- $$32) \quad f_{(x)} = \frac{-3x^3 - 11x^2 + 25x - 7}{x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 8x - 4}$$
- $$33) \quad f_{(x)} = \frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$$
- $$34) \quad f_{(x)} = \frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 8x - 1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$$
- $$35) \quad f_{(x)} = \frac{4x^4 - 3x^3 + 5x^2 - x - 1}{x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x - 1}$$
- $$36) \quad f_{(x)} = \frac{4x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7}{(x-2)(x^2 + x + 1)^2}$$
- $$37) \quad f_{(x)} = \frac{8x^4 - 11x^3 + 13x^2 - 8x - 1}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}$$
- $$38) \quad f_{(x)} = \frac{-x^4 + 2x^3 - 7x^2 + x + 1}{x^6 - 3x^5 + 4x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2}$$
- $$39) \quad f_{(x)} = \frac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x + 4}{x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 6x^2 + x + 3}$$
- $$40) \quad f_{(x)} = \frac{25}{x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2}$$
- $$41) \quad f_{(x)} = \frac{x^5 + 4x^4 + 7x^3 + 29x^2 + 9x + 38}{x^6 - x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 4x - 8}$$
- $$42) \quad f_{(x)} = \frac{48}{x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 18x^2 + 9x - 27}$$
- $$43) \quad f_{(x)} = \frac{2x^2 - 2x - 7}{x^2 + 3x + 2}$$
- $$44) \quad f_{(x)} = \frac{2x^3 - x^2 - 3x + 9}{x^2 + x - 6}$$
- $$45) \quad f_{(x)} = \frac{x^3 - x^2 + 5x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$
- $$46) \quad f_{(x)} = \frac{3x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 28x - 18}{x^3 - 7x + 6}$$
- $$47) \quad f_{(x)} = \frac{x^5 - x^3 - x^2}{x^2 - 1}$$

$$48) f_{(x)} = \frac{5x^5 - 5x^4 - 17x^3 + 64x^2 - 55x}{x^3 - 7x + 6}$$

$$49) f_{(x)} = \frac{x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

$$50) f_{(x)} = \frac{2x^4 - x^3 - 25x^2 - 32x - 46}{x^3 + x^2 - 14x - 24}$$

$$51) f_{(x)} = \frac{x^6 - x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

$$52) f_{(x)} = \frac{x^6 + 7x^5 + 18x^4 + 26x^3 + 40x^2 + 59x + 26}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$$

$$53) f_{(x)} = \frac{3x^6 - 10x^5 + 9x^4 - 15x^3 + 19x^2 - 20x + 8}{x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3}$$

$$54) f_{(x)} = \frac{x^6 + x^5 + 6x^4 + 9x^3 - x^2 + 7x - 2}{x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 8}$$

$$55) f_{(x)} = \frac{x^7 + 4x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

$$56) f_{(x)} = \frac{2x^4 + (a-4)x^3 - (2a^2+15)x^2 - (9a-32)x + 18a-9}{x^3 - 2x^2 - 9x + 18}$$

$$57) f_{(x)} = \frac{ax^3 + (a^2 - ab + b)x^2 + (ab - a^2b - b^2)x + a + b - ab^2}{x^2 + ax - bx - ab}$$

$$58) f_{(x)} = \frac{8}{x^4 + 4}$$

$$59) f_{(x)} = \frac{2x^4}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$60) f_{(x)} = \frac{3x^3 + 15x + 6}{x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2}$$

$$61) f_{(x)} = \frac{7x^4 - 5x^3 + 26x^2 - 15x + 19}{x^5 - x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 9x - 9}$$

Ejercicio 30

Ejercicios de Recapitulación

- 1) Determinar A , B , C y D para que $P_{(x)} \equiv x^4 + Ax^3 + Bx^2 - 8x + 4$ sea divisible por $D_{(x)}^2$, siendo $D_{(x)} \equiv x^2 + Cx + D$.
- 2) Determinar la relación que debe existir entre los parámetros a , b , c y d para que se cumpla que $M_{(x)}^2 = N_{(x)}$, siendo $M_{(x)} \equiv 2x^2 + ax + b$ y $N_{(x)} \equiv 4x^4 - 4cx^3 + 4dx^2 + 2c(p+1)x + (p+1)^2$.
- 3) Determinar para qué valores racionales de a y b es divisible el polinomio $x^4 + 3x^3 - 5ax^2 + b$ por $x^2 + 2ax + 2$.

- 4) Determinar para qué valores racionales de a y b es divisible el polinomio $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 8ax + b$ por $x^2 - ax + 2$.
- 5) La ecuación $3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2 = 0$ admite la raíz $1 + i$. Determinar las restantes raíces de la ecuación.
- 6) Determinar las cuatro raíces de la ecuación $x^4 - (7m - 4)x^2 + (m + 1)^2 = 0$, sabiendo que éstas son racionales y están en progresión aritmética.
- 7) Determinar las raíces de la ecuación $x^4 - (2m + 10)x^2 + (m - 3)^2 = 0$, sabiendo que éstas son complejas y están en progresión aritmética.

Determinar los polinomios de segundo grado a los que corresponden las siguientes tablas de valores:

$$8) \begin{array}{c|c|c|c} x & -1 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 9 & 3 & 3 \end{array}$$

$$9) \begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & -7 & -4 & 3 \end{array}$$

$$10) \begin{array}{c|c|c|c} x & -2 & -1 & 1 \\ \hline f(x) & -31 & -15 & -1 \end{array}$$

Determinar los polinomios de tercer grado a los que corresponden las siguientes tablas de valores:

$$11) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -3 & -2 & -1 & 1 \\ \hline f(x) & -20 & -5 & 0 & 4 \end{array}$$

$$12) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & -1 & 2 & 15 & 50 \end{array}$$

$$13) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & -3 & -2 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & -14 & -2 & 10 & 26 \end{array}$$

Determinar los polinomios de cuarto grado a los que corresponden las siguientes tablas de valores:

$$14) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 12 & 2 & -4 & -12 & -4 \end{array}$$

$$15) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & 59 & -3 & -13 & -33 & -31 \end{array}$$

$$16) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline f(x) & 207 & 30 & 1 & -6 & 3 \end{array}$$

$$17) \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & -2 & -1 & 0.5 & 1 & 5 \\ \hline f(x) & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Calcular los siguientes límites:

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{7-2x}{x^2-x-2} - \frac{1}{x^2-3x+2} \right)$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{4x^2+3}{x^2(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-6x+8} \right]$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x-12}{x^2+2x-8} - \frac{x^2+1}{3(x^2-5x+6)} \right]$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \frac{4}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 4 + \frac{14}{\operatorname{tg}^2 x - 3}}{5 + \frac{14}{\operatorname{tg}^4 x - 9}}$$

23) ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un polinomio de la forma $x^3 + px + q$ sea divisible por un polinomio de la forma $x^2 + mx - 1$?

24) ¿Qué condiciones deben cumplirse para que un polinomio de la forma $x^4 + px + q$ sea divisible por un polinomio de la forma $x^2 + mx + 1$?

25) Determinar A y B para que $Ax^4 + Bx^3 + 1$ sea divisible por $(x-1)^2$.

Construir el polinomio de grado mínimo y de coeficientes enteros que admita...

26) ... las raíces 1, 2 y $-1+i$.

27) ... las raíces $-1, 3$ y $\frac{1-\sqrt{7}i}{2}$

28) ... las raíces $2+\sqrt{3}i$ y $-7+\sqrt{2}i$

29) ... las raíces 1, i , $-1-\sqrt{3}i$, $-2+\sqrt{5}i$

30) ... la raíz doble $2-3i$

31) Determinar la relación que debe existir entre los coeficientes de la ecuación $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ para que el producto de dos raíces de la ecuación sea igual al producto de las otras dos.

32) Determinar m en la ecuación $x^3 - 7x + m = 0$ para que una de las raíces sea igual al doble de la otra.

33) Determinar a, b y c en la ecuación $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ para que las raíces de la ecuación sean, precisamente, a, b y c .

34) Determinar a, b y c en la ecuación $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ para que las raíces de la ecuación sean, precisamente, a, b y c .

- 35) Hallar la relación entre los coeficientes de la ecuación $x^3 + px + q = 0$ para que las raíces de la ecuación satisfagan la siguiente condición:

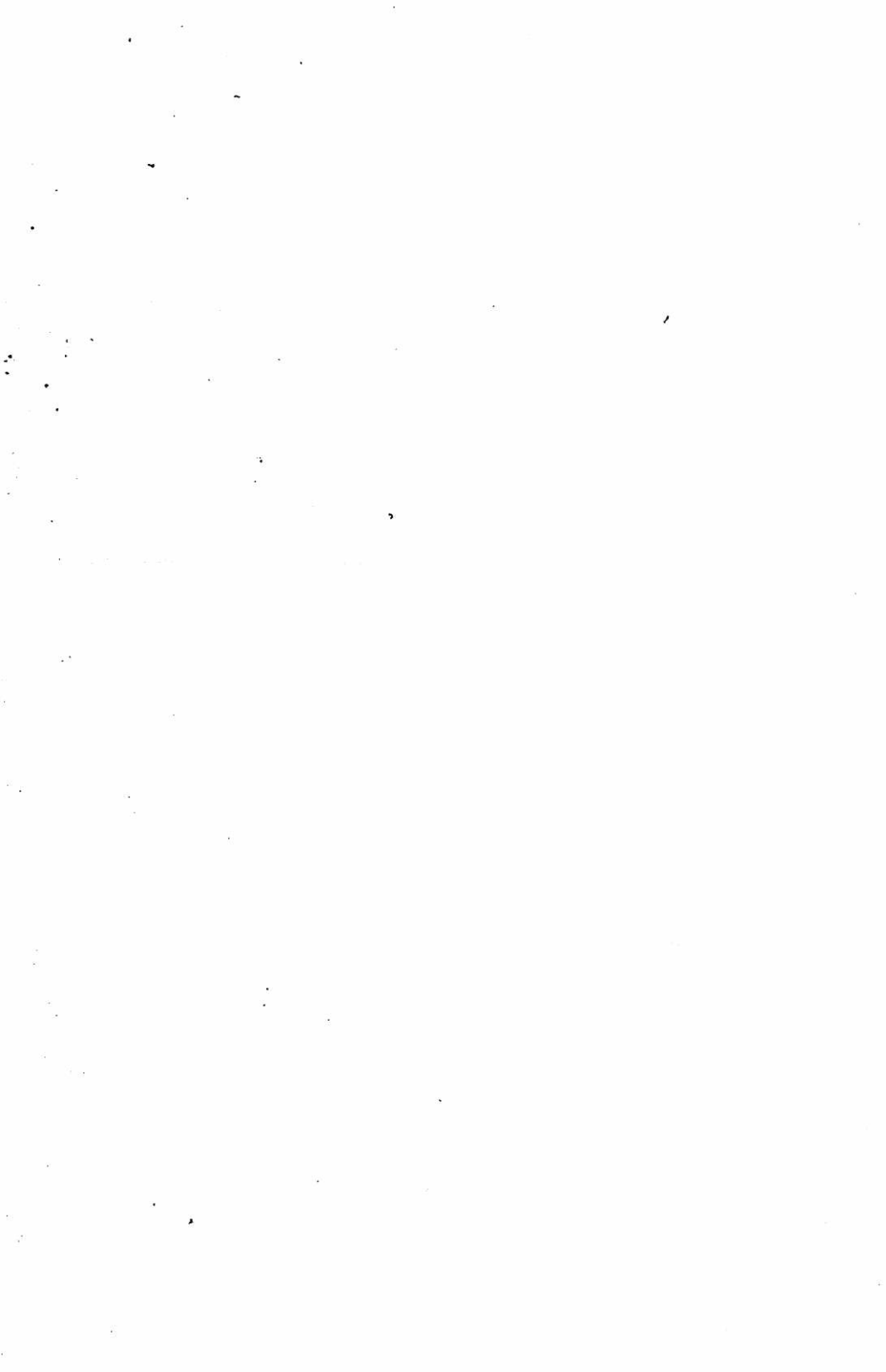
$$x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}.$$
- 36) $P_{(x)}$ es un polinomio de quinto grado en el que el coeficiente de x^5 es 3.
 • El residuo que se obtiene al dividir $P_{(x)}$ por $x^2 + 1$ es el mismo que el que se obtiene al dividirlo por $x^2 + 3x + 3$. Al dividir $P_{(x)}$ por $(x-1)^2(x+1)$ el residuo es $4x + 5$. Hallar $P_{(x)}$.
- 37) $P_{(x)}$ es un polinomio de tercer grado y de coeficientes enteros en el que el coeficiente de x^3 es 1. $P_{(x)}$ admite la raíz $-i$. Hallar $P_{(x)}$ sabiendo, además, que $P_{(x+1)}$ no tiene término cuadrático.
- 38) Determinar $P_{(x)}$ sabiendo que es un polinomio de cuarto grado, que el coeficiente de x^4 es 1, que admite la raíz -1 , que al dividirlo por $x + 2$ el residuo es 9 y que $P_{(x+2)}$ carece de los términos de tercero y de primer grado.
- 39) Dado $P_{(x)} \equiv x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$, determinar $P_{(y)}$ tal que las raíces de $P_{(y)}$ sean iguales a las de $P_{(x)}$ multiplicadas cada una por 3.
- 40) Dado $P_{(x)} \equiv x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 20x + 20$, determinar un polinomio $P_{(y)}$ tal que sus raíces sean las de $P_{(x)}$ aumentadas cada una en 2 unidades.
- 41) Dado $P_{(x)} \equiv x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$, determinar un polinomio $P_{(y)}$ tal que sus raíces sean las de $P_{(x)}$ disminuidas cada una en una unidad.
- 42) Dado $P_{(x)} \equiv x^4 + 3x^2 + 2x + 3$, determinar un polinomio $P_{(y)}$ tal que sus raíces sean las de $P_{(x)}$ multiplicadas cada una por 2. Hallar después las cuatro raíces de $P_{(y)}$ sabiendo que una de las raíces es $\frac{1+\sqrt{11}i}{2}$.
- 43) En la ecuación $8x^3 + 36x^2 + 40x + 12 = 0$ hágase el cambio $x = ay + b$ y hállese cuál debe ser el valor de a y b para que la ecuación en y tenga el coeficiente de y^3 igual a la unidad y no exista el término y^2 .
- 44) Determinar el valor de k en la ecuación $x^3 - 3x^2 + kx - 12 = 0$ para que el producto de dos de las raíces de la ecuación sea -6 y resolver la ecuación.
- 45) Determinar el valor de k en la ecuación $7x^3 - 37x^2 + kx - 12 = 0$ para que la suma de dos de las raíces de la ecuación sea 5 y resolver la ecuación.
- 46) Determinar el valor de k en la ecuación $6x^3 - 11x^2 + kx - 24 = 0$ para que dos de las raíces de la ecuación sean recíprocas entre sí y resolver la ecuación.
- 47) Determinar el valor de k en la ecuación $9x^3 - 21x^2 + kx + 25 = 0$ para que la ecuación tenga una raíz real doble y resolver la ecuación.
- 48) Determinar el valor de k en la ecuación $8x^3 + kx^2 - 18x + 9 = 0$ para que dos de las raíces de la ecuación sean opuestas y resolver la ecuación.

- 49) Determinar m y n para que la ecuación $12x^4 - 44x^3 + mx^2 + nx + 3 = 0$ tenga un par de raíces dobles racionales y resolver la ecuación.
- 50) Determinar m y n sabiendo que son números reales y que la ecuación $x^4 - 8x^3 + mx^2 + nx + 169 = 0$ tiene una doble raíz imaginaria. Resolver la ecuación.
- 51) Determinar m y n para que la ecuación $4x^4 + 2x^3 - 3x^2 + mx + n = 0$ tenga una raíz triple y resolver la ecuación.
- 52) Demostrar que, si la ecuación $x^3 + cx + d = 0$ tiene una raíz doble, entonces $\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 0$. Demostrar, además, el recíproco.
- 53) Demostrar que, si la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tiene una raíz triple, entonces $d = \left(\frac{c}{b}\right)^3$.
- 54) Demostrar que, si $d = \left(\frac{c}{b}\right)^3$ y $3c = b^2$, entonces la ecuación $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tiene una raíz triple.
- 55) La diferencia de los cuadrados de dos trinomios de segundo grado es $16x^3 - 48x - 32$. Determinar los dos trinomios sabiendo que el término independiente del primero es 2 y que el término independiente del segundo es un número negativo.

Resolver las siguientes ecuaciones:

- 56) $\lg^3 x + 2 \lg^2(10x) - 9 \lg x - 8 = 0$
- 57) $\lg_2^3(2x) + 9 \lg_2^2 \frac{x}{4} - 36 \lg_2 x + 45 = 0$
- 58) $\frac{1}{\lg x + 2} + \frac{3}{3 \lg x + 1} + \frac{1}{\lg x - 1} = 1$
- 59) $6 \operatorname{tg}^5 x - 13 \operatorname{tg}^4 x - 30 \operatorname{tg}^3 x + 30 \operatorname{tg}^2 x + 13 \operatorname{tg} x - 6 = 0$
- 60) Un polinomio $P_{(x)}$, dividido por $x + 2$, da de residuo 29; dividido por $x - 2$, da de residuo 25. ¿Qué residuo dará si se divide por $x^2 - 4$?
- 61) Un polinomio $P_{(x)}$, dividido por $x - 1$, da de residuo 1; dividido por $x - 2$, da de residuo 16. ¿Qué residuo dará si se divide por $x^2 - 3x + 2$?
- 62) Al dividir un polinomio por $x + 1$ se obtiene -45 de residuo. Al dividirlo por $x - 3$, el residuo es -165. ¿Cuál será el residuo al dividir $P_{(x)}$ por $x^2 - 2x - 3$?
- 63) Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ por $x + 1$ el residuo es -2; al dividirlo por $x + 2$, el residuo es -1 y, al dividirlo por $x + 3$, el residuo es 28. ¿Cuál será el residuo al dividir $P_{(x)}$ por $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$?
- 64) El residuo de dividir $P_{(x)}$ por $x - 1$ es -4; el residuo de dividirlo por $x - 2$ es -9 y el residuo de dividirlo por $x + 3$ es 196. Determinar cuál es el residuo cuando se divide $P_{(x)}$ por $x^3 - 7x + 6$.

- 65) Al dividir un polinomio $P_{(x)}$ por $x - a$, $x - b$ y $x - c$, se obtienen residuos iguales, respectivamente, a A , B y C . Calcular el residuo cuando el polinomio se divide por $(x-a)(x-b)(x-c)$.
- 66) Resolver: $(\sqrt{2})^{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{x-\sqrt[2]{8}}$
- 67) Las raíces de $P_{(x)} \equiv x^3 + x^2 - 2$ son 1 , α y β . Construir un polinomio $\varphi_{(x)}$ de segundo grado sabiendo que $\varphi_{(1)} = 1$, $\varphi_{(\alpha)} = \beta$ y $\varphi_{(\beta)} = \alpha$. Demostrar que $\varphi_{(\varphi_{(x)})} - x$ es divisible exactamente por $P_{(x)}$ y calcular el cociente $Q_{(x)}$ de dicha división.
- 68) ¿Qué relación debe existir entre los coeficientes del polinomio $P_{(x)} \equiv ax^3 + bx^2 + cx + d$, si entre las raíces de $P_{(x)}$ existe la siguiente relación: $x_1x_2 + x_2x_3 = 2x_1x_3$?
- 69) Resolver la ecuación $x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es un número imaginario puro.
- 70) Resolver la ecuación $5x^4 - x^3 + 25x^2 - 4x + 20 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es un número imaginario puro.
- 71) Resolver la ecuación $x^6 + 2x^5 + 25x^4 + 6x^3 + 266x^2 + 600 = 0$ sabiendo que una de sus raíces es un número imaginario puro y que $1 + 3i$ es también raíz de la ecuación.
- 72) Si las raíces del polinomio $P_{(x)} \equiv x^3 + px + q$ son a , b y c , determinar el polinomio $Q_{(x)}$ cuyas raíces son $\frac{1}{ab}$, $\frac{1}{bc}$ y $\frac{1}{ac}$.
- 73) Dado $P_{(x)} \equiv x^3 - 6x^2 + mx + n$, determinar m y n para que las raíces de $P_{(x)}$ sean tres números naturales consecutivos.
- 74) Desde hace años, los hermanos Gómez acostumbran hacer cada semana un cuadro de caballos. Recientemente los hermanos Martínez se han unido al grupo y ahora hacen el cuadro entre todos. Un día ganan y, de acuerdo con las normas que ellos mismos establecieron, se reparten a partes iguales el 80% del total ganado. El 20% restante lo reparten así: 60% para los Gómez, que son los más antiguos, y 40% para los Martínez. De esta forma, los Martínez ganan entre todos Bs. 264.000 más que los Gómez, pero cada Gómez gana Bs. 75.600 más que cada Martínez. Si la repartición se hubiera hecho dividiendo sencillamente la ganancia total entre todos, cada Martínez hubiera recibido Bs. 33.600 más. ¿Cuántos son los hermanos Gómez, cuántos los Martínez y cuánto pagó el cuadro ganador?



Generalidades

Sea la sucesión de 100 términos

$$a_n = a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$$

La suma de los términos de la sucesión es

$$S_{100} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

Esta suma se puede expresar de forma más sencilla con el símbolo de sumatoria Σ (mayúscula de la letra *sigma* griega, correspondiente a la *s* de nuestro alfabeto) de la siguiente forma:

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} a_k$$

Esta expresión se lee así: sumatoria desde $k = 1$ hasta 100 de la sucesión a_k .

El uso de la letra k en la sumatoria anterior es arbitrario, pudiéndose utilizar otras letras:

$$\sum_{i=1}^{100} a_i \quad \text{ó} \quad \sum_{t=1}^{100} a_t$$

son otras formas de expresar la suma de los términos de la misma sucesión.

Tenemos por tanto que la sumatoria

$$\sum_{k=m}^n a_k \quad (m \leq n)$$

es una forma de expresar la suma de los términos de una sucesión, términos que se obtienen dando a la variable k valores enteros comprendidos entre dos límites escritos en la parte inferior y superior del símbolo Σ de sumatoria.

Los límites m y n reciben el nombre de *índices* de la sumatoria.

Ejemplos:

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{20} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$$

$$\text{b) } \sum_{i=-2}^{10} \frac{1}{i+3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{13}$$

$$\text{c) } \sum_{t=0}^n (2t+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1)$$

Algunas propiedades de las sumatorias

1) Si c es una constante y a_k una sucesión, entonces

$$\boxed{\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k} \quad (I)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c a_k &= c a_1 + c a_2 + c a_3 + \cdots + c a_n \\ &= c (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) \\ &= c \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

2) Si c es una constante, entonces

$$\boxed{\sum_{k=m}^n c = (n - m + 1) c} \quad (II)$$

y, en particular,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n c = nc}$$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^n c = \underbrace{c + c + c + \cdots + c}_{n \text{ veces}} = nc$$

3) Si a_k y b_k son sucesiones se cumple que

$$\boxed{\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k} \quad (III)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \end{aligned}$$

Esta propiedad es válida también para el caso siguiente:

$$\sum_{k=1}^n (a_k + c) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n c = nc + \sum_{k=1}^n a_k$$

4) Si $m \leq p \leq n$, entonces

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k \quad (\text{IV})$$

En efecto:

$$\sum_{k=m}^n a_k = \underbrace{a_m + a_{m+1} + \cdots + a_p}_{\sum_{k=m}^p a_k} + \underbrace{a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_n}_{\sum_{k=p+1}^n a_k}$$

5)

$$\sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} \quad (\text{V})$$

En efecto:

$$\sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+p}^{n+p} a_{k-p} &= a_{m+p-p} + a_{m+p+1-p} + \cdots + a_{n+p-p} \\ &= a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \end{aligned}$$

Ejercicios que implican el uso de sumatorias

Desarrollo de sumatorias

A continuación aparecen algunos ejemplos ilustrativos de desarrollo de sumatorias. Se utilizan, en lo posible, las propiedades anteriormente enunciadas cuando ayudan a simplificar los cálculos.

$$1) \quad \sum_{i=2}^7 (3i - 4)$$

Utilizando la propiedad III:

$$= \sum_{i=2}^7 3i - \sum_{i=2}^7 4$$

Utilizando la propiedad I en la primera sumatoria y la propiedad II en la segunda:

$$= 3 \sum_{i=2}^7 i - (7 - 2 + 1)4$$

Desarrollando:

$$= 3(2+3+4+5+6+7) - 24$$

$$= 81 - 24 = \boxed{57}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sum_{k=2}^5 (3k+1)^{k-2} \\
 &= (3 \cdot 2 + 1)^0 + (3 \cdot 3 + 1)^1 + (3 \cdot 4 + 1)^2 + (3 \cdot 5 + 1)^3 \\
 &= 1 + 10 + 169 + 4096 = \boxed{4276}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \sum_{k=0}^5 (2k+1)(-1)^k \\
 &= 1(-1)^0 + 3(-1)^1 + 5(-1)^2 + 7(-1)^3 + 9(-1)^4 + 11(-1)^5 \\
 &= 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 = \boxed{-6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & \sum_{k=1}^{10} (100 - 10k) \\
 &= 10 \cdot 100 - 10 \sum_{k=1}^{10} k \\
 &= 1000 - 10(1 + 2 + 3 + \dots + 10) \\
 &= 1000 - 550 = \boxed{450}
 \end{aligned}$$

Por las propiedades I, II y III:

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \sum_{k=1}^n (k+2)(2k+3) \\
 &= \boxed{3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + \dots + (n+2)(2n+3)}
 \end{aligned}$$

Nota: en el caso de la suma de los términos de una sucesión infinita, como en el ejemplo anterior, no tiene sentido sumar los primeros términos que se desarrollan.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & \sum_{k=2}^6 \lg_2 k \\
 &= \lg_2 2 + \lg_2 3 + \lg_2 4 + \lg_2 5 + \lg_2 6 \\
 &= 1 + \lg_2 3 + 2 + \lg_2 5 + (\lg_2 2 + \lg_2 3) \\
 &= 1 + \lg_2 3 + 2 + \lg_2 5 + 1 + \lg_2 3 \\
 &= \boxed{4 + 2 \lg_2 3 + \lg_2 5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \sum_{k=-1}^2 \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3} \\
 &= \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg} 0 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \\
 &= -\sqrt{3} + 0 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = \boxed{-\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$8) \quad \sum_{k=-2}^1 \left(\sin \frac{k\pi}{2} + \cos \frac{k\pi}{4} \right)$$

Por la propiedad III:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=-2}^1 \sin \frac{k\pi}{2} + \sum_{k=-2}^1 \cos \frac{k\pi}{4} \\
 &= \sin(-\pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin 0 + \sin \frac{\pi}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos 0 + \cos \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

El segundo y cuarto términos se eliminan entre sí. El primero, tercero y quinto términos son nulos:

$$= 2 \cos \frac{\pi}{4} + \cos 0$$

$$= \boxed{\sqrt{2} + 1}$$

Ejercicio 31

Desarrollar y calcular el valor (si se trata de la sumatoria de una sucesión finita) de las siguientes sumatorias. Utilizar, cuando se pueda, las propiedades de las sumatorias para simplificar el proceso.

$$1) \quad \sum_{k=0}^5 k$$

$$8) \quad \sum_{k=3}^8 (k-1)(k+2)$$

$$15) \quad \sum_{k=0}^5 k(-1)^k$$

$$2) \quad \sum_{k=1}^4 \left(\frac{12}{k} \right)^{k-1}$$

$$9) \quad \sum_{k=-1}^5 (k+4)(k-1)$$

$$16) \quad \sum_{k=0}^9 (20-2k)(-1)^k$$

$$3) \quad \sum_{k=3}^7 (2k-4)$$

$$10) \quad \sum_{k=-2}^6 (k+3)(k-4)$$

$$17) \quad \sum_{k=-2}^4 (k+3)(-1)^k$$

$$4) \quad \sum_{k=-3}^3 (2k+1)$$

$$11) \quad \sum_{k=-3}^5 (k^3 - k)$$

$$18) \quad \sum_{k=0}^n (k+5)$$

$$5) \quad \sum_{k=2}^5 (5-k)^k$$

$$12) \quad \sum_{k=-1}^4 (k^2 + 3k - 7)$$

$$19) \quad \sum_{k=1}^n (k+1)^3$$

$$6) \quad \sum_{k=0}^6 \frac{3k+1}{2}$$

$$13) \quad \sum_{k=-3}^2 (3k^3 + 5k^2 + k - 3)$$

$$20) \quad \sum_{k=4}^{n+3} (k^2 - 7)$$

$$7) \quad \sum_{k=-3}^4 (k+3)^2$$

$$14) \quad \sum_{k=-2}^3 \frac{3k^2 - 5k + 9}{2k-1}$$

$$21) \quad \sum_{k=-2}^{n-1} (2k+3)^2$$

- 22) $\sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - 2k - 5)^2$
- 23) $\sum_{k=0}^7 \lg_2(k+1)$
- 24) $\sum_{k=1}^5 \lg_2 2k$
- 25) $\sum_{k=2}^8 \lg \frac{k-1}{k+1}$
- 26) $\sum_{k=1}^6 \lg_5 \frac{11k - k^2}{k^2 + 6k + 5}$
- 27) $\sum_{k=-2}^3 \lg_{13} \frac{7-2k}{2k+7}$
- 28) $\lg_5 \left[\sum_{k=0}^9 (100-k)(-1)^k \right]$
- 29) $\sum_{k=0}^2 (\sin^k x + \cos^k x)$
- 30) $\sum_{k=0}^8 \sin \frac{k\pi}{4}$
- 31) $\sum_{k=1}^3 \left(\sin \frac{k\pi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{4} \right)$
- 32) $\sum_{k=0}^3 \cos^2 \frac{k\pi}{4}$
- 33) $\sum_{k=-2}^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{6}$
- 34) $\sum_{k=-1}^2 \left[\sin^2 \frac{(k+1)\pi}{6} - \cos^2 \frac{(k+1)\pi}{4} \right]$
- 35) $\sum_{k=1}^6 \left[\sin \frac{k(-1)^{k+1}\pi}{4} + (-1)^k \cos \frac{(k-1)\pi}{6} \right]$
- 36) $\lg_{2-\sqrt{3}} \left[\sum_{k=-2}^2 \cos \frac{k\pi}{6} \right]$
- 37) $\sum_{k=-2}^2 \frac{1}{2} (\operatorname{Cis} \alpha)^k$
- 38) $\sum_{k=1}^6 \left[(\operatorname{Cis} \alpha)^{4-k} - \operatorname{Cis}(3-k)\alpha \right]$
- 39) $\sum_{k=0}^4 \left[(\operatorname{Cis} \alpha)^{2-k} - (\operatorname{Cis} \alpha)^{1-k} \right] (-1)^k$
- 40) $\sum_{k=-1}^2 \left[\lg_2(k+2) + \cos \frac{k\pi}{6} \right]$
- 41) $\lg_2 \left[\sum_{k=-2}^2 \cos \frac{k\pi}{6} + \sum_{k=-2}^0 \sin \frac{k\pi}{3} \right]$
- 42) $\sum_{k=0}^4 2^k \left(1 - \sin \frac{k\pi}{2} \right)$

Desarrollo de sumatorias dobles y triples

Las sumatorias múltiples se desarrollan a partir de la más interna.

Es de suma importancia reducir los primeros desarrollos a su mínima expresión.

Ejemplos de desarrollo de sumatorias dobles:

$$9) \sum_{k=0}^2 \sum_{i=1}^4 (k+i-3)$$

Desarrollamos primero la sumatoria interna:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=0}^2 [(k+1-3) + (k+2-3) + (k+3-3) + (k+4-3)] \\ &= \sum_{k=0}^2 (4k-2) \end{aligned}$$

Por las propiedades I, II y III:

$$= 4 \sum_{k=0}^2 k - 3 \cdot 2$$

Desarrollando:

$$= 4(0+1+2) - 6 = \boxed{6}$$

$$10) \sum_{k=-1}^1 \sum_{i=0}^2 \left(\sin^i \frac{k\pi}{6} + \cos^i \frac{k\pi}{6} \right)$$

Desarrollando la sumatoria interna:

$$= \sum_{k=-1}^1 \left[(1+1) + \left(\sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6} \right) + \left(\sin^2 \frac{k\pi}{6} + \cos^2 \frac{k\pi}{6} \right) \right]$$

El tercer paréntesis es igual a la unidad. Por tanto:

$$= \sum_{k=-1}^1 \left(3 + \sin \frac{k\pi}{6} + \cos \frac{k\pi}{6} \right)$$

Por las propiedades II y III:

$$= 3 \cdot 3 + \sum_{k=-1}^1 \sin \frac{k\pi}{6} + \sum_{k=-1}^1 \cos \frac{k\pi}{6}$$

Desarrollando las sumatorias:

$$\begin{aligned} &= 9 + \left[\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin 0 + \sin \frac{\pi}{6} \right] + \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \cos 0 + \cos \frac{\pi}{6} \right] \\ &= 9 + \left[-\sin \frac{\pi}{6} + \sin 0 + \sin \frac{\pi}{6} \right] + \left[\cos \frac{\pi}{6} + \cos 0 + \cos \frac{\pi}{6} \right] \end{aligned}$$

El primer corchete se anula por completo. Sustituyendo valores en el segundo:

$$= 9 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{10 + \sqrt{3}}$$

$$11) \sum_{k=1}^3 \sum_{i=2}^n (k+i+3)$$

Desarrollando la sumatoria interna:

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^3 [(k+2+3) + (k+3+3) + \dots + (k+n+3)] \\ &= \sum_{k=1}^3 [(k+5) + (k+6) + \dots + (k+n+3)] \end{aligned}$$

Volviendo a desarrollar:

$$= \boxed{[6+7+\dots+(n+4)] + [7+8+\dots+(n+5)] + [8+9+\dots+(n+6)]}$$

$$12) \sum_{k=2}^n \sum_{i=0}^3 (k+i)i$$

Desarrollando la sumatoria interna:

$$= \sum_{k=2}^n [0 + (k+1) + (k+2)2 + (k+3)3]$$

$$= \sum_{k=2}^n (6k+14)$$

Volviendo a desarrollar:

$$= 26 + 32 + \dots + (6n+14)$$

Ejercicio 32

Desarrollar las siguientes sumatorias dobles y calcular su valor si se trata de sucesiones finitas:

$$(1) \sum_{k=0}^2 \sum_{i=1}^3 (k+i+2)$$

$$(2) \sum_{k=1}^2 \sum_{i=0}^2 (k+i)^{k+i}$$

$$(3) \sum_{k=2}^3 \sum_{i=0}^2 (2k-i-1)^{k-i}$$

$$(4) \sum_{i=1}^3 \sum_{k=-1}^1 (k+i+1)^{ki}$$

$$(5) \sum_{k=0}^3 \sum_{i=1}^3 \cos^k \frac{(2i-1)\pi}{4}$$

$$(6) \sum_{k=-1}^2 \sum_{i=1}^4 \sin^k \frac{i\pi}{6}$$

$$(7) \sum_{k=-1}^2 \sum_{i=0}^2 \left(\sin^i \frac{k\pi}{4} + \cos^i \frac{k\pi}{4} \right)$$

$$(8) \sum_{k=1}^2 \sum_{i=-1}^2 \left(\sec^i \frac{k\pi}{3} - \tan^i \frac{k\pi}{3} \right)$$

$$(9) \sum_{k=2}^4 \sum_{i=2}^4 \lg_k i$$

$$(10) \sum_{k=2}^3 \sum_{i=1}^2 \left[\lg_k (2i-1) + (-1)^k \lg_k 2i \right]$$

$$(11) \sum_{k=1}^4 \sum_{i=-2}^1 \lg_{a^k} (i+3)$$

$$(12) \sum_{k=2}^{100} \sum_{i=1}^2 \lg_k \tan \frac{i\pi}{6}$$

$$(13) \sum_{k=-1}^1 \sum_{i=2}^4 (i-1)^k$$

$$(14) \sum_{k=1}^5 \sum_{i=0}^2 (i-1)^k$$

$$(15) \sum_{k=-2}^1 \sum_{i=3}^6 (3i-8)^{k+2}$$

$$(16) \sum_{k=0}^2 \sum_{i=1}^2 (k+1)^{2-i}$$

$$(17) \sum_{k=2}^4 \sum_{i=1}^3 \left[\lg_k (2i+2) + \operatorname{ctg} \frac{i\pi}{4} \right]$$

$$(18) \sum_{k=0}^3 \sum_{i=1}^2 \left[\lg a^{ki} + \sin \frac{ki\pi}{6} + (-1)^{ki} \right]$$

$$(19) \sum_{i=2}^n \sum_{k=-1}^2 (k+i)^k$$

$$(20) \sum_{k=0}^n \sum_{i=2}^4 (2k+i-1)^k$$

$$(21) \sum_{i=0}^2 \sum_{k=0}^n (2i-7)^k$$

$$(22) \sum_{i=-1}^1 \sum_{k=0}^n (3i-2k+4)^k$$

$$(23) \sum_{i=3}^n \sum_{k=2}^n (k-i+1)$$

$$(24) \sum_{k=2}^n \sum_{i=3}^4 (k-2i+5)^{i-k}$$

$$(25) \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left[\sin^k \frac{(2i+1)\pi}{3} + \sin^k \frac{(2i-1)\pi}{6} \right]$$

Ejemplos de desarrollo de sumatorias triples:

$$13) \sum_{k=1}^3 \sum_{i=-1}^1 \sum_{t=0}^2 (2k+i)^t$$

Desarrollando la sumatoria más interna:

$$= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=-1}^1 [1 + (2k+i) + (2k+i)^2]$$

Desarrollando la sumatoria interna:

$$= \sum_{k=1}^3 \{ [1 + 2k - 1 + (2k-1)^2] + [1 + 2k + (2k)^2] + [1 + 2k + 1 + (2k+1)^2] \}$$

Efectuando y reduciendo términos semejantes:

$$= \sum_{k=1}^3 (12k^2 + 6k + 5)$$

Aplicando las propiedades I, II y III:

$$= 12 \sum_{k=1}^3 k^2 + 6 \sum_{k=1}^3 k + 3 \cdot 5$$

$$= 12(1 + 4 + 9) + 6(1 + 2 + 3) + 15$$

$$= 168 + 36 + 15$$

$$= \boxed{219}$$

$$14) \sum_{i=4}^{100} \sum_{k=0}^3 \sum_{t=1}^2 \left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \right)$$

Desarrollando la sumatoria más interna y simplificando:

$$= \sum_{i=4}^{100} \sum_{k=0}^3 \left[\left(\cos \frac{k\pi}{3} + i \right) + \left(\cos \frac{2k\pi}{3} + i \right) \right]$$

$$= \sum_{i=4}^{100} \sum_{k=0}^3 \left(\cos \frac{k\pi}{3} + \cos \frac{2k\pi}{3} + 2i \right)$$

Desarrollando la sumatoria interna:

$$= \sum_{i=4}^{100} \left[(1 + 1 + 2i) + \left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} + 2i \right) + \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3} + 2i \right) + (\cos \pi + \cos 2\pi + 2i) \right]$$

Sustituyendo los valores de las expresiones trigonométricas y reduciendo términos semejantes:

$$= \sum_{i=4}^{100} (1 + 8i)$$

Por las propiedades I, II y III:

$$= \sum_{i=4}^{100} 1 + 8 \sum_{i=4}^{100} i$$

$$\begin{aligned}
 &= (100 - 4 + 1)1 + 8(4 + 5 + 6 + \dots + 100) \\
 &= 97 + 8(4 + 5 + 6 + \dots + 100)
 \end{aligned}$$

Los números del paréntesis forman una progresión aritmética de 97 términos cuya suma calculamos por la conocida fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_{97} = \frac{(4 + 100)97}{2}$$

$$S_{97} = 5044$$

Sustituyendo:

$$= 97 + 8 \cdot 5044 = \boxed{40449}$$

Ejercicio 33

Desarrollar las siguientes sumatorias triples y calcular su valor si se trata de sucesiones finitas:

$$1) \sum_{k=-1}^2 \sum_{t=-1}^1 \sum_{i=0}^2 (t+i+k)$$

$$11) \sum_{t=0}^2 \sum_{k=-1}^1 \sum_{i=0}^3 2^i \left(1 - \sin \frac{kt\pi}{6}\right)$$

$$2) \sum_{t=-1}^5 \sum_{k=3}^4 \sum_{i=2}^4 (2k+t-3i)$$

$$12) \sum_{t=0}^4 \sum_{k=-1}^1 \sum_{i=0}^1 \left(1 + \cos \frac{kt\pi}{2}\right)^i$$

$$3) \sum_{i=-1}^2 \sum_{t=-1}^1 \sum_{k=1}^3 (2t+i)^{k-1}$$

$$13) \sum_{t=0}^1 \sum_{k=-1}^1 \sum_{i=0}^1 \lg_2(2+kt)^i$$

$$4) \sum_{k=-1}^0 \sum_{t=0}^1 \sum_{i=1}^2 \left[t + (-1)^k \sin^{i+1} \alpha\right]$$

$$14) \sum_{i=-7}^{62} \sum_{k=0}^2 \sum_{t=1}^3 \left(\cos \frac{kt\pi}{2} + 3i\right)$$

$$5) \sum_{k=2}^4 \sum_{t=0}^2 \sum_{i=-4}^{-2} [t + \lg_k(i+5)]$$

$$15) \sum_{t=-2}^{95} \sum_{k=-3}^{-1} \sum_{i=0}^3 (2k+t+2i)$$

$$6) \sum_{k=2}^3 \sum_{t=1}^2 \sum_{i=1}^3 i^{\lg_k t}$$

$$7) \sum_{k=2}^3 \sum_{t=-1}^1 \sum_{i=-2}^0 \lg_{i+4}(k+t)$$

$$8) \sum_{t=-4}^{-1} \sum_{k=0}^2 \sum_{i=2}^4 \lg_i^k(t+5)$$

$$9) \sum_{k=-1}^1 \sum_{t=2}^3 \sum_{i=0}^2 \operatorname{ctg}^i \frac{(k+t)\pi}{6}$$

$$10) \sum_{t=4}^5 \sum_{k=-2}^0 \sum_{i=0}^2 (t+k-1)^{(k+2)i}$$

Cambio de índices de sumatorias

La propiedad (V) de las sumatorias nos permite cambiar a nuestra conveniencia los índices de una sumatoria. Hay que tener tan sólo en cuenta que la cantidad que se le suma o resta a ambos índices en el símbolo de sumatoria debe restársele o sumársele respectivamente a la variable en el término general de la sucesión.

Ejemplo 15

$$\text{Dada } \sum_{k=-3}^7 (k+5),$$

cambiar los índices para que la sumatoria comience a variar desde 1.

Para que el índice inferior de la sumatoria sea 1, hay que sumarle 4 unidades, cantidad que se le suma también al índice superior y se le resta a la variable en el término general de la sucesión:

$$= \sum_{k=-3+4}^{7+4} (k-4+5)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{11} (k+1)}$$

Ejemplo 16

$$\text{Dada } \sum_{k=5}^{45} (3k-17),$$

cambiar los índices para que la sumatoria comience a variar desde cero.

Restamos 5 a cada uno de los índices y sumamos 5 a la variable en el término general:

$$= \sum_{k=5-5}^{45-5} [3(k+5)-17]$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{40} (3k-2)}$$

Ejemplo 17

$$\text{Dada } \sum_{k=-5}^{34} \sum_{i=7}^{46} (2k-i+18),$$

cambiar los índices para que la sumatoria comience a variar desde 1.

Sumamos 6 a los índices del primer símbolo de sumatoria y restamos 6 a la variable k

en el término general.

Por otra parte, restamos 6 a los índices del segundo símbolo y sumamos 6 a la variable i en el término general:

$$= \sum_{k=-5+6}^{34+6} \sum_{i=7-6}^{46-6} [2(k-6) - (i+6) + 18] = \boxed{\sum_{k=1}^{40} \sum_{i=1}^{40} (2k-i)}$$

Ejemplo 18

Dada, $\sum_{k=7}^{n+6} \sum_{i=-4}^{n-4} (7k-50)^{2-i}$

cambiar los índices para que la sumatoria comience a variar desde cero.

Restamos 7 a los índices del primer símbolo de sumatoria y sumamos 7 a la variable k en el término general. Además, sumamos 4 a los índices del segundo símbolo y restamos 4 a la variable i en el término general:

$$= \sum_{k=7-7}^{n+6-7} \sum_{i=-4+4}^{n-4+4} [7(k+7) - 50]^{2-(i-4)} = \boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (7k-1)^{6-i}}$$

Ejercicio 34

Cambiar convenientemente los índices para que las siguientes sumatorias comiencen a variar desde cero:

1) $\sum_{k=3}^5 \sum_{i=-2}^0 (k+i-1)^{k-3}$

7) $\sum_{k=3}^7 (6-k)(3k-2)$

2) $\sum_{k=-2}^5 \sum_{i=5}^n (2k+3i-10)^{2-i}$

8) $\sum_{k=2}^4 \sum_{t=-4}^1 3^{k-3} \sin^2(3-t)x$

3) $\sum_{k=-3}^4 \sum_{i=4}^{24} (k+i-1)^{k+3}$

9) $\sum_{k=2}^8 (5-k)(4k-5)$

4) $\sum_{k=-5}^2 \sum_{t=3}^{n+3} \sum_{i=-4}^{n-3} (2k-t+3i+25)^{k+t-i+6}$

10) $\sum_{k=2}^5 \sum_{t=-3}^1 2^{k-3} \operatorname{tg}(2-t)x$

5) $\sum_{k=2}^8 (k+1)(2k-1)$

11) $\sum_{k=-3}^5 \sum_{t=2}^9 (\operatorname{tg} kx)^{2-t}$

6) $\sum_{k=-3}^0 \sum_{i=3}^6 \frac{e^{k+3}}{(i-3)^2}$

12) $\sum_{k=2}^7 \sum_{i=-3}^9 (2k-3i-13)$

Utilización del símbolo de sumatoria para expresar la suma de los términos de una sucesión

Efectuaremos este proceso de una forma más bien intuitiva. Sin embargo, las siguientes consideraciones nos pueden facilitar la tarea:

1) Conviene fijar desde el principio el límite o índice *inferior* de la sumatoria. La experiencia nos ayudará a hacer la elección más conveniente.

2) En una misma sucesión pueden existir cantidades que varían en distinta forma. Cada una de esas series de números se procesa por separado.

3) Si los números de una serie crecen siempre en k unidades, la variable en el término general estará multiplicada por k .

Por ejemplo, en la suma

$$S = 5 + 11 + 17 + 23 + \dots$$

los números crecen siempre en 6 unidades. Si elegimos cero como límite inferior, podríamos expresar esa suma de la siguiente forma:

$$S = \sum_{k=0}^n (6k + 5)$$

Hemos corregido el término general añadiéndole 5 unidades para que, al tomar la variable el valor cero, se obtenga el primer sumando de S .

4) Si los números de una serie decrecen siempre en k unidades, la variable en el término general estará multiplicada por $-k$.

Por ejemplo, en la suma

$$S = 90 + 83 + 76 + \dots$$

los números decrecen en 7 unidades por vez. Si elegimos nuevamente cero como límite inferior, tendremos que

$$S = \sum_{k=0}^n (90 - 7k)$$

Nuevamente hicimos una corrección sumándole 90 unidades a la variable para que, al tomar ésta el valor cero, se obtenga el primer sumando de la serie.

5) Si los signos de los sumandos son alternadamente positivos y negativos, el término general estará multiplicado por $(-1)^k$ o por $(-1)^{k+1}$.

Por ejemplo, en la suma

$$S = 5 - 9 + 13 - 17 + \dots$$

el valor absoluto de los sumandos va creciendo en 4 unidades por vez y los sumandos son alternadamente positivos y negativos. Eligiendo 1 como límite inferior, podemos expresar la suma de esta forma:

$$S = \sum_{k=1}^n (4k + 1)(-1)^{k+1}$$

Se ha multiplicado el término general por $(-1)^{k+1}$ pues, para que el primer

sumando, sea positivo, el exponente de (-1) debe ser par, cosa que se logra sumándole una unidad al límite inferior, que es impar.

Si la suma hubiese sido, en cambio,

$$S = -5 + 9 - 13 + 17 - \dots$$

expresada mediante una sumatoria sería:

$$S = \sum_{k=1}^n (4k+1)(-1)^k$$

con lo que se obtendría que el primer término fuera negativo.

6) Si en todos los términos de la suma hay alguna cantidad que permanece constante, esa cantidad no debe ser expresada con una variable.

Sea, por ejemplo,

$$S = 2^3 \cdot 5^2 + 2^4 \cdot 7^2 + 2^5 \cdot 9^2 + 2^6 \cdot 11^2 + \dots$$

En esta sucesión van variando el exponente del primer factor (en una unidad por vez) y la base del segundo factor (en dos unidades por vez). En cambio, la base del primer factor y el exponente del segundo son constantes. La suma, expresada mediante sumatoria, podría ser:

$$S = \sum_{k=3}^n 2^k (2k-1)^2$$

7) Si la suma tiene un número finito de sumandos, el límite superior de la sumatoria se calcula al final, como se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$S = \frac{6}{9 \cdot 4} + \frac{13}{17 \cdot 9} + \frac{20}{25 \cdot 14} + \frac{27}{33 \cdot 19} + \dots + \frac{510}{585 \cdot 364}$$

El numerador crece 7 unidades por vez. Los factores del denominador en 8 y 5 unidades, respectivamente, por vez. Tomando 1 como límite inferior, tenemos:

$$S = \sum_{k=1} \frac{7k-1}{(8k+1)(5k-1)}$$

Para determinar el límite superior igualamos una cualquiera de las expresiones del término general con su correspondiente en el último término. Por ejemplo,

$$7k-1 = 510$$

$$7k = 511$$

$$k = 73$$

Igual resultado hubiéramos obtenido con cualquiera de estos otros dos planteamientos:

$$8k+1 = 585 \quad \text{ó} \quad 5k-1 = 364$$

En definitiva, podemos expresar la suma así:

$$S = \sum_{k=1}^{73} \frac{7k-1}{(8k+1)(5k-1)}$$

Ejercicio 35

Expresar mediante sumatorias las siguientes sumas:

- 1) $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$
- 2) $S = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots$
- 3) $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots$
- 4) $S = 3 + 6 + 9 + 12 + \dots$
- 5) $S = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots$
- 6) $S = 2 + 5 + 8 + 11 + \dots$
- 7) $S = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 500$
- 8) $S = 4 + 7 + 10 + 13 + \dots + 271$
- 9) $S = 1 + 6 + 11 + 16 + \dots + 756$
- 10) $S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots$
- 11) $S = 50 + 49 + 48 + 47 + \dots - 150$
- 12) $S = 100 + 98 + 96 + 94 + \dots$
- 13) $S = 250 + 243 + 236 + 229 + \dots + 40$
- 14) $S = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots$
- 15) $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + \dots$
- 16) $S = 2 - 4 + 6 - 8 + \dots$
- 17) $S = 200 - 198 + 196 - 194 + \dots$
- 18) $S = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 100$
- 19) $S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$
- 20) $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots$
- 21) $S = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 - 5 \cdot 7 + \dots$
- 22) $S = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots + 50 \cdot 51$
- 23) $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + \dots$
- 24) $S = 1 \cdot 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 7 \cdot 13 - 4 \cdot 9 \cdot 17 + \dots$
- 25) $S = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 99 + 3 \cdot 98 + 4 \cdot 97 + \dots$
- 26) $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{180}{181}$
- 27) $S = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{7}{4 \cdot 7} - \frac{10}{5 \cdot 9} + \dots$
- 28) $S = \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^4}{4^3} + \frac{4^5}{5^4} + \frac{5^6}{6^5} + \dots$
- 29) $S = \frac{50}{4^{10}} - \frac{49^2}{5^9} + \frac{48^3}{6^8} - \frac{47^4}{7^7} + \dots$

$$30) \quad S = \frac{5^6}{1 \cdot 2 \cdot 5} + \frac{6^5}{2 \cdot 3 \cdot 6} + \frac{7^4}{3 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{8^3}{4 \cdot 5 \cdot 8} + \dots$$

$$31) \quad S = \frac{6^7}{1 \cdot 2^3 \cdot 5^3} + \frac{7^6}{2 \cdot 3^3 \cdot 6^4} + \frac{8^5}{3 \cdot 4^3 \cdot 7^5} + \frac{9^4}{4 \cdot 5^3 \cdot 8^6} + \dots$$

$$32) \quad -S = 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{3} + \sqrt[5]{4} + \dots$$

$$33) \quad S = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 4x + \operatorname{tg} 5x - \operatorname{tg} 6x + \dots$$

$$34) \quad S = \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{sen} 4x + \dots$$

$$35) \quad S = \operatorname{sen} x + \cos 7x + \operatorname{sen} 2x + \cos 6x + \operatorname{sen} 3x + \cos 5x + \dots$$

$$36) \quad S = \lg_2(x+5) + \lg_3(x+6) + \lg_4(x+7) + \lg_5(x+8) + \dots$$

$$37) \quad S = \sqrt[7]{7} + \sqrt[8]{8} + \sqrt[9]{9} + \sqrt[10]{10} + \sqrt[11]{11} + \sqrt{12} + 13$$

$$38) \quad S = \frac{5}{8 \cdot 2} + \frac{12}{13 \cdot 6} + \frac{19}{18 \cdot 10} + \dots + \frac{278}{203 \cdot 158}$$

$$39) \quad S = \frac{80}{5 \cdot 1} + \frac{77}{11 \cdot 8} + \frac{74}{17 \cdot 15} + \dots - \frac{100}{365 \cdot 421}$$

$$40) \quad S = -\frac{\lg_2 60}{3} + \frac{\lg_2 58}{8} - \frac{\lg_2 56}{13} + \dots - \frac{1}{148}$$

$$41) \quad S = \frac{1}{3} + \frac{\lg_2 3}{4} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{6}{65}$$

$$42) \quad S = -100 - \frac{95}{6^3} + \frac{90}{13^5} - \frac{85}{20^7} + \dots - \frac{20}{167^{49}}$$

Ejercicio 36

Ejercicios de recapitulación

En los siguientes ejercicios a_n y b_n son sucesiones.

1) Sabiendo que $\sum_{k=10}^{20} a_k = 30$ y que $\sum_{k=16}^{30} a_k = 18$, determinar $\sum_{k=10}^{15} a_k$.

2) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{100} a_k = 28$ y que $\sum_{k=1}^{100} b_k = 43$, calcular $\sum_{k=1}^{100} (4a_k - 5b_k)$.

3) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{100} (a_k)^2 = 50$, $\sum_{k=1}^{100} (b_k)^2 = 30$ y $\sum_{k=1}^{100} a_k b_k = 40$, calcular $\sum_{k=1}^{100} (a_k + b_k)^2$.

4) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{10} a_k = 12$, calcular $\sum_{k=1}^{10} (8 - 3a_k)$ y $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{a_k}{4} - 10 \right)$.

5) Calcular $\sum_{k=10}^{100} a_k$ sabiendo que $\sum_{k=10}^{100} (8 - 3a_k) = 602$.

6) Calcular $\sum_{k=1}^{100} b_k$ sabiendo que $\sum_{k=1}^{100} (4b_k - 5) = 16$.

- 7) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{15} a_k = 29$ y $\sum_{k=1}^{15} b_k = 35$, calcular $\sum_{k=1}^{15} (3a_k - 5b_k + 4)$.
- 8) Sabiendo que $\sum_{k=9}^{42} a_k = 84$ y $\sum_{k=9}^{42} b_k = -64$, calcular $\sum_{k=9}^{42} (4a_k + 5b_k + 3)$.
- 9) Sabiendo que $\sum_{k=5}^{37} (3a_k - 5) = 9$, calcular $\sum_{k=5}^{37} a_k$.
- 10) Sabiendo que $\sum_{k=7}^{21} (4a_k - 7) = 215$ y que $\sum_{k=7}^{21} (5b_k - 8) = 180$, calcular $\sum_{k=7}^{21} (2a_k + 3b_k - 11)$.
- 11) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{10} a_k = 55$, $\sum_{k=11}^{25} a_k = 270$ y $\sum_{k=1}^{30} a_k = 465$, calcular $\sum_{k=26}^{30} a_k$.
- 12) Sabiendo que $\sum_{k=0}^5 a_k = 48$, $\sum_{k=3}^{10} a_k = 128$ y $\sum_{k=0}^{10} a_k = 143$, calcular $\sum_{k=3}^5 a_k$.
- 13) Sabiendo que $\sum_{k=1}^9 a_k = 315$, $\sum_{k=5}^9 a_k = 145$ y $\sum_{k=5}^{13} a_k = 207$, calcular $\sum_{k=1}^{13} a_k$.
- 14) Sabiendo que $\sum_{k=3}^9 a_k = -2$, $\sum_{k=9}^{18} a_{k-3} = 80$ y $\sum_{k=2}^{14} a_{k+1} = 65$, calcular $\sum_{k=6}^9 a_k$.
- 15) Si a_n es una sucesión en la que $a_k = a_{k-1}$ para cualquier valor de k y $\sum_{i=1}^{50} a_i = 100$, determinar a_n .
- 16) Si a_n es una sucesión, demostrar que $\sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_1$.
- 17) Calcular $\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2 + k}$ (Sugerencia: separar el término general en fracciones simples y desarrollar).
- 18) Calcular $\sum_{k=2}^{500} \frac{1}{k^2 - 1}$.
- 19) Calcular $\sum_{k=10}^{400} \frac{1}{k^2 - 11k + 30}$.
- 20) Calcular $\sum_{k=1}^{100} \frac{2k^2 + 6k + 6}{k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k}$.

Resolver los siguientes sistemas:

$$21) \begin{cases} \sum_{k=1}^5 (kx + y) = 55 \\ \sum_{k=1}^7 (kx + y) = 98 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \sum_{k=3}^9 (x + ky + 1) = -7 \\ \sum_{k=1}^8 (2x - ky - 9) = 28 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \sum_{k=4}^{11} (x + ky - 6) = 14 \\ \sum_{k=2}^7 [3x - (2k+1)y + 5] = 72 \end{cases}$$

24)

$$\begin{cases} \sum_{k=4}^8 (x + ky - 4) = 20 \\ \sum_{k=2}^6 (xy + k) = 30 \end{cases}$$

25) Calcular $\sum_{k=1}^{200} (3k^2 + 3k + 1)$. Sugerencia: $3k^2 + 3k + 1 = (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - k^3 = (k+1)^3 - k^3$. Sustituir y desarrollar.

26) Calcular $\sum_{k=1}^{1000} (2k + 1)$

27) Calcular $\sum_{k=1}^{30} (4k^3 + 6k^2 + 4k + 1)$

28) Calcular $\sum_{k=2}^{301} (-2k + 1)$

29) Calcular $\sum_{k=2}^{200} 4k$

30) Calcular $\sum_{k=1}^{999} \lg\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

31) Calcular $\sum_{k=3}^{4096} \lg_2\left(1 - \frac{1}{k}\right)$

32) Calcular $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$

33) Calcular $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k$

34) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{45} (2k - 1) + \sum_{k=46}^{100} (2k - 1) = 10$, determinar $\sum_{k=1}^{100} (3k + 2)$.

35) Sabiendo que $\sum_{k=1}^{20} (3k - 1) + \sum_{k=21}^{40} (3k + 7) = 315$, determinar $\sum_{k=15}^{54} (4k - 50)$.

36) Sabiendo que $\sum_{k=-2}^{22} (2k + 3) + \sum_{k=31}^{55} (2k - 5) = 150$, determinar $\sum_{k=-7}^{42} (3k + 20)$.

37) Sabiendo que $\sum_{k=4}^{10} (3k - 11) + \sum_{k=8}^{13} (3k + 1) + \sum_{k=11}^{22} (3k + 4) = 22$, determinar

$$\sum_{k=6}^{30} (2k - 11).$$

El ser humano utiliza su habilidad de razonar, su lógica, de dos formas distintas. A veces aplicando a casos particulares leyes o proposiciones generales conocidas. Es el caso del silogismo. Un ejemplo de silogismo podría ser éste:

*Todos los seres humanos son mortales,
Pedro es un ser humano;
por lo tanto, Pedro es mortal.*

Otras veces se pasa de casos particulares a proposiciones generales: de la observación de un fenómeno que se repite reiteradamente, se saca una ley o generalización. Es el caso de una persona, por ejemplo, que en varias oportunidades conoce a ciudadanos chinos que lo tratan con mucha cortesía y saca esta conclusión: "*Todos los chinos son corteses*".

A pesar de que este último modo de razonar puede originar errores, la generalización es una forma usual de razonamiento en el campo de las ciencias y muchas de las grandes leyes científicas nacieron de la observación de casos particulares.

En nuestro lenguaje ordinario hablamos de *deducción* en cualquiera de las dos formas descritas de razonamiento: en el primer ejemplo *se deduce* que Pedro es mortal; en el segundo, *se deduce* que los chinos son corteses.

En matemáticas estos procesos reciben nombres diferentes: la aplicación de una proposición general a un caso particular recibe el nombre de **Deducción**; la generalización derivada de la observación de casos particulares recibe, en cambio, el nombre de **Inducción**.

En matemáticas también se usa con frecuencia la inducción. Veamos, por ejemplo, cómo determinamos, al estudiar las progresiones aritméticas, la fórmula del término general:¹

Sea la progresión 1, 4, 7, 10, 13, de razón $r = 3$

Ordenemos en columna los términos de la progresión y notemos la forma en que puede descomponerse cada uno de ellos:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 &= 1 &= a_1 \\a_2 &= 4 &= 1 + 1 \cdot 3 &= a_1 + 1 \cdot r \\a_3 &= 7 &= 1 + 2 \cdot 3 &= a_1 + 2r \\a_4 &= 10 &= 1 + 3 \cdot 3 &= a_1 + 3r \\a_5 &= 13 &= 1 + 4 \cdot 3 &= a_1 + 4r\end{aligned}$$

¹ Reproducimos una parte de la pág. 239 de nuestro libro *Selección de Temas de Matemática 4*.

Siguiendo este proceso podemos calcular cualquier término.

Pbr lo tanto

$$a_n = 1 + (n-1)3 = a_1 + (n-1)r$$

Generalizando:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

La deficiencia de esta demostración es obvia: establecimos una fórmula para unos cuantos valores de n y sacamos inmediatamente la conclusión de que esa fórmula era válida para cualquier valor entero de n en esa y en cualquier otra progresión aritmética.

Aunque en el ejemplo anterior la generalización hecha da por resultado una expresión cierta (como más tarde estaremos en capacidad de demostrar), el mismo modo de razonar puede llevarnos a un error.

Véase, por ejemplo, el siguiente caso: al calcular los diez primeros términos de la sucesión $a_n = (n-1)^2 + n + 40$ nos encontramos con que, curiosamente, todos ellos son primos. En efecto:

$$a_1 = 41$$

$$a_2 = 43$$

$$a_3 = 47$$

$$a_4 = 53$$

$$a_5 = 61$$

$$a_6 = 71$$

$$a_7 = 83$$

$$a_8 = 97$$

$$a_9 = 113$$

$$a_{10} = 131$$

¿Podemos hacer ya una generalización? Mejor no precipitarse. Calculemos cinco términos más, por si acaso:

$$a_{11} = 151$$

$$a_{12} = 173$$

$$a_{13} = 197$$

$$a_{14} = 223$$

$$a_{15} = 251$$

Todos los números que se obtienen son primos. ¡Pues no perdamos más tiempo! Saquemos nuestra conclusión:

Todos los términos de la sucesión $a_n = (n-1)^2 + n + 40$ son **primos**

Acabamos, lamentablemente, de sacar una conclusión falsa. Nuestra generalización es errónea. Si calculamos 25 términos más, todos ellos serán primos. Pero cuando calculemos el término 41 tendremos:

$$a_{41} = (41 - 1)^2 + 41 + 40 = 1681$$

que no es un número primo, pues

$$1681 = 41^2$$

Alguno podría pensar: "La falla está en no haber comprobado suficientes casos. Si en lugar de verificar 15 términos, verificamos 100 o 200, no podremos equivocarnos".

Tampoco esto es cierto: en la sucesión $a_n = 991n^2 + 1$ cualquiera sea el número de términos que calculemos, nunca en nuestra vida encontraremos un término que sea un cuadrado perfecto, pues el primer valor de n que produce un cuadrado perfecto es, nada menos, que

$$n = 12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767 \text{ (!!!)}$$

En la historia de la matemática nos encontramos con casos famosos de errores de este tipo.

Fermat, matemático francés del siglo XVII, afirmaba que todos los números del tipo

$$2^{2^n} + 1$$

eran primos. Su colega suizo **Euler**, del siglo XVIII, encontró que

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417,$$

es decir, un número compuesto. Fermat, pues, estaba equivocado.

Leibnitz, matemático y filósofo alemán del siglo XVII, demostró que, cualquiera sea el entero positivo n , el número $n^3 - n$ es divisible por 3, el número $n^5 - n$ es divisible por 5 y el número $n^7 - n$ es divisible por 7. Esta coincidencia lo llevó a pensar que, para todo k impar y todo n natural, la expresión $n^k - n$ era divisible por k . Posteriormente él mismo constató la falsedad de esta suposición cuando encontró que $2^9 - 2 = 510$ no era divisible por 9.

El matemático **D. A. Grave** afirmaba que, para todo p primo, la expresión $2^{p-1} - 1$ no era divisible por p^2 . Resultó ser falso: si $p = 1093$ (número primo) la expresión $2^{1092} - 1$ sí es divisible por 1093^2 .

Después de estudiar estos casos, podríamos sacar la siguiente conclusión:

En matemáticas no se debe nunca generalizar

¡Esta generalización también es errónea! La matemática cuenta con un poderoso instrumento que permite comprobar, sin lugar a error, si una generalización es válida o no: es la **demostración por Inducción Completa**.

Esta forma matemática de demostración comprende dos pasos:

- 1) Comprobar que una determinada proposición es válida para $n = 1$.
- 2) Demostrar que, si la proposición es válida para $n = k$, lo es también para el siguiente valor de n , es decir, para $n = k + 1$.

Si logramos demostrar que de la validez de la proposición para un valor n se desprende su validez para el siguiente valor natural, habiendo ya comprobado que la proposición es válida para $n = 1$, tenemos que concluir que lo es también para $n = 2$, el siguiente valor de n .

Pero, nuevamente, si la proposición es válida para $n = 2$, habiendo demostrado que entonces es válida también para el siguiente valor de n , tenemos que concluir que lo es también para $n = 3$.

Y, si es válida para $n = 3$, lo es también para $n = 4$, el siguiente valor de n .

Siendo válida para $n = 4$, lo es también para $n = 5$, etc.

Se establece así una cadena infinita, pues, sumando una unidad por vez, se puede alcanzar cualquier valor natural de n .

De esta forma sí podemos afirmar con todo derecho, **y sin posibilidad de equivocarnos**, que la proposición es válida para **todos los valores naturales de n** .

Podemos comparar la Inducción Completa con lo que sucede cuando disponemos las fichas del dominó en fila y a una distancia conveniente para que, si una ficha se cae, se caiga también la siguiente.

Si las piezas se disponen como se ha dicho (Fig. 1-a), la caída de la primera ficha causará la caída de la segunda (Fig. 1-b). La caída de ésta causará la caída de la tercera y, como cada ficha al caer hará caer la siguiente, el resultado final será (Fig. 1-c) que **todas** las fichas terminarán cayéndose.

Pero ¡cuidado! Para que el fenómeno se produzca exitosamente, es necesario que se cumplan dos condiciones:

1) Que las fichas estén colocadas de tal forma que la caída de una origine la caída de la siguiente.

2) Que la primera ficha de la fila se caiga.

Si una cualquiera de estas condiciones no se da, o no se cae ninguna ficha, o sólo se cae una porción de ellas.

Veamos algunos ejemplos de demostraciones por Inducción Completa:

Ejemplo 1

$$\text{Demostrar que } 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Comprobamos que la proposición es válida para $n = 1$.

En efecto:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

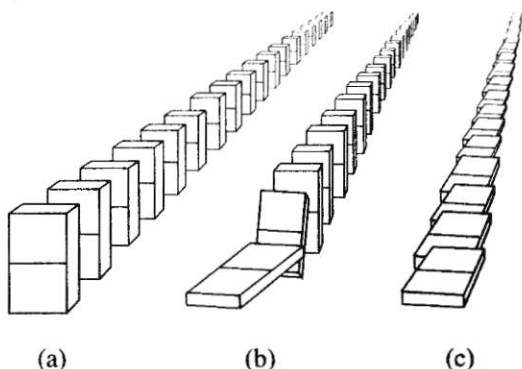


Fig. 1

Suponemos que la proposición es cierta para un valor cualquiera $n = k$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (a)$$

Tenemos que demostrar, entonces, que la proposición es válida también para el siguiente valor de n , es decir, $n = k + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k}_{\text{de la igualdad (a)}} + (k+1)$$

Sustituimos los k primeros términos por su equivalente en la igualdad (a):

$$\begin{aligned} &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \end{aligned}$$

Partiendo del primer miembro de la igualdad (b), y utilizando la igualdad (a), hemos obtenido el segundo miembro de la igualdad (b). Con esto acabamos de demostrar que, si la proposición (a) es cierta, también lo es la proposición (b), es decir, que de la validez de la proposición para $n = k$ se desprende su validez para el siguiente valor de n . Y, como ya hemos comprobado que la proposición es válida para $n = 1$, tenemos que concluir que la igualdad que teníamos que demostrar es válida para cualquier valor natural de n .

Antes de seguir adelante con más ejemplos queremos subrayar el hecho de que el método de Inducción Completa no tiene la finalidad de deducir fórmulas matemáticas sino la de demostrar si son válidas o no las fórmulas que hemos planteado por otras vías o las suposiciones que hemos hecho por la observación de fenómenos recurrentes.

Ejemplo 2

Sea la sucesión $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 7}, \frac{1}{7 \cdot 9}, \dots, \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Notemos que el primer término de la sucesión se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}$$

La suma de los dos primeros términos, así:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} = \frac{2}{2 \cdot 2 + 1}$$

La de los tres primeros términos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7} = \frac{3}{2 \cdot 3 + 1}$$

La de los cuatro primeros términos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} = \frac{140}{315} = \frac{4}{9} = \frac{4}{2 \cdot 4 + 1}$$

Todo nos induce a pensar que el fenómeno se seguirá repitiendo para la suma de los cinco, seis, siete, etc., términos y, en general, para la suma de cualquier número de términos.

Planteamos, por tanto, la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

Por Inducción Completa podemos ahora comprobar si nuestra suposición es válida.

Como ya verificamos que la igualdad es cierta para los valores 1, 2, 3 y 4 de n , no es necesario que volvamos a constatar que es válida para $n = 1$.

Es suficiente que demos-
tremos que, si la igualdad es
válida para $n = k$, lo es
también para $n = k + 1$.

Para $n = k$ tenemos:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \quad (a)$$

Tenemos que demostrar que,
entonces, esto también es
cierto para $n = k + 1$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \quad (b)$$

Tomamos el primer miem-
bro de la igualdad (b):

$$\underbrace{\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}}_{\text{de la igualdad (a)}} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Sustituimos los k primeros
términos por su equivalente
en la igualdad (a):

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{(2k+2)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{2}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\
&= \boxed{\frac{k+1}{2k+3}}
\end{aligned}$$

Logramos demostrar, utilizando la igualdad (a), que la igualdad (b) es cierta. Esto significa que, si la igualdad es válida para $n = k$, lo es también para el siguiente valor de n , es decir, $n = k + 1$. Y como ya comprobamos inicialmente que existen valores de n que satisfacen la igualdad, podemos concluir que nuestra fórmula es válida para cualquier valor natural de n .

Ejemplo 3

Demostrar que $\sum_{i=1}^n i(i+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$

La igualdad que tenemos que demostrar se puede expresar también así:

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + n(n+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

Comprobamos que es válida para $n = 1$:

$$1 \cdot 2^2 = \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8$$

$$1 \cdot 2^2 = 4$$

Suponemos que es válida para $n = k$:

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + k(k+1)^2 = \frac{1}{12} k(k+1)(k+2)(3k+5) \quad (a)$$

Demostraremos que, entonces, es válida también para $n = k + 1$:

$$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + k(k+1)^2 + (k+1)(k+2)^2 = \frac{1}{12} (k+1)(k+2)(k+3)(3k+8) \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$\underbrace{1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + \dots + k(k+1)^2}_{(a)} + (k+1)(k+2)^2$$

Sustituimos los primeros k términos por su equivalente en la igualdad (a):

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{12} k(k+1)(k+2)(3k+5) + (k+1)(k+2)^2 \\
 &= (k+1)(k+2) \left[\frac{1}{12} k(3k+5) + (k+2) \right] \\
 &= (k+1)(k+2) \left[\frac{3k^2 + 5k + 12k + 24}{12} \right] \\
 &= \frac{1}{12} (k+1)(k+2) (3k^2 + 17k + 24) \\
 &= \frac{1}{12} (k+1)(k+2) \frac{(3k+9)(3k+8)}{3} \\
 &= \boxed{\frac{1}{12} (k+1)(k+2)(k+3)(3k+8)}
 \end{aligned}$$

La proposición es, por tanto, válida para cualquier valor natural de n .

Ejemplo 4

Demostrar que

$$5 \cdot 2 \cdot 5 + 7 \cdot 5 \cdot 9 + 9 \cdot 8 \cdot 13 + \dots + (2n+3)(3n-1)(4n+1) = \frac{n}{6} (36n^3 + 140n^2 + 123n + 1)$$

Comprobamos que la proposición es válida para $n = 1$:

$$5 \cdot 2 \cdot 5 = \frac{1}{6} (36 + 140 + 123 + 1)$$

$$50 = \frac{1}{6} \cdot 300 = 50$$

Suponemos que es válida para $n = k$:

$$5 \cdot 2 \cdot 5 + 7 \cdot 5 \cdot 9 + 9 \cdot 8 \cdot 13 + \dots + (2k+3)(3k-1)(4k+1) = \frac{k}{6} (36k^3 + 140k^2 + 123k + 1) \quad (a)$$

Demostraremos que, entonces, es válida también para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
 &5 \cdot 2 \cdot 5 + 7 \cdot 5 \cdot 9 + 9 \cdot 8 \cdot 13 + \dots + (2k+3)(3k-1)(4k+1) + (2k+5)(3k+2)(4k+5) = \\
 &= \frac{(k+1)}{6} [36(k+1)^3 + 140(k+1)^2 + 123(k+1) + 1] \quad (b)
 \end{aligned}$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b) y sustituimos en ella los k primeros términos por su equivalente en la igualdad (a):

$$\frac{k}{6} (36k^3 + 140k^2 + 123k + 1) + (2k+5)(3k+2)(4k+5)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{k(36k^3 + 140k^2 + 123k + 1) + 6(2k+5)(3k+2)(4k+5)}{6} \\
 &= \frac{36k^4 + 140k^3 + 123k^2 + k + 6(24k^3 + 106k^2 + 135k + 50)}{6} \\
 &= \frac{36k^4 + 284k^3 + 759k^2 + 811k + 300}{6}
 \end{aligned}$$

Utilizando el método de Horner, escribimos el numerador en términos de $k+1$:

	36	284	759	811	300
-1		-36	-248	-511	-300
	36	248	511	300	10
-1		-36	-212	-299	
	36	212	299	11	
-1		-36	-176		
	36	176	123		
-1		-36			
	36	140			

$$= \frac{36(k+1)^4 + 140(k+1)^3 + 123(k+1)^2 + (k+1)}{6}$$

Sacando, por último, factor común:

$$= \frac{(k+1)}{6} [36(k+1)^3 + 140(k+1)^2 + 123(k+1) + 1]$$

La proposición es, por tanto, válida para cualquier valor natural de n .

Ejercicio 37

Demostrar por Inducción Completa las siguientes igualdades:

- 1) $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
- 2) $2+4+6+\dots+2n = n(n+1)$
- 3) $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$
- 4) $4+8+12+\dots+4n = 2n(n+1)$
- 5) $2+6+10+\dots+(4n-2) = 2n^2$
- 6) $2+7+12+\dots+(5n-3) = \frac{n}{2}(5n-1)$
- 7) $1+4+7+\dots+(3n-2) = \frac{n}{2}(3n-1)$
- 8) $1+3+6+\dots+\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
- 9) $2+5+8+\dots+(3n-1) = \frac{n}{2}(3n+1)$

$$10) 2+5+10+\dots+(n^2+1)=\frac{n}{6}(2n^2+3n+7)$$

$$11) 1+5+9+\dots+(4n-3)=n(2n-1)$$

$$12) 5+11+17+\dots+(6n-1)=n(3n+2)$$

$$13) 3+10+17+\dots+(7n-4)=\frac{1}{2}n(7n-1)$$

$$14) 3+11+19+\dots+(8n-5)=n(4n-1)$$

$$15) 1+11+21+\dots+(10n-9)=n(5n-4)$$

$$16) 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+5\cdot 6+\dots+(2n-1)2n=\frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$

$$17) 1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+\dots+(2n-1)(2n+1)=\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$$

$$18) 1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\dots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$19) 1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\dots+n(3n-1)=n^2(n+1)$$

$$20) 1\cdot 4+2\cdot 9+3\cdot 14+\dots+n(5n-1)=\frac{1}{3}n(n+1)(5n+1)$$

$$21) 3\cdot 2+5\cdot 5+7\cdot 8+\dots+(2n+1)(3n-1)=\frac{1}{2}n(4n^2+7n+1)$$

$$22) 1\cdot 5+4\cdot 9+7\cdot 13+\dots+(3n-2)(4n+1)=\frac{1}{2}n(8n^2+7n-5)$$

$$23) 1\cdot 1\cdot 1+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 5\cdot 7+\dots+n(2n-1)(3n-2)=\frac{1}{6}n(n+1)(9n^2-5n-1)$$

$$24) 1\cdot 4\cdot 1+3\cdot 7\cdot 5+5\cdot 10\cdot 9+\dots+(2n-1)(3n+1)(4n-3)=\frac{1}{6}n(36n^3+28n^2-33n-7)$$

$$25) 1\cdot 2\cdot 3+3\cdot 4\cdot 5+5\cdot 6\cdot 7+\dots+(2n-1)2n(2n+1)=n(n+1)(2n^2+2n-1)$$

$$26) 1\cdot n+2(n-1)+3(n-2)+\dots+n\cdot 1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

$$27) 1\cdot 2\cdot n+2\cdot 3(n-1)+3\cdot 4(n-2)+\dots+n(n+1)\cdot 1=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$28) \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

$$29) \frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\dots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

$$30) \frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$$

$$31) \frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\dots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$$

$$32) \frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 11}+\dots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$$

$$33) \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\dots+\frac{1}{n(n+2)}=\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$34) \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$35) \frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

$$36) \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{3}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$$

$$37) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{n(n^2+6n+11)}{18(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$38) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$39) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$$40) 2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$

$$41) 1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2 = \frac{1}{2}n(6n^2 - 3n - 1)$$

$$42) 1^2 + 5^2 + 9^2 + \dots + (4n-3)^2 = \frac{1}{3}n(16n^2 - 12n - 1)$$

$$43) 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$$

$$44) \sum_{i=1}^n x^{i-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

$$45) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$46) 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$$

$$47) 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)$$

$$48) 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

$$49) 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$50) 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3 = \frac{1}{4}n(27n^3 - 18n^2 - 9n + 4)$$

$$51) 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$52) 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

$$53) 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \dots + (n+1)2^{n-1} = n \cdot 2^n$$

$$54) 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1)2^n$$

$$55) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \dots + n \cdot 3^n = \frac{(2n-1) \cdot 3^{n+1} + 3}{4}$$

$$56) \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$57) \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$58) \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)$$

$$59) \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

$$60) \frac{1}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{7}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{17}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2n^2-1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

$$61) \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 3 \cdot 2^2} + \frac{5}{3 \cdot 4 \cdot 2^3} + \dots + \frac{n+2}{n(n+1)2^n} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$$

$$62) \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

$$63) \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{2^2 \cdot 2}{3 \cdot 4} + \frac{2^3 \cdot 3}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2^n \cdot n}{(n+1)(n+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$$

$$64) \sum_{i=0}^{n-1} (2^i + 3^i) = 2^n - 1 + \frac{1}{2}(3^n - 1)$$

$$65) 1 + 6 + 24 + 84 + \dots + (4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1}) = 2(3^n - 1) - 3(2^n - 1)$$

$$66) a + (a+r) + (a+2r) + \dots + [a + (n-1)r] = \frac{n[2a + (n-1)r]}{2}$$

$$67) a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a - ar^n}{1 - r}$$

$$68) \frac{1}{\lg_x 2 \cdot \lg_x 4} + \frac{1}{\lg_x 4 \cdot \lg_x 8} + \dots + \frac{1}{\lg_x 2^{n-1} \cdot \lg_x 2^n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{\lg_x^2 2}$$

$$69) \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

$$70) \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

$$71) (1+2+3+\dots+n)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

Ejercicio 38

1) Obsérvese que

$$1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por Inducción Completa.

2) Obsérvese que

$$1 = 1$$

$$1 - 4 = -(1 + 2)$$

$$1 - 4 + 9 = 1 + 2 + 3$$

$$1 - 4 + 9 - 16 = -(1 + 2 + 3 + 4)$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por Inducción Completa.

3) Obsérvese que

$$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por Inducción Completa.

4) Obsérvese que

$$1 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot 1(1+1)(1+2)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot 2(2+1)(2+2)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 3(3+1)(3+2)$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot 4(4+1)(4+2)$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por Inducción Completa.

5) Obsérvese que

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^2}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^3}\right)$$

Indúzcase la ley general y demuéstrese por Inducción Completa.

6) Hallar la ley general que simplifica el producto

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

y demuéstrese por Inducción Completa.

Ejemplo 5

Demostrar por Inducción Completa que para cualquier valor natural de n

$$3^{2n+1} + 2^{n+2} = \dot{7} \quad (\dot{7} \text{ se lee "múltiplo de 7"})$$

Comprobamos que la proposición es válida para $n = 1$:

$$3^3 + 2^3 = 27 + 8 = 35 = \dot{7}$$

Suponemos que es válida para $n = k$:

$$3^{2k+1} + 2^{k+2} = \dot{7} \quad (a)$$

Debemos demostrar que, entonces, es también válida para $n = k + 1$:

$$3^{2k+3} + 2^{k+3} = \dot{7} \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$3^{2k+3} + 2^{k+3}$$

Descomponemos ambos términos tratando de aislar la igualdad (a):

$$= 3^{2k+1} \cdot 3^2 + 2^{k+2} \cdot 2$$

$$= 9 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$$

Descomponemos 9 en $7 + 2$:

$$= (7 + 2) \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$$

$$= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 3^{2k+1} + 2 \cdot 2^{k+2}$$

Sacamos factor común en los dos últimos términos:

$$= 7 \cdot 3^{2k+1} + 2(3^{2k+1} + 2^{k+2})$$

El primer término es obviamente múltiplo de 7 y, si (a) es cierta, el segundo término también:

$$= \overset{\cdot}{7} + \overset{\cdot}{7}$$

Y la suma de dos múltiplos de 7 da como resultado un múltiplo de 7:

$$= \boxed{\overset{\cdot}{7}}$$

Ejemplo 6

Demostrar que, para todo valor natural de n , $3^{2n+2} + 2^{6n+1} = 11$

Comprobamos que la proposición es válida para $n = 1$:

$$3^4 + 2^7 = 81 + 128 = 209 = 19 \cdot 11 = 11$$

Suponemos que es válida para $n = k$:

$$3^{2k+2} + 2^{6k+1} = 11 \quad (a)$$

Debemos demostrar que, entonces, es también válida para $n = k + 1$:

$$3^{2k+4} + 2^{6k+7} = 11 \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$3^{2k+4} + 2^{6k+7}$$

Descomponemos ambos términos tratando de aislar la igualdad (a):

$$= 3^{2k+2} \cdot 3^2 + 2^{6k+1} \cdot 2^6$$

$$= 9 \cdot 3^{2k+2} + 64 \cdot 2^{6k+1}$$

Descomponemos 64 en $9 + 55$ y multiplicamos:

$$= 9 \cdot 3^{2k+2} + (9 + 55) \cdot 2^{6k+1}$$

$$= 9 \cdot 3^{2k+2} + 9 \cdot 2^{6k+1} + 55 \cdot 2^{6k+1}$$

Sacamos factor común en los dos primeros términos:

$$= 9(3^{2k+2} + 2^{6k+1}) + 55 \cdot 2^{6k+1}$$

Si la igualdad (a) es válida, el primer término es múltiplo de 11 y, dado que 55 es 11·5, el segundo término también lo es:

$$= \overset{\cdot}{11} + \overset{\cdot}{11}$$

Y la suma es múltiplo de 11:

$$= \boxed{\overset{\cdot}{11}}$$

Ejemplo 7

Demostrar que, para todo valor natural de n , $9^{n+1} - 8n + 55 = \overset{\cdot}{64}$

Comprobamos que la proposición es válida para $n = 1$:

$$9^2 - 8 + 55 = 81 - 8 + 55 = 128 = 64 \cdot 2 = \overset{\cdot}{64}$$

Suponemos que es válida para $n = k$:

$$9^{k+1} - 8k + 55 = \overset{\cdot}{64} \quad (a)$$

Debemos demostrar que, entonces, es también válida para $n = k + 1$:

$$9^{k+2} - 8(k+1) + 55 = \overset{\cdot}{64} \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$9^{k+2} - 8(k+1) + 55$$

Descomponemos tratando de aislar la expresión (a):

$$\begin{aligned} &= 9 \cdot 9^{k+1} - 8k - 8 + 55 \\ &= (8+1) \cdot 9^{k+1} - 8k - 8 + 55 \\ &= 8 \cdot 9^{k+1} + 9^{k+1} - 8k - 8 + 55 \\ &= 8 \cdot 9^{k+1} - 8 + 9^{k+1} - 8k + 55 \\ &= 8(9^{k+1} - 1) + (9^{k+1} - 8k + 55) \end{aligned}$$

Si la igualdad (a) es cierta, el segundo término es múltiplo de 64:

$$= 8(9^{k+1} - 1) + \overset{\cdot}{64} \quad (c)$$

Pero tenemos que demostrar que el primero también lo es, es decir, que

$$8(9^{k+1} - 1) = \overset{\cdot}{64}$$

o, lo que es lo mismo, que

$$9^{k+1} - 1 = \overset{\cdot}{8} \quad (d)$$

Esta demostración la hacemos también por Inducción Completa.

Comprobamos que la proposición (d) es válida para $k = 1$:

$$9^2 - 1 = 81 - 1 = 80 = \overset{\cdot}{8}$$

Suponemos su validez para $k = h$:

$$9^{h+1} - 1 = \overset{\cdot}{8} \quad (e)$$

Debemos demostrar que, entonces, es también válida para $k = h + 1$:

$$9^{h+2} - 1 = 8 \quad (f)$$

Tomamos el primer miembro de (f):

$$\begin{aligned} 9^{h+2} - 1 &= 9 \cdot 9^{h+1} - 1 \\ &= (8+1) \cdot 9^{h+1} - 1 \\ &= 8 \cdot 9^{h+1} + (9^{h+1} - 1) \end{aligned}$$

El primer término es obviamente múltiplo de 8; el segundo también, si es cierta la proposición (e):

$$\begin{aligned} &= 8 + 8 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la proposición (d).

Volviendo a la expresión (c):

$$= 8(9^{k+1} - 1) + 64$$

acabamos de demostrar que el primer término es múltiplo de 64 y, por tanto,

$$= 64 + 64$$

$$= \boxed{64}$$

La demostración del ejemplo anterior puede ser hecha más brevemente de la siguiente forma:

Prescindimos, por haberlo ya hecho, de comprobar la validez para $n = 1$.

Transcribimos las igualdades (a) y (b) resultantes de sustituir n por k y por $k + 1$, respectivamente:

$$9^{k+1} - 8k + 55 = 64 \quad (a)$$

$$9^{k+2} - 8(k+1) + 55 = 64 \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de (b):

$$\begin{aligned} 9^{k+2} - 8(k+1) + 55 &= 9 \cdot 9^{k+1} - 8k + 47 \end{aligned}$$

Tratamos de aislar la expresión (a) multiplicada por 9, es decir, la expresión

$$9 \cdot 9^{k+1} - 9 \cdot 8k + 9 \cdot 55$$

que, una vez efectuada, da

$$9 \cdot 9^{k+1} - 72k + 495$$

para lo cual:

a) restamos y sumamos $64k$ a la expresión:

$$= 9 \cdot 9^{k+1} - 72k + 47 + 64k$$

b) sumamos y restamos 448:

$$= 9 \cdot 9^{k+1} - 72k + 495 + 64k - 448$$

Sacamos factor común 9 en los tres primeros términos y 64 en los dos últimos:

$$= 9(9^{k+1} - 8k + 55) + 64(k - 7)$$

El primer término es múltiplo de 64 si es válida la proposición (a). El segundo obviamente lo es:

$$= \overset{\cdot}{64} + \overset{\cdot}{64}$$

Y la suma lo será también:

$$= \boxed{\overset{\cdot}{64}}$$

Ejemplo 8

Demostrar que, para todo valor natural de n , $n^4 + 2n^3 + n^2 = \overset{\cdot}{4}$

Comprobamos que la proposición es válida para $n = 1$:

$$1 + 2 + 1 = 4 = \overset{\cdot}{4}$$

Suponemos que es válida para $n = k$:

$$k^4 + 2k^3 + k^2 = \overset{\cdot}{4} \quad (a)$$

Debemos demostrar que, entonces, es también válida para $n = k + 1$:

$$(k+1)^4 + 2(k+1)^3 + (k+1)^2 = \overset{\cdot}{4} \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$(k+1)^4 + 2(k+1)^3 + (k+1)^2$$

Desarrollamos:

$$\begin{aligned} &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + 2(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + k^2 + 2k + 1 \\ &= \underline{k^4} + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 + \underline{2k^3} + 6k^2 + 6k + 2 + \underline{k^2} + 2k + 1 \end{aligned}$$

Agrupamos los términos subrayados, que son los que conforman la expresión (a), y sumamos los restantes:

$$\begin{aligned} &= (k^4 + 2k^3 + k^2) + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4 \\ &= (k^4 + 2k^3 + k^2) + 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \end{aligned}$$

Si la igualdad (a) es válida, el primer término es múltiplo de 4. Es evidente que el segundo también lo es:

$$= \overset{\cdot}{4} + \overset{\cdot}{4} = \boxed{\overset{\cdot}{4}}$$

Ejemplo 9

Otra forma de hacer la demostración del ejemplo anterior:

$$n^4 + 2n^3 + n^2 = 4$$

El miembro de la izquierda es factorizable:

$$n^2(n^2 + 2n + 1) = 4$$

$$n^2(n+1)^2 = 4$$

Comprobamos para $n = 1$:

$$1^2 \cdot 2^2 = 4$$

Suponemos para $n = k$:

$$k^2(k+1)^2 = 4 \quad (a)$$

Debemos demostrar que la proposición es, entonces, válida también para $n = k + 1$:

$$(k+1)^2(k+2)^2 = 4 \quad (b)$$

Tomamos el primer miembro de la igualdad (b):

$$(k+1)^2(k+2)^2$$

Desarrollamos el segundo cuadrado:

$$= (k+1)^2(k^2 + 4k + 4)$$

Multiplicamos, aplicando la propiedad distributiva:

$$= k^2(k+1)^2 + 4k(k+1)^2 + 4(k+1)^2$$

El primer término es múltiplo de 4 si la igualdad (a) es válida. Los términos restantes son obviamente múltiplos de 4:

$$= \overset{\cdot}{4} + \overset{\cdot}{4} + \overset{\cdot}{4} = \boxed{\overset{\cdot}{4}}$$

Ejercicio 39

Demostrar por Inducción Completa las siguientes igualdades o proposiciones:

1) $7^n + 5^n = 2$

6) $2^{3n} - 1 = 7$

11) $2^{4n} - 1 = 15$

2) $2^{2n} - 1 = 3$

7) $3^{2n} - 1 = 8$

12) $2^{4n+2} + 1 = 5$

3) $2^{2n+1} + 1 = 3$

8) $8^n - 5^n = 3$

13) $2^{6n+3} + 1 = 9$

4) $4^n - 1 = 3$

9) $7^n - 1 = 6$

14) $3^{2n+2} - 2^{n+1} = 7$

5) $5^n - 1 = 4$

10) $3^{4n} + 9 = 10$

15) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 17$

$$16) 5 \cdot 3^{4n+1} + 2^{6n+1} = 17$$

$$17) 25 \cdot 7^{2n-1} + 3^{4n} = 32$$

$$18) 3^{4n} - 2^{2n} = 77$$

$$19) 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24$$

$$20) 11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133$$

$$21) 10^{n+1} + 10^n + 1 = 3$$

$$22) 10^{6n} - 1 = 13$$

$$23) 4^n + 15n - 1 = 9$$

$$24) 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9$$

$$25) 7^{2n} - 48n - 1 = 2304$$

$$26) n^2 + n = 2$$

$$27) n(n+1)(n+2) = 3$$

$$28) n(n+1)(n+2) = 6$$

$$29) n^3 + 2n = 3$$

$$30) n^3 + 5n = 3$$

$$31) n^3 - n = 6$$

$$32) n(2n+1)(7n+1) = 6$$

$$33) 2n^3 + 3n^2 + 7n = 6$$

$$34) n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n = 6$$

$$35) n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = 8$$

$$36) 25n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n = 24$$

$$37) n^5 - n = 30$$

38) El producto de cuatro números enteros consecutivos es divisible por 24.

39) La suma de los cubos de tres números enteros consecutivos es siempre divisible por 9.

40) El producto de tres números pares consecutivos es siempre divisible por 48.

41) El producto de tres múltiplos consecutivos de tres números consecutivos es divisible por 162.

$$42) (n^2 - 1)n^2(n^2 + 1) = 60$$

$$43) n^7 - n = 7$$

$$44) n^7 - n = 42$$

$$45) n^2 - 1 = 8 \quad (\text{si } n \geq 3 \text{ es impar})$$

$$46) n^4 - 1 = 16 \quad (\text{si } n \geq 3 \text{ es impar})$$

$$47) n^3 - n = 24 \quad (\text{si } n \geq 3 \text{ es impar})$$

48) El producto de un cubo por el número que le precede y por el que le sigue es múltiplo de 504.

49) $\frac{1}{3}(n^3 + 2n)$ es un entero positivo.

50) $\frac{1}{3}(n^3 + 6n^2 + 2n)$ es un entero positivo.

Ejemplo 10

Demostrar por Inducción Completa que

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

El primer término de la sucesión se obtiene al sustituir por 1 el valor de n en el término general.

Comprobamos, por tanto, que la proposición es válida para $n = 1$:

$$\cos \alpha = \frac{\cos \alpha \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Suponemos para $n = k$:

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos k\alpha = \frac{\cos \frac{k+1}{2} \alpha \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (a)$$

Tenemos que probar que la proposición es, entonces, válida también para $n = k + 1$:

$$\underbrace{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots + \cos k\alpha}_{\text{de la (a)}} + \cos(k+1)\alpha = \frac{\cos \frac{k+2}{2} \alpha \sin \frac{k+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad (b)$$

Sustituimos los primeros k términos por su equivalente en la igualdad (a) y tenemos que probar entonces que:

$$\frac{\cos \frac{k+1}{2} \alpha \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} + \cos(k+1)\alpha = \frac{\cos \frac{k+2}{2} \alpha \sin \frac{k+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Más fácil se hace, dada la semejanza de los términos, probar que

$$\cos(k+1)\alpha = \frac{\cos \frac{k+2}{2} \alpha \sin \frac{k+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos \frac{k+1}{2} \alpha \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

expresión que obtuvimos pasando el primer término de la izquierda al miembro de la derecha.

Tomamos el segundo miembro de la igualdad anterior. Demostraremos que es igual al primero:

$$\frac{\cos \frac{k+2}{2} \alpha \sin \frac{k+1}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\cos \frac{k+1}{2} \alpha \sin \frac{k\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Utilizando las fórmulas de Werner, descomponemos en sumandos los numeradores de ambas fracciones:

$$= \frac{\frac{1}{2} \left[\sin \frac{2k+3}{2} \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right]}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\frac{1}{2} \left[\sin \frac{2k+1}{2} \alpha - \sin \frac{\alpha}{2} \right]}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

Sacando común denominador, multiplicando numerador y denominador por 2 y eliminando los signos de agrupación, tenemos:

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{2k+3}{2} \alpha - \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen} \frac{2k+1}{2} \alpha + \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

Reduciendo términos:

$$= \frac{\operatorname{sen} \frac{2k+3}{2} \alpha - \operatorname{sen} \frac{2k+1}{2} \alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

Factorizando el numerador:

$$= \frac{2 \cos(k+1) \alpha \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

Simplificando:

$$= \boxed{\cos(k+1) \alpha}$$

Ejemplo 11

Demostrar por Inducción Completa que

$$\operatorname{sen}^3 \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 3\alpha + \dots + \frac{1}{3^n} \operatorname{sen}^3 3^n \alpha = \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^n} \operatorname{sen} 3^{n+1} \alpha \right)$$

El primer término de la sucesión se obtiene dando a n el valor cero en el término general.

Comprobamos, por tanto, la validez de la igualdad para $n = 0$:

$$\operatorname{sen}^3 \alpha = \frac{1}{4} (3 \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 3\alpha)$$

Aplicando la fórmula de ángulo triple:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} (3 \operatorname{sen} \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha + 4 \operatorname{sen}^3 \alpha) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 4 \operatorname{sen}^3 \alpha \\ &= \operatorname{sen}^3 \alpha \end{aligned}$$

Suponemos para $n = k$:

$$\operatorname{sen}^3 \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 3\alpha + \dots + \frac{1}{3^k} \operatorname{sen}^3 3^k \alpha = \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^k} \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right) \quad (a)$$

Tenemos que demostrar que, entonces, la igualdad es válida para $n = k + 1$:

$$\underbrace{\operatorname{sen}^3 \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 3\alpha + \dots + \frac{1}{3^k} \operatorname{sen}^3 3^k \alpha}_{\text{por (a)}} + \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha = \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen} 3^{k+2} \alpha \right) \quad (b)$$

Sustituimos los k primeros términos por su equivalente en la igualdad (a):

$$\frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^k} \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right) + \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha = \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen} 3^{k+2} \alpha \right)$$

Pasamos el primer término al miembro de la derecha:

$$\frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha = \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen} 3^{k+2} \alpha \right) - \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^k} \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right)$$

Tomamos el miembro de la derecha y demostramos que es igual al de la izquierda:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen} 3^{k+2} \alpha \right) - \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^k} \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(3 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen} 3^{k+2} \alpha - 3 \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{3^k} \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen} 3^{k+2} \alpha + \frac{1}{3^k} \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$3^{k+2} \alpha = 3 \cdot 3^{k+1} \alpha$$

y sacando factor común, tenemos:

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^k} \left(-\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3 \cdot 3^{k+1} \alpha + \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right)$$

Aplicando la fórmula de ángulo triple al primer término del paréntesis:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^k} \left[-\frac{1}{3} \left(3 \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha \right) + \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^k} \left[-\operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha + \frac{4}{3} \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha + \operatorname{sen} 3^{k+1} \alpha \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3^k} \cdot \frac{4}{3} \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha \\ &= \boxed{\frac{1}{3^{k+1}} \operatorname{sen}^3 3^{k+1} \alpha} \end{aligned}$$

Ejemplo 12

Demostrar por Inducción Completa que

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2} \right) \cdot \left(\cos \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{4} \right) \cdots \left(\cos \frac{x}{2^n} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^n} \right) = \frac{\cos x}{2^n \cos \frac{x}{2^n}}$$

El primer término se obtiene dándole a n el valor 1 en el término general.

Comprobamos, pues, para $n = 1$:

$$\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2} = \frac{\cos x}{2 \cos \frac{x}{2}}$$

Aplicando la fórmula de ángulo doble:

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \cos \frac{x}{2}} \\ &= \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Suponemos para $n = k$:

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2}\right) \cdot \left(\cos \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{4}\right) \cdots \left(\cos \frac{x}{2^k} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^k}\right) = \frac{\cos x}{2^k \cos \frac{x}{2^k}} \quad (a)$$

Tenemos que demostrar que, entonces, la igualdad es también válida para $n = k + 1$:

$$\left(\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2}\right) \cdots \left(\cos \frac{x}{2^k} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^k}\right) \cdot \left(\cos \frac{x}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{\cos x}{2^{k+1} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} \quad (b)$$

Sustituimos los k primeros factores por su equivalente de la igualdad (a):

$$\frac{\cos x}{2^k \cos \frac{x}{2^k}} \cdot \left(\cos \frac{x}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{\cos x}{2^{k+1} \cos \frac{x}{2^{k+1}}}$$

Aislado el paréntesis:

$$\left(\cos \frac{x}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^{k+1}}\right) = \frac{\cos x \cdot 2^k \cos \frac{x}{2^k}}{2^{k+1} \cos \frac{x}{2^{k+1}} \cos x}$$

Tomamos el miembro de la derecha y demostramos que es igual al de la izquierda:

$$\frac{\cos x \cdot 2^k \cos \frac{x}{2^k}}{2^{k+1} \cos \frac{x}{2^{k+1}} \cos x}$$

Simplificando:

$$= \frac{\cos \frac{x}{2^k}}{2 \cos \frac{x}{2^{k+1}}}$$

Transformamos así el ángulo del numerador:

$$\frac{x}{2^k} = \frac{2x}{2 \cdot 2^k} = 2 \frac{x}{2^{k+1}}$$

Tenemos entonces:

$$= \frac{\cos 2 \frac{x}{2^{k+1}}}{2 \cos \frac{x}{2^{k+1}}}$$

Aplicando la fórmula de ángulo doble:

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{x}{2^{k+1}} - 1}{2 \cos \frac{x}{2^{k+1}}}$$

Dividiendo ambos términos:

$$= \boxed{\cos \frac{x}{2^{k+1}} - \frac{1}{2} \sec \frac{x}{2^{k+1}}}$$

Ejercicio 40

Demostrar por Inducción Completa:

- 1) $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n}{2} \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$
- 2) $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \dots + \cos(2n-1)\alpha = \frac{\sin 2n\alpha}{2 \sin \alpha}$
- 3) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin(2n-1)\alpha = \frac{\sin^2 n\alpha}{\sin \alpha}$
- 4) $\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{3\alpha}{2} + \sin \frac{5\alpha}{2} + \dots + \sin \frac{2n+1}{2} \alpha = \sin^2 \frac{n+1}{2} \alpha \csc \frac{\alpha}{2}$
- 5) $\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \pi + \dots + \sin \frac{n\pi}{3} = 2 \sin \frac{n\pi}{6} \sin \frac{(n+1)\pi}{6}$
- 6) $\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + 3 \cos 3\alpha + \dots + n \cos n\alpha = \frac{(n+1) \cos n\alpha - n \cos(n+1)\alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$
- 7) $\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + 3 \sin 3\alpha + \dots + n \sin n\alpha = \frac{(n+1) \sin n\alpha - n \sin(n+1)\alpha}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$
- 8) $1 + 2 \cos 2\alpha + 2 \cos 4\alpha + \dots + 2 \cos 2n\alpha = \csc \alpha \sin(2n+1)\alpha - 1$
- 9) $\sin \alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + \dots + \sin(\alpha + n\beta) = \frac{\sin(\alpha + \frac{n\beta}{2}) \sin \frac{(n+1)\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}}$
- 10) $\sin \alpha + \sin(\alpha + 2\beta) + \sin(\alpha + 4\beta) + \dots + \sin[\alpha + (2n-2)\beta] =$
 $= \sin[\alpha + (n-1)\beta] \sin n\beta \csc \beta$
- 11) $1 + x \cos \alpha + x^2 \cos 2\alpha + \dots + x^n \cos n\alpha = \frac{1 - x \cos \alpha - x^{n+1} \cos(n+1)\alpha + x^{n+2} \cos n\alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$
- 12) $\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 2\alpha \sin 3\alpha + \dots + \sin n\alpha \sin(n+1)\alpha = \frac{n}{2} \cos \alpha - \frac{\cos(n+2)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha}$
- 13) $\cos \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha \cos 2\alpha + \dots + \cos^n \alpha \cos n\alpha = \sin n\alpha \cos^n \alpha \operatorname{ctg} \alpha$
- 14) $\cos \alpha \sin \alpha + \cos^2 \alpha \sin 2\alpha + \dots + \cos^n \alpha \sin n\alpha = (1 - \cos^n \alpha \cos n\alpha) \operatorname{ctg} \alpha$
- 15) $\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \dots \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}$
- 16) $\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}$
- 17) $(\cos \alpha - \frac{1}{2} \sec \alpha) \cdot (\cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sec 2\alpha) \dots (\cos 2^n \alpha - \frac{1}{2} \sec 2^n \alpha) = \frac{\cos 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \cos \alpha}$
- 18) $(\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\beta}{2}) \cdot (\cos \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\beta}{4}) \dots (\cos \frac{\alpha}{2^n} + \cos \frac{\beta}{2^n}) = \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{2^n (\cos \frac{\alpha}{2^n} - \cos \frac{\beta}{2^n})}$
- 19) $\sec \alpha \sec 2\alpha + \sec 2\alpha \sec 3\alpha + \dots + \sec n\alpha \sec(n+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg}(n+1)\alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\sin \alpha}$
- 20) $\cos^2 \alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha + \dots + \cos^2 n\alpha = \frac{n}{2} + \frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha}$

- 21) $\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\alpha \sin n\alpha}{2 \sin \alpha}$
- 22) $\sin^2 \alpha + \sin^2 3\alpha + \sin^2 5\alpha + \dots + \sin^2 (2n-1)\alpha = \frac{n}{2} - \frac{\sin 4n\alpha}{4 \sin 2\alpha}$
- 23) $\sin^3 \frac{\alpha}{3} + 3 \sin^3 \frac{\alpha}{9} + 9 \sin^3 \frac{\alpha}{27} + \dots + 3^{n-1} \sin^3 \frac{\alpha}{3^n} = \frac{1}{4} \left[3^n \sin \frac{\alpha}{3^n} - \sin \alpha \right]$
- 24) $\cos^3 \alpha - \frac{1}{3} \cos^3 3\alpha + \dots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cos^3 3^{n-1} \alpha = \frac{1}{4} \left[3 \cos \alpha + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cos 3^n \alpha \right]$
- 25) $\left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{3}\right) \cdot \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{9}\right) \cdot \dots \cdot \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{3^n}}$
- 26) $2 \operatorname{tg} 2x + 4 \operatorname{tg} 4x + 8 \operatorname{tg} 8x + \dots + 2^n \operatorname{tg} 2^n x = 2 \operatorname{ctg} 2x - 2^{n+1} \operatorname{ctg} 2^{n+1} x$
- 27) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \operatorname{tg} \frac{x}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x \quad (x \neq m\pi)$
- 28) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4} + \dots + 2^{n-1} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{n-1}} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^n} = \operatorname{tg} x - 2^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$
- 29) $(1 + \sec x) \cdot (1 + \sec 2x) \cdot \dots \cdot (1 + \sec 2^{n-1} x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} 2^{n-1} x$
- 30) $\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2^n}\right) = 2^n \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$
- 31) $\left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{1}{1 - \operatorname{tg}^2 2^{n-1} \alpha}\right) = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} 2^n \alpha$
- 32) $\cos^3 \alpha + \cos^3 2\alpha + \dots + \cos^3 n\alpha = \frac{3 \cos \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos 3\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha \sin \frac{3n\alpha}{2}}{4 \sin \frac{3\alpha}{2}}$
- 33) $\sin^3 \alpha + \sin^3 2\alpha + \dots + \sin^3 n\alpha = \frac{3 \sin \frac{n+1}{2} \alpha \sin \frac{n\alpha}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\sin 3\left(\frac{n+1}{2}\right) \alpha \sin \frac{3n\alpha}{2}}{4 \sin \frac{3\alpha}{2}}$

Ejercicio 41

Ejercicios de recapitulación

Demostrar por Inducción Completa las siguientes proposiciones:

- 1) $4n^2 + 3n + 5 = 6$ (si n no es divisible por 2 ni por 3)
- 2) $7^{2n} + 7^n + 1 = 57$ (si n no es múltiplo de 3)
- 3) $(a^2 b^3 - 4a^2 b)(a^4 + a^2 - 2) = 72$
- 4) $ab(a^4 - b^4) = 240$ (si a y b son impares)
- 5) $a^n(a^4 - 1) = 60$ (si $a > 1$ y $n > 1$)
- 6) $(n^8 - 1)(n^4 - 1)(n^2 - 1)$ es divisible por 2^{12} si n es impar.
- 7) $(n^2 - 1)(n^2 - 4) = 36$ (si n no es múltiplo de 3)

- 8) $n^2 - 1 \neq 24$ (si $n \geq 5$ es primo)
- 9) $n^4 - 5n^2 + 4 \neq 360$ (si $n \geq 5$ es primo)
- 10) $n^2 + 1 \neq 3$
- 11) $n^2 + n - 1 \neq 3$
- 12) $n^2 - n - 1 \neq 3$
- 13) $8n^2 - 3n + 6 \neq 5$
- 14) $3n^2 + 2n + 1 \neq 5$
- 15) $n^4 + 1 \neq 5$
- 16) $n^4 + 2 \neq 5$
- 17) $n^4 + 3 \neq 5$
- 18) $n^4 + n^2 + 1 \neq 5$
- 19) $n^4 + n^3 - 1 \neq 5$
- 20) El término n -simo de una progresión aritmética se determina por la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$.
- 21) El término n -simo de una progresión geométrica se determina por la fórmula $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.
- 22) La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es $(n-2) \cdot 180^\circ$.
- 23) El número de diagonales de un polígono de n lados es $\frac{1}{2}n(n-3)$.
- 24) $\text{arc ctg } 3 + \text{arc ctg } 5 + \dots + \text{arc ctg } (2n-1) =$
 $= \text{arc tg } 2 + \text{arc tg } \frac{3}{2} + \dots + \text{arc tg } \frac{n+1}{n} - n \text{ arc tg } 1$
- 25) $(\text{Cis } \alpha)^n = \text{Cis } n\alpha$
- 26) $10^{6n} - 1 \neq 13$
- 27) $n^9 + n^7 - 7n^5 - n^3 + 6n = 6720$
- 28) $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2}) = 3804$
- 29) $(n^5 - n)(n^4 + n^2 - 6) = 210$
- 30) Si n es entero, $\frac{(2n+1)^2 - 1}{8}$ también es entero.
- 31) Si n es entero, $\frac{(2n+1)^3 - (2n+1)}{24}$ también es entero.

Factorial de un número

Se denomina **factorial** de un número natural n al producto de una serie de factores decrecientes en una unidad cada vez, el primero de los cuales es n y el último 1.

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

De esta forma

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

(La expresión $7!$ se lee "7 factorial" o "factorial de 7").

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$$

El símbolo $!$ que se usa para indicar el factorial de un número se debe al matemático **Kramp**.

Ejercicio 42

Calcular:

- | | |
|---------|----------|
| 1) $5!$ | 5) $3!$ |
| 2) $4!$ | 6) $12!$ |
| 3) $6!$ | 7) $9!$ |
| 4) $2!$ | 8) $11!$ |

La descomposición en factores de una cantidad factorial se puede detener de acuerdo a la conveniencia de las circunstancias.

Cualquiera de las expresiones siguientes es equivalente a $12!$:

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$$

$$12 \cdot 11!$$

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!$$

$$12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!$$

Ejercicio 43

Desarrollar las siguientes cantidades factoriales deteniendo el proceso después del tercer factor:

- | | | |
|----------|-------------|-------------|
| 1) $10!$ | 3) $8!$ | 5) $(a-2)!$ |
| 2) $15!$ | 4) $(x+9)!$ | 6) $(m+6)!$ |

- | | | |
|---------------|----------------|----------------|
| 7) $(a-7)!$ | 12) $(4m-1)!$ | 17) $(7-x)!$ |
| 8) $(m+2)!$ | 13) $a!$ | 18) $(2+x)!$ |
| 9) $(x+3)!$ | 14) $(m+n+7)!$ | 19) $(m+n)!$ |
| 10) $(a+4)!$ | 15) $(m+n-5)!$ | 20) $(m-n+1)!$ |
| 11) $(5x+3)!$ | 16) $(m-n+3)!$ | |

Ejercicio 44

Transformar los siguientes productos en factoriales:

- 1) $7 \cdot 6 \cdot 5!$
- 2) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!$
- 3) $(m-1)(m-2)(m-3)!$
- 4) $90 \cdot 8!$
- 5) $56 \cdot 6!$
- 6) $4 \cdot 3 \cdot 2$
- 7) $132 \cdot 10!$
- 8) $(m+n+1)(m+n)!$
- 9) $(m+n)(m+n+1)(m+n-1)!$
- 10) $(m-n)(m-n+1)(m-n+2)(m-n-1)!$
- 11) $840 \cdot 3!$
- 12) $3024 \cdot 5!$
- 13) $m!(m+1)(m+2)$
- 14) $(x^3 - x)(x-2)!$
- 15) $(a+1)!(a^2 + 5a + 6)$
- 16) $4536 \cdot 80$
- 17) $72 \cdot 70$
- 18) 720
- 19) $2520 \cdot 15840$
- 20) $73920 \cdot 6480$
- 21) $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)x!$
- 22) $(a-1)!(a^3 + 3a^2 + 2a)$
- 23) $(x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x)(x-4)!$
- 24) $(8x^3 + 24x^2 + 22x + 6)(2x)!$
- 25) $m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+2)(m-n+1)(m-n)!$
- 26) Expresar el siguiente producto como producto de dos factoriales:
 $10! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$
- 27) Expresar el siguiente producto como producto de dos
 $45 \cdot 24 \cdot 22 \cdot 20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14$

- 28) Expresar el siguiente producto como producto de dos factoriales:
 $32 \cdot 33 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 42 \cdot 48 \cdot 60$
- 29) Expresar el siguiente producto como producto de tres factoriales:
 $35 \cdot 36 \cdot 40 \cdot 48 \cdot 54 \cdot 60 \cdot 63 \cdot 64$
- 30) Expresar el siguiente producto como producto de tres factoriales:
 $44 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50 \cdot 54 \cdot 56 \cdot 84$
- 31) Expresar el siguiente producto como producto de cuatro factoriales:
 $50 \cdot 52 \cdot 54 \cdot 55 \cdot 56 \cdot 60 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 72 \cdot 96$
- 32) Expresar el número 522.547.200 como el producto de cuatro factoriales.
- 33) Verificar la siguiente igualdad: $3! \cdot 5! \cdot 7! = 10!$
- 34) Verificar la siguiente igualdad: $2! \cdot 8! \cdot 13! = 4! \cdot 16!$

Simplificación de fracciones que contienen factoriales

Los siguientes son ejemplos de fracciones que contienen factoriales y que pueden ser simplificadas sin necesidad de desarrollar por completo los factoriales.

Ejemplo 1

Simplificar $\frac{7! \cdot 15!}{12! \cdot 9!}$

Descomponemos en factores el 15! hasta llegar a 12!. De la misma forma el 9! hasta llegar a 7!:

$$= \frac{7! \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{12! \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}$$

Simplificando las cantidades factoriales:

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{9 \cdot 8}$$

Simplificando todavía:

$$= \frac{5 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 4} = \boxed{\frac{455}{12}}$$

Ejemplo 2

Simplificar $\frac{22! + 21!}{20! + 19!}$

Descomponemos en factores los factoriales del numerador y el primero del denominador hasta llegar en todos ellos hasta 19!:

$$= \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19! + 21 \cdot 20 \cdot 19!}{20 \cdot 19! + 19!}$$

Dividiendo cada término por 19!:

$$= \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 + 21 \cdot 20}{20 + 1}$$

$$= \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 + 21 \cdot 20}{21}$$

Dividiendo todos los términos por 21:

$$= 22 \cdot 20 + 20 = 440 + 20 = \boxed{460}$$

Ejercicio 45

Simplificar las siguientes fracciones desarrollando sólo lo indispensable:

1) $\frac{7!}{5!}$

2) $\frac{8!}{4!}$

3) $\frac{6!}{8!}$

4) $\frac{11!}{13!}$

5) $\frac{5! \cdot 13!}{12! \cdot 7!}$

6) $\frac{6! \cdot 15! \cdot 10!}{9! \cdot 8! \cdot 14!}$

7) $\frac{15! + 14!}{13!}$

8) $\frac{17^2 \cdot 15!}{17! + 16! + 15!}$

9) $\frac{22! + 23! + 24! + 25!}{24 \cdot 22!}$

10) $\frac{31! + 32! + 33! + 34!}{31! + 32!}$

11) $\frac{10! + 11! + 12!}{12! + 13! + 14!}$

12) $\frac{13(14! + 13!)}{15(11! + 12! + 13!)}$

Ejemplo 3

Simplificar $\frac{(x+1)!}{x(x-2)!}$

Descomponemos en factores el factorial del numerador hasta alcanzar el del denominador:

$$= \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)!}{x(x-2)!}$$

Simplificando:

$$= \boxed{(x+1)(x-1)}$$

Ejemplo 4

Simplificar $\frac{(x+7)! - 12(x+5)!}{(x+7)! - (x+6)! - 9(x+5)!}$

Descomponemos en factores el primer factorial del numerador y los dos primeros del denominador hasta alcanzar $(x+5)!$ en cada uno de ellos:

$$= \frac{(x+7)(x+6)(x+5)! - 12(x+5)!}{(x+7)(x+6)(x+5)! - (x+6)(x+5)! - 9(x+5)!}$$

Dividiendo todos los términos por $(x+5)!$:

$$= \frac{(x+7)(x+6)-12}{(x+7)(x+6)-(x+6)-9}$$

Desarrollando:

$$= \frac{x^2 + 13x + 42 - 12}{x^2 + 13x + 42 - x - 6 - 9}$$

$$= \frac{x^2 + 13x + 30}{x^2 + 12x + 27}$$

Factorizando:

$$= \frac{(x+10)(x+3)}{(x+9)(x+3)}$$

Simplificando:

$$= \boxed{\frac{x+10}{x+9}}$$

Ejercicio 46

Simplificar las siguientes fracciones:

1) $\frac{(x+2)!}{x!}$

9) $\frac{(x+7)!(x-4)!}{(x-3)!(6+x)!}$

2) $\frac{(x-5)!}{(x-4)!}$

10) $\frac{(x+5)!(x-6)!x!}{(x-1)!(x+6)!(x-5)!}$

3) $\frac{(x-3)!}{(x-5)!}$

11) $\frac{(x+5)!+(x+4)!}{(x+4)!+2(x+3)!}$

4) $\frac{x!}{x(x-2)!}$

12) $\frac{(x-2)!+(x-3)!+(x-4)!}{(x-4)!+(x-3)!}$

5) $\frac{(x+5)!}{(x+4)(x+3)!}$

13) $\frac{(x-3)!-2(x-5)!}{(x-3)!+(x-4)!-3(x-5)!}$

6) $\frac{(x+7)!}{(x+6)(x+7)!}$

14) $\frac{(x-2)!+(x-3)!-8(x-5)!}{(x-3)!+4(x-4)!+8(x-5)!}$

7) $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)!}$

15) $\frac{(x+4)!-2(x+2)!+12(x+1)!-20x!}{(x+3)!-2(x+2)!+4(x+1)!-4x!}$

8) $\frac{(7-x)!}{(5-x)!}$

16) $\frac{(x^2-16)!(x+3)!}{(x+4)!(x^2-17)!}$

Teoría Combinatoria

La Teoría Combinatoria es la rama de la Matemática que estudia la cantidad de grupos distintos que se pueden formar con un número dado de elementos, distinguiéndose cada grupo de los restantes por algunas condiciones que se dan en cada caso para la formación de los mismos.

Dependiendo de estas condiciones, estudiaremos tres tipos de agrupaciones que reciben los nombres de **Permutaciones**, **Variaciones** y **Combinaciones**.

Teorema Fundamental

Si un primer evento puede ocurrir de m formas diferentes y, después de que éste ocurra, un segundo evento puede ocurrir de n formas diferentes, entonces el número de formas diferentes en que puede ocurrir la secuencia de los dos eventos es igual a $m \cdot n$.

Ejemplo 5

Si para el cargo de Presidente de una organización cualquiera se presentan tres candidatos (A , B y C) y para el de Vicepresidente se presentan otros cuatro (M , N , P y Q), existen $3 \cdot 4 = 12$ posibles parejas de Presidente y Vicepresidente.

Las parejas que podrían formarse son las siguientes:

AM	BM	CM
AN	BN	CN
AP	BP	CP
AQ	BQ	CQ

Ejemplo 6

Si en una librería disponen de tres libros distintos de Algebra (A_1 , A_2 , A_3), dos de Biología (B_1 , B_2) y cuatro de Contabilidad (C_1 , C_2 , C_3 , C_4), existen $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$ formas distintas de comprar tres libros, uno de cada materia. Esas formas son las siguientes:

$A_1 B_1 C_1$	$A_2 B_1 C_1$	$A_3 B_1 C_1$
$A_1 B_1 C_2$	$A_2 B_1 C_2$	$A_3 B_1 C_2$
$A_1 B_1 C_3$	$A_2 B_1 C_3$	$A_3 B_1 C_3$
$A_1 B_1 C_4$	$A_2 B_1 C_4$	$A_3 B_1 C_4$
$A_1 B_2 C_1$	$A_2 B_2 C_1$	$A_3 B_2 C_1$
$A_1 B_2 C_2$	$A_2 B_2 C_2$	$A_3 B_2 C_2$
$A_1 B_2 C_3$	$A_2 B_2 C_3$	$A_3 B_2 C_3$
$A_1 B_2 C_4$	$A_2 B_2 C_4$	$A_3 B_2 C_4$

Permutaciones

Estudiaremos el primer tipo de agrupaciones distintas que se pueden formar con n elementos a través de un problema práctico: ¿de cuántas formas distintas pueden ocupar sitio cinco personas en un banco de un parque en el que pueden sentarse, precisamente, cinco personas?

Si numeramos del 1 al 5 los puestos del banco, es evidente que para ocupar el primer sitio podemos elegir a cualquiera de las cinco personas, por lo que tenemos 5 opciones.

Una vez ocupado el primer puesto, para ocupar el segundo, tenemos 4 opciones, pues son cuatro las personas que quedan de pie.

Ocupados los dos primeros puestos, quedan tres personas para elegir a la que ocupará el tercer puesto.

Para ocupar el cuarto puesto tendremos que elegir entre las dos personas restantes.

Y el quinto puesto será para la última persona que quede.

Resumiendo: para elegir la forma en que las cinco personas ocuparán su sitio en el banco tenemos:

- 5 opciones para asignar el primer puesto
- 4 opciones para asignar el segundo puesto
- 3 opciones para asignar el tercer puesto
- 2 opciones para asignar el cuarto puesto
- 1 opción para asignar el quinto puesto

De acuerdo con el Teorema Fundamental antes enunciado, el número total de formas en que pueden colocarse las cinco personas en el banco será

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ formas distintas.}$$

Obsérvese que el primer miembro de la igualdad anterior es el desarrollo de $5!$

Es fácil deducir por el ejemplo estudiado que, para colocar n personas en un banco de n puestos, las opciones que tenemos son las siguientes:

- n opciones para asignar el primer puesto
- $n - 1$ opciones para asignar el segundo puesto
- $n - 2$ opciones para asignar el tercer puesto
- ...
- 2 opciones para asignar el penúltimo puesto
- 1 opción para asignar el último puesto

y que el número total de formas en que podrán colocarse las n personas en el banco será igual a

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

es decir, a

$n!$

Las distintas ordenaciones que podemos formar con n objetos de tal forma que en cada ordenación intervengan todos ellos recibe el nombre de **Permutación** de n objetos y ésta se simboliza así: P_n .

En una permutación de n objetos, *una ordenación difiere de otra exclusivamente por el orden de colocación de los objetos*. El número total de ordenaciones se calcula por la siguiente fórmula:

$$P_n = n!$$

(1^c)

Ejercicio 47

Determinar el valor de las siguientes expresiones:

1) P_7

5) P_{13}

8) P_{x+1}

2) P_{10}

6) P_6

9) P_{2n-1}

3) P_2

7) P_n

10) P_{3-x}

4) P_8

Variaciones

Procederemos, para el estudio de este otro tipo de agrupaciones, con otro problema ilustrativo.

De un grupo de 7 personas debemos elegir un Presidente, un Vicepresidente y un Secretario. ¿De cuántas formas distintas se puede conformar esta junta?

Para ocupar el cargo de Presidente podemos elegir una cualquiera de las 7 personas, por lo que tenemos 7 opciones distintas.

Una vez nombrado el Presidente, el Vicepresidente puede ser elegido entre las 6 personas restantes.

Ocupados los dos primeros cargos, el Secretario puede ser elegido entre las 5 personas que quedan.

Tenemos, pues,

7 opciones para el cargo de Presidente

6 opciones para el cargo de Vicepresidente

5 opciones para el cargo de Secretario

Por el Teorema Fundamental, el número de posibles juntas es

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

Para un número m de candidatos y para un número n de cargos se nos presentan las siguientes opciones:

m	opciones para el primer cargo
$m - 1$	opciones para el segundo cargo
$m - 2$	opciones para el tercer cargo
⋮	
$m - n + 2$	opciones para el penúltimo cargo
$m - n + 1$	opciones para el último cargo

y el total de posibles juntas de n cargos que se pueden formar con las m personas disponibles es

$$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)$$

Las distintas ordenaciones que podemos formar en estas condiciones con m personas tomando n de ellas, recibe el nombre de **Variación de m elementos tomados de n en n** , y se simboliza así: $V_{m,n}$. El número total de estas ordenaciones es

$$V_{m,n} = \underbrace{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)}_{n \text{ factores}} \quad (2^c)$$

En una variación, *una ordenación difiere de otra por el orden en que se toman los elementos o por tener algún elemento distinto*.

En efecto, en el ejemplo anterior, la junta en la que A es Presidente, B es Vicepresidente y C es Secretario es distinta a la junta en la que B es Presidente, C es Vicepresidente y A es Secretario y es distinta también a la junta en la que esos cargos son ocupados por A , B y D .

El cálculo de una variación se facilita teniendo en cuenta que el desarrollo de $V_{m,n}$ es igual al producto de n factores decrecientes en una unidad por vez, siendo m el primero de ellos, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 7

Calcular $V_{7,4}$

La variación pedida es equivalente al producto de 4 factores decrecientes en una unidad por vez siendo 7 el primer factor:

$$V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \boxed{840}$$

Ejemplo 8

Calcular $V_{x+2,6}$

La variación pedida es equivalente al producto de 6 factores decrecientes en una unidad por vez siendo $(x+2)$ el primer factor:

$$V_{x+2,6} = \boxed{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)}$$

Ejercicio 48

Calcular las siguientes variaciones:

1) $V_{6,2}$

5) $V_{8,3}$

9) $V_{x+1,4}$

2) $V_{x,2}$

6) $V_{9,2}$

10) $V_{11,3}$

3) $V_{7,1}$

7) $V_{10,4}$

11) $V_{m+n-1,2}$

4) $V_{x+3,3}$

8) $V_{7-x,2}$

12) $V_{m-n+1,2}$

Fórmula factorial de las variacionesTomemos la fórmula (2^c):

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)$$

Si multiplicamos y dividimos por $(m-n)!$ tenemos:

$$V_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)(m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!}$$

En esta expresión el numerador es igual a $m!$, por lo cual:

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \quad (3^c)$$

La fórmula (3^c) nos permitirá desarrollar una variación en los casos en los que el valor de n sea desconocido.**Ejemplo 9**Desarrollar $V_{x+5,x+3}$ Utilizando (3^c):

$$\begin{aligned} V_{x+5,x+3} &= \frac{(x+5)!}{(x+5-x-3)!} \\ &= \frac{(x+5)!}{2!} = \boxed{\frac{(x+5)!}{2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 49

Desarrollar las siguientes variaciones:

1) $V_{7,n}$

5) $V_{2x-3,x-1}$

8) $V_{m-n,4-n}$

2) $V_{x+4,x+1}$

6) $V_{m+n,m-n}$

9) $V_{m+n+p,p+n}$

3) $V_{x-3,x-5}$

7) $V_{m+n,n-3}$

10) $V_{m-n+p,p+n}$

4) $V_{x,x-4}$

Combinaciones

Estudiaremos también este último tipo de ordenaciones a través de un ejemplo ilustrativo.

De un grupo de 7 personas se necesita elegir 3 para trasladar unos bultos. ¿De cuántas formas distintas puede estar compuesto este equipo de tres personas?

Este problema se diferencia del problema que estudiamos en la pág. 190 en que, en el ejemplo de la variación, la junta formada por *A* Presidente, *B* Vicepresidente y *C* Secretario era distinta de la formada por *B* Presidente, *C* Vicepresidente y *A* Secretario o de cualquier junta formada por cualquier ordenación distinta de los mismos elementos; en nuestro ejemplo, en cambio, el equipo compuesto por las personas *A*, *B* y *C* no difiere del equipo formado por *B*, *C* y *A*.

En aquel ejemplo, el orden en que se tomaban los elementos determinaba la formación de juntas distintas; en éste, no: sólo tendremos un equipo distinto si se cambia alguna de las personas que lo conforman.

Una variación es, pues, el producto de todas las ordenaciones distintas que se pueden obtener cambiando algún elemento por la permutación de esos elementos.

Una **Combinación** (así se denomina el caso de nuestro problema) es el conjunto de ordenaciones que se pueden obtener de tal forma que *una ordenación sea distinta de otra sólo si tiene algún elemento diferente*.

Para calcular una combinación basta, entonces, tomar la variación de esos elementos y dividirla por la permutación de los mismos:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} \quad (4^c)$$

Si sustituimos en el numerador y en el denominador del miembro de la derecha por sus equivalentes de las fórmulas (2^c) y (1^c), respectivamente, tendremos:

$$C_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots (m-n+2)(m-n+1)}{n!} \quad (5^c)$$

El resultado de una combinación de *m* elementos tomados de *n* en *n* será, pues, el producto de *n* factores decrecientes en una unidad por vez, siendo *m* el primero de ellos, dividido por *n*!

En nuestro ejemplo, el total de equipos distintos de tres personas que se pueden formar con las siete personas disponibles será $C_{7,3}$.

La combinación que debemos calcular es equivalente al producto de 3 factores decrecientes en una unidad por vez siendo 7 el primer factor y dividido por 3!:

$$\begin{aligned} C_{7,3} &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \boxed{35} \end{aligned}$$

Ejemplo 10

Calcular $C_{x+3,4}$

La combinación que debemos calcular es equivalente al producto de 4 factores decrecientes siendo $x + 3$ el primer factor y dividido por $4!$:

$$C_{x+3,4} = \frac{(x+3)(x+2)(x+1)x}{4!}$$

$$= \frac{(x+3)(x+2)(x+1)x}{24}$$

Ejercicio 50

Desarrollar las siguientes combinaciones:

1) $C_{5,2}$

5) $C_{12,2}$

9) $C_{x,5}$

2) $C_{6,3}$

6) $C_{m,3}$

10) $C_{11,4}$

3) $C_{10,3}$

7) $C_{x+7,1}$

11) $C_{m+n+1,3}$

4) $C_{9,4}$

8) $C_{2x+1,3}$

12) $C_{m+p,2}$

Fórmula factorial de las combinaciones

Si en la fórmula (4^C) sustituimos el numerador y el denominador de la derecha por sus equivalentes de las fórmulas (3^C) y (1^C), respectivamente, tenemos que

$$C_{m,n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!}$$

$$C_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)! n!}$$

(6^C)

Esta fórmula nos permitirá, como en el caso de la fórmula (3^C), desarrollar una combinación cuando el valor de n sea desconocido.

Ejemplo 11

Desarrollar $C_{x+6,x+4}$

Utilizando (6^C):

$$C_{x+6,x+4} = \frac{(x+6)!}{(x+6-x-4)!(x+4)!}$$

Desarrollando el factorial del numerador:

$$= \frac{(x+6)(x+5)(x+4)!}{2! (x+4)!} = \frac{(x+6)(x+5)}{2}$$

Ejercicio 51

Desarrollar y simplificar las siguientes combinaciones:

1) $C_{3,n}$

5) $C_{2x+3,x-1}$

9) $C_{m+n,n-1}$

2) $C_{x,x-3}$

6) $C_{7,n-1}$

10) $C_{m-9,m-10}$

3) $C_{x+4,x}$

7) $C_{5,x-2}$

11) $C_{m+n-p,n-p}$

4) $C_{x-5,x-6}$

8) $C_{x+7,x+6}$

12) $C_{m-n+p,n+p}$

Combinaciones equivalentes

Dos combinaciones, C_{m,n_1} y C_{m,n_2} , son equivalentes si $n_1 + n_2 = m$.

En efecto:

$$C_{m,n_1} = \frac{m!}{(m-n_1)! n_1!}$$

Pero

$$n_1 = m - n_2$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} &= \frac{m!}{(m-m+n_2)! (m-n_2)!} \\ &= \frac{m!}{n_2! (m-n_2)!} \end{aligned}$$

Y la expresión anterior es el desarrollo de

$$= C_{m,n_2}$$

Se suele resumir esta propiedad mediante la siguiente igualdad:

$$C_{m,n} = C_{m,m-n}$$

(7^c)

Son ciertas, por la propiedad anterior, las siguientes igualdades:

$$C_{15,7} = C_{15,8}$$

$$C_{20,15} = C_{20,5}$$

$$C_{7,1} = C_{7,6}$$

etc. Y podemos aprovechar esta propiedad para facilitar en algunas ocasiones el cálculo de combinaciones.

Ejemplo 12

Calcular: $C_{50,48}$

La combinación a calcular es equivalente a esta otra:

$$= C_{50,2}$$

Desarrollando ésta:

$$= \frac{50 \cdot 49}{2} = \boxed{1225}$$

Ejercicio 52

Calcular las siguientes combinaciones:

1) $C_{20,18}$

5) $C_{10,8}$

9) $C_{200,198}$

2) $C_{17,14}$

6) $C_{100,98}$

10) $C_{62,61}$

3) $C_{55,53}$

7) $C_{70,66}$

11) $C_{20,14}$

4) $C_{26,25}$

8) $C_{33,30}$

12) $C_{18,12}$

Factorial de cero: 0!

El valor de toda combinación en la que m y n son cantidades iguales es la unidad. En efecto:

$$C_{5,5} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5!} = 1$$

$$C_{7,7} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7!} = 1$$

En general:

$$C_{m,m} = \frac{m(m-1)(m-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{m!} = 1$$

Pero si calculamos cualquiera de esas expresiones por la fórmula (6^c), nos encontramos con lo siguiente:

$$C_{m,m} = \frac{m!}{(m-m)! m!} = \frac{m!}{0! m!} = \frac{1}{0!}$$

Sabemos que $C_{m,m} = 1$; por lo tanto la expresión $\frac{1}{0!}$ es igual a la unidad y esto sólo puede ser cierto si $0!$ es igual a 1.

En consecuencia

$$0! = 1$$

Podemos, entonces, calcular también expresiones como $C_{5,0}$, $C_{10,0}$, etc., que no podrían ser calculadas con la fórmula (5^c):

$$C_{m,0} = \frac{m!}{(m-0)! 0!} = \frac{m!}{m! 0!} = 1$$

Toda combinación en la que

$$n = 0$$

ó $n = m$

es igual a la unidad.

$$C_{m,m} = C_{m,0} = 1$$

(8^c)

Ejercicio 53

Calcular las siguientes expresiones:

$$1) \frac{C_{8,4} \cdot V_{7,3}}{C_{7,4} \cdot C_{10,6}}$$

$$2) \frac{C_{14,12} \cdot C_{15,15} \cdot P_3}{V_{13,2} \cdot C_{7,5}}$$

$$3) \frac{C_{10,3}(C_{11,4} - C_{10,5})}{C_{13,11} \cdot V_{5,4} \cdot C_{12,0}}$$

$$4) \frac{C_{10,4} + C_{8,6} + C_{6,4}}{V_{4,2} + V_{5,2} + V_{6,2} + V_{7,2}}$$

$$5) \frac{V_{m+2,3}}{C_{m+2,3} \cdot P_3}$$

$$6) \frac{C_{3,x} \cdot P_x \cdot P_{2-x}}{6}$$

$$7) \sum_{k=2}^7 C_{k,2}$$

$$8) \sum_{k=3}^8 (-1)^k C_{k,3}$$

$$9) \sum_{k=0}^5 C_{k+5,5-k}$$

$$10) \sum_{k=0}^6 (-1)^k C_{10,6-k}$$

$$11) \sum_{k=1}^5 {}^{\lg 2k} C_{4,k-1}$$

Relación entre m y n en las fórmulas combinatorias

Siendo m y n , respectivamente, el número total de elementos de los que se dispone y el número de elementos que entran en cada ordenación, es obvio que m y n deben ser cantidades *enteras* y *positivas* (n puede ser también igual a cero tratándose de combinaciones, como ya hemos visto).

Por otra parte, el número total de elementos debe ser mayor o, por lo menos, igual al de los que entran en cada ordenación. Tratándose de variaciones, m debe ser mayor que n , pues, de ser iguales, la expresión se transforma en una permutación: $V_{m,m} = P_m$.

Resumiendo:

para las variaciones ($V_{m,n}$)

$$m > 1 \quad (m \in N)$$

$$n > 0 \quad (n \in N)$$

$$m > n$$

para las combinaciones ($C_{m,n}$)

$$m \geq 1 \quad (m \in N)$$

$$n \geq 0 \quad (n \in N)$$

$$m \geq n$$

(9^c)

Ecuaciones que contienen expresiones combinatorias

Para resolver ecuaciones que contienen expresiones combinatorias es necesario, en la mayoría de los casos, desarrollar éstas. Al terminar de resolver las ecuaciones es necesario verificar si las soluciones obtenidas satisfacen las condiciones resumidas en (9^c).

Ejemplo 13

Resolver: $V_{x-5,2} = 72$

Desarrollando la variación: $(x-5)(x-6) = 72$

Multiplicando y reduciendo términos semejantes: $x^2 - 11x + 30 = 72$

$$x^2 - 11x - 42 = 0$$

Factorizando: $(x-14)(x+3) = 0$

$$\boxed{x_1 = 14} \quad x_2 = -3 \text{ (Inadmisible)}$$

Se puede resolver también esta ecuación aprovechando la circunstancia de que, una vez desarrollada la variación, tenemos en el miembro de la izquierda dos factores consecutivos decrecientes, cosa que podemos obtener también en el miembro de la derecha. El valor de la incógnita se halla igualando cualquiera de los factores del miembro de la izquierda con su correspondiente del miembro derecho.

La resolución del ejemplo anterior por este método sería como se muestra a continuación:

Desarrollando la variación: $(x-5)(x-6) = 72$

Transformando el miembro de la derecha en un producto de dos factores consecutivos decrecientes: $(x-5)(x-6) = 9 \cdot 8$

Igualando el primer factor del miembro de la izquierda con el primero del de la derecha: $x-5 = 9$

$$\boxed{x = 14}$$

Nota: este método no es válido para resolver una ecuación de segundo grado, pues una ecuación de segundo grado tiene dos raíces, ambas de igual importancia, y este método simplificado ignora una de ellas. Sin embargo lo seguiremos utilizando en las ecuaciones que contienen expresiones combinatorias porque el valor o los valores (en el caso de ecuaciones de grado mayor que dos) ignorados, al ser sustituidos en las expresiones combinatorias, dan origen a valores negativos para m o valores que hacen que m sea menor que n .

Ejemplo 14

Resolver: $C_{x+9,2} = 6$

Desarrollando la combinación: $\frac{(x+9)(x+8)}{2} = 6$

Multiplicando por 2: $(x+9)(x+8) = 12$

Transformando el miembro de la derecha en un producto de dos factores consecutivos decrecientes:

$$(x+9)(x+8) = 4 \cdot 3$$

Igualando uno de los factores de la izquierda (tomamos esta vez el segundo) con el correspondiente de la derecha:

$$x+8=3$$

$$x = -5$$

Ejemplo 15

Resolver: $V_{x-1,2} = 11(x-2)$

Desarrollando la variación: $(x-1)(x-2) = 11(x-2)$

Dividiendo por $x-2$: $(x-1) = 11$

$$x = 12$$

Nota: Nuevamente hemos hecho una simplificación que no estamos autorizados a hacer al resolver una ecuación de segundo grado. Dividir los términos de una ecuación por expresiones que contengan la variable causa de inmediato que se ignoren raíces de la ecuación. En la ecuación anterior, simplificando por $x-2$, hemos descuidado la raíz $x=2$.

Pero tampoco en esta oportunidad la raíz ignorada satisface la ecuación original, pues, si x tomara el valor 2, tendríamos que en la variación m sería menor que n .

Ejemplo 16

Resolver: $C_{x+6,12} = C_{x+6,4}$

Obsérvese que en este ejemplo tenemos dos combinaciones equivalentes siendo m igual en ambas. Por la propiedad (7^c) sabemos que, en ese caso, $n_1 + n_2 = m$. En consecuencia:

$$12 + 4 = x + 6$$

de donde

$$x = 10$$

Ejemplo 17

Resolver: $V_{x+7,4} = 360$

Desarrollando la variación: $(x+7)(x+6)(x+5)(x+4) = 360$

Transformando el miembro de la derecha en un producto de cuatro factores consecutivos decrecientes:

$$(x+7)(x+6)(x+5)(x+4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Igualando uno de los factores de la izquierda con su correspondiente de la derecha:

$$x+7=6$$

$$x = -1$$

Ejemplo 18

Resolver: $V_{m,4} + C_{m,4} = 875$

Antes de desarrollar las expresiones combinatorias, vamos a utilizar la fórmula (4^c) para simplificar el cálculo:

$$V_{m,4} + \frac{V_{m,4}}{P_{,4}} = 875$$

$$V_{m,4} + \frac{V_{m,4}}{24} = 875$$

Multiplicando por 24:

$$24V_{m,4} + V_{m,4} = 21000$$

$$25V_{m,4} = 21000$$

Simplificando:

$$V_{m,4} = 840$$

Desarrollando la variación y transformando el miembro de la derecha en cuatro factores consecutivos decrecientes:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$$

Igualando el primer factor de cada miembro:

$$m = 7$$

Ejemplo 19

Resolver: $V_{m,4} - 8C_{m,3} = 40$

Desarrollando las expresiones combinatorias:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) - \frac{8m(m-1)(m-2)}{6} = 40$$

Multiplicando por 3:

$$3m(m-1)(m-2)(m-3) - 4m(m-1)(m-2) = 120$$

Multiplicando y reduciendo términos semejantes:

$$3m^4 - 18m^3 + 33m^2 - 18m - (4m^3 - 12m^2 + 8m) = 120$$

$$3m^4 - 22m^3 + 45m^2 - 26m - 120 = 0$$

Resolveremos esta ecuación utilizando Ruffini. No probaremos con valores negativos (m no puede ser negativa) ni con valores menores de 4 (la variación no tendría sentido). Tampoco lo haremos con valores fraccionarios.

Obtenemos el primer cero dividiendo por $x - 5$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -22 & 45 & -26 & -120 \\ 5 & & 15 & -35 & 50 & 120 \\ \hline & 3 & -7 & 10 & 24 & \underline{0} \end{array}$$

Los restantes divisores del último término del cociente no son raíces de la ecuación, por tanto:

$$m = 5$$

Ejemplo 20

Resolver: $V_{m,4} + V_{m,3} = 480$

Desarrollando las variaciones:

$$m(m-1)(m-2)(m-3) + m(m-1)(m-2) = 480$$

Sacando factor común:

$$m(m-1)(m-2)[(m-3)+1] = 480$$

$$m(m-1)(m-2)^2 = 480$$

A diferencia del ejercicio anterior, en esta oportunidad se hace más fácil descomponer el miembro de la derecha en factores que guarden entre sí la misma relación que los factores del miembro de la izquierda, lo que nos evita tener que resolver una ecuación de cuarto grado:

$$m(m-1)(m-2)^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4^2$$

Iguando el primer factor de cada miembro:

$$m = 6$$

Ejemplo 21

Resolver: $P_{x-4} = 24$

Desarrollando la permutación:

$$(x-4)! = 24$$

La ecuación se resuelve fácilmente si logramos transformar el miembro de la derecha en un factorial:

$$(x-4)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$(x-4)! = 4!$$

Es obvio que, para que esta igualdad sea válida, tiene que cumplirse que

$$x - 4 = 4$$

de donde

$$x = 8$$

Ejemplo 22

Resolver: $P_{x+6} = 30 P_{x+4}$

Desarrollando:

$$(x+6)! = 30(x+4)!$$

Descomponemos $(x+6)!$ para simplificarlo con $(x+4)!$:

$$(x+6)(x+5)(x+4)! = 30(x+4)!$$

$$(x+6)(x+5) = 30$$

$$(x+6)(x+5) = 6 \cdot 5$$

Igualando el primer factor de cada miembro:

$$x+6 = 6$$

$$x = 0$$

Ejemplo 23

Resolver: $V_{10,n} = \frac{10}{7} V_{9,n}$

Utilizando (3^c):

$$\frac{10!}{(10-n)!} = \frac{10 \cdot 9!}{7(9-n)!}$$

Descomponemos el denominador de la fracción de la izquierda y transformamos en un factorial el numerador de la derecha:

$$\frac{10!}{(10-n)(9-n)!} = \frac{10!}{7(9-n)!}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{10-n} = \frac{1}{7}$$

Invirtiendo las fracciones:

$$10-n = 7$$

de donde

$$n = 3$$

Ejemplo 24

Resolver: $3C_{7,x} = 5C_{7,x+2}$

Utilizando (6^c):

$$\frac{3 \cdot 7!}{(7-x)! x!} = \frac{5 \cdot 7!}{(5-x)!(x+2)!}$$

Simplificamos los numeradores y descomponemos las expresiones $(7-x)!$ en la izquierda y $(x+2)!$ en la derecha:

$$\frac{3}{(7-x)(6-x)(5-x)! x!} = \frac{5}{(5-x)! (x+2)(x+1)x!}$$

Simplificando:

$$\frac{3}{(7-x)(6-x)} = \frac{5}{(x+2)(x+1)}$$

Trasponiendo denominadores:

$$3(x+2)(x+1) = 5(7-x)(6-x)$$

Multiplcando y reduciendo términos:

$$3x^2 + 9x + 6 = 210 - 65x + 5x^2$$

$$2x^2 - 74x + 204 = 0$$

Dividiendo por 2:

$$x^2 - 37x + 102 = 0$$

Factorizando:

$$(x-34)(x-3) = 0$$

de donde

$$x_1 = 34 \text{ (Inadmisibile)}$$

$x_2 = 3$

Ejemplo 25

Resolver: $C_{8,x} = 2C_{8,x+3}$

Utilizando (6^c):

$$\frac{8!}{(8-x)! x!} = \frac{2 \cdot 8!}{(5-x)! (x+3)!}$$

Simplificando y descomponiendo las expresiones $(8-x)!$ y $(x+3)!$

$$\frac{1}{(8-x)(7-x)(6-x)(5-x)! x!} = \frac{2}{(5-x)! (x+3)(x+2)(x+1)x!}$$

Simplificando y trasponiendo denominadores:

$$(x+3)(x+2)(x+1) = 2(8-x)(7-x)(6-x)$$

Multiplcando y reduciendo términos:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 672 - 292x + 42x^2 - 2x^3$$

$$3x^3 - 36x^2 + 303x - 666 = 0$$

Dividiendo por 3:

$$x^3 - 12x^2 + 101x - 222 = 0$$

Al resolver la ecuación por Ruffini, sólo tendremos en

cuenta, de los divisores de 222, los positivos y los que no sean mayores de 5, para que la combinación del miembro de la derecha de la ecuación original tenga sentido.

La única raíz entre los números que satisfacen estas condiciones es 3:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -12 & 101 & -222 \\ 3 & & 3 & -27 & 222 \\ \hline & 1 & -9 & 74 & 0 \end{array}$$

En definitiva:

$$x = 3$$

Ejercicio 54

Resolver las siguientes ecuaciones:

- 1) $V_{m,2} = 12$
- 2) $C_{m,2} = 10$
- 3) $C_{m-3,2} = 6$
- 4) $V_{m+3,2} = 30$
- 5) $V_{x+1,3} = 24x$
- 6) $C_{x+2,3} = 7x$
- 7) $V_{m+1,3} = 2V_{m,3}$
- 8) $V_{x-1,3} = 7V_{x-2,2}$
- 9) $V_{x,3} = 2V_{x+1,2}$
- 10) $5C_{x,2} = 2C_{x,4}$
- 11) $C_{x+2,3} = 4C_{x+1,2}$
- 12) $C_{m,10} = C_{m,2}$
- 13) $C_{x+5,7} = C_{x+5,13}$
- 14) $V_{m+2,3} = 35(m+1)$
- 15) $C_{x-2,3} = 8(x-3)$
- 16) $V_{x,4} = 28V_{x-1,2}$
- 17) $V_{x+1,5} = 45V_{x,3}$
- 18) $4C_{x,5} = 9C_{x-1,3}$
- 19) $V_{x-1,3} = 60$
- 20) $C_{x+1,3} = 35$
- 21) $V_{2m-1,4} = 120$
- 22) $C_{3m+1,4} = 210$
- 23) $C_{m,2} + C_{m+1,2} = 16$
- 24) $V_{m,2} + V_{m+2,2} = 86$
- 25) $C_{m+1,2} - C_{m-1,2} = 13$
- 26) $2V_{m+2,2} - V_{m,2} = 82$
- 27) $3C_{x,2} - 2C_{x+1,2} = 3$
- 28) $\sum_{k=1}^3 C_{2m,k} = 7m$
- 29) $V_{m+1,2} + V_{m,2} + V_{m,3} = 22m$
- 30) $V_{m,2} - m = C_{m,3}$
- 31) $2V_{x-1,3} - 2C_{x,2} = 33(x-1)$
- 32) $V_{m,3} + V_{m+1,3} = 84$
- 33) $V_{m,3} + 2C_{m+1,2} = 90$
- 34) $V_{x,3} + V_{x+1,3} - V_{x+2,3} + 36 = 0$
- 35) $V_{x,4} - C_{x,4} + V_{x-1,3} - C_{x-1,3} = 135$
- 36) $V_{x,3} - C_{x+1,3} = 85$
- 37) $P_x = 120$

- 38) $P_{m-2} = 720$
- 39) $P_x = 4P_{x-1}$
- 40) $P_{x+2} = 30P_x$
- 41) $P_{x+3} = 60P_x$
- 42) $V_{12,n} = 2V_{11,n}$
- 43) $V_{9,n} = 3V_{8,n}$
- 44) $4V_{9,n} = 9V_{8,n}$
- 45) $V_{7,n} = 7V_{5,n}$
- 46) $2V_{7,n} = 7V_{5,n}$
- 47) $15V_{8,n} - 28V_{6,n} = 0$
- 48) $C_{10,n} = 2C_{9,n}$
- 49) $C_{12,n} - 3C_{11,n} = 0$
- 50) $C_{10,n} = 3C_{8,n}$
- 51) $2C_{15,n} = 3C_{14,n}$
- 52) $C_{13,n} - C_{13,n+1} = 0$
- 53) $C_{15,x+2} = 13C_{15,x}$
- 54) $C_{11,x+7} = 6C_{11,x+5}$
- 55) $2C_{9,x-1} = 3C_{9,x+1}$
- 56) $C_{14,x-1} - 3C_{14,x-3} = 0$
- 57) $V_{6,x} = 12V_{6,x-2}$
- 58) $V_{7,x+1} = 15V_{8,x-1}$
- 59) $7V_{6,x-1} - 60V_{7,x-3} = 0$
- 60) $4C_{10,x+7} = 7C_{10,x+4}$
- 61) $C_{12,x+2} = 12C_{12,x-1}$
- 62) $5C_{12,x+8} = 18C_{12,x+4}$
- 63) $V_{x+3,4} = 72V_{x+1,2}$
- 64) $18V_{2x+4,3} = 13V_{x+4,4}$
- 65) $5V_{2m+3,3} = 126V_{m+2,2}$
- 66) $V_{3x+4,3} = 35V_{x+2,2}$
- 67) $5V_{2m+4,3} = 14V_{m+3,4}$
- 68) $15V_{2x-2,3} = 14V_{x+1,4}$
- 69) $C_{2x+4,3} = 24C_{x+2,4}$
- 70) $3C_{2x+10,3} = 44C_{x+5,4}$
- 71) $2V_{x-2,2} + (x-2)V_{x-3,3} = 6C_{x,4}$
- 72) $(x+2)C_{x+1,3} + 5V_{x+2,2} - 3C_{x+4,4} = 0$
- 73) $V_{10,x+2} = V_{8,x} \cdot V_{3x+1,2}$
- 74) $V_{8,x+3} = 4V_{6,x} \cdot V_{4x,2}$
- 75) $2C_{2x+3,2} \cdot V_{7,x} = V_{9,x+2}$
- 76) $12V_{6,x-1} = V_{6,x+1}$
- 77) $12V_{7,x-1} = 7V_{6,x}$
- 78) $P_x = 2V_{x,5}$
- 79) $5(V_{x^2,2} - V_{x+1,3}) = 48C_{x+2,4}$
- 80) $V_{x+2,4} - C_{x^2,2} = 24C_{x+1,3}$
- 81) $V_{x+3,5} - C_{x^2,2} = 160C_{x+2,4}$
- 82) $V_{x+2,4} + 5C_{2x+2,5} = 16C_{x^2,2}$
- 83) $12C_{x,3} + 22V_{x,3} = P_x$
- 84) $\frac{1}{36}P_{2x} = 2C_{2x,3} + 3V_{2x,3}$
- 85) $V_{x+2,x} + V_{x+4,x} = V_{x+5,x}$
- 86) $C_{x+7,x} - C_{x+5,x} = C_{x+4,x}$
- 87) $\frac{1}{C_{x+3,x}} + \frac{1}{C_{x+4,x}} = \frac{4320(x+8)}{P_{x+4}}$
- 88) $\frac{1}{V_{x+5,x}} + \frac{3}{V_{x+6,x}} = \frac{3120}{P_{x+6}}$
- 89) $\frac{1}{V_{x+4,x}} - \frac{7}{V_{x+5,x}} + \frac{1}{V_{x+5,x-1}} = \frac{1}{120C_{x+5,x}}$
- 90) $\frac{1}{V_{x+3,x}} - \frac{1}{V_{x+4,x}} = \frac{xP_{x+4}}{2400}$
- 91) $(P_x)^2 - 30P_x + 144 = 0$
- 92) $(V_{x,2})^2 - 50V_{x,2} + 600 = 0$
- 93) $(C_{x,2})^2 - 18C_{x,2} + 45 = 0$
- 94) $(C_{x,3})^2 - 14C_{x,3} + 40 = 0$
- 95) $P_x \cdot P_{x+1} = 9 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16$

- 96) $P_x \cdot P_{x+2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$
- 97) $\frac{P_{x+2}}{168} = \frac{720}{P_{x+5}}$
- 98) $P_x \cdot P_{x+1} \cdot P_{x+2} = 17280$
- 99) $P_{x-4} \cdot P_{x-2} = \frac{34560}{P_x}$
- 100) $V_{x,3} \cdot V_{x+1,3} \cdot V_{x+2,3} = 172800$
- 101) $V_{x+1,3} \cdot P_{x-3} = \frac{720}{x-2}$
- 102) $\frac{V_{x+8,3} \cdot P_{x+2}}{20160} = \frac{1}{x^2 + 7x + 12} - \frac{1}{x^2 + 9x + 20}$

Ejercicio 55

Demostrar las siguientes igualdades:

- 1) $V_{m,n} = C_{m,n} \cdot P_n$
- 2) $C_{m,n} = C_{m,m-n}$
- 3) $V_{12,3} \cdot V_{9,4} \cdot V_{5,4} = P_{12}$
- 4) $V_{11,3} \cdot V_{7,4} \cdot V_{4,3} \cdot V_{2,1} = P_{11}$
- 5) $V_{m+1,n} = V_{m,n} + n V_{m,n-1}$
- 6) Aplicando reiteradamente la relación demostrada en el ejercicio anterior, demostrar que

$$V_{m,n} = V_{m-1,n} + n V_{m-2,n-1} + n(n-1) V_{m-3,n-2} + \dots + n! V_{m-n+1,1}$$
- 7) $\frac{V_{m,n} \cdot V_{m-1,n} \cdot V_{m-2,n} \cdot V_{m-3,n}}{V_{m,n-1} \cdot V_{m-1,n-1} \cdot V_{m-2,n-1} \cdot V_{m-3,n-1}} = V_{m-n+1,4}$
- 8) $V_{4n,2n} = V_{2n,n} \cdot P_n \cdot C_{4n,2n}$
- 9) $P_{2n} = (P_n)^2 \cdot C_{2n,n}$
- 10) $C_{m,n} = C_{m-1,n} + C_{m-1,n-1}$ (Regla de Pascal)
- 11) Aplicando reiteradamente la relación demostrada en el ejercicio anterior, demostrar que

$$C_{m,n} = C_{m-1,n-1} + C_{m-2,n-1} + C_{m-3,n-1} + \dots + C_{n-1,n-1}$$
- 12) $V_{m+1,n} = m(V_{m,n-1} + V_{m-1,n-2})$
- 13) $\frac{m-n}{n+1} C_{m,n} = C_{m,n+1}$
- 14) $n C_{m,n} = m C_{m-1,n-1}$

- 15) $P_{n+1} - P_n = n P_n$
- 16) $P_n + P_{n-1} = \frac{1}{n} P_{n+1}$
- 17) $P_{n+2} + P_n = (n+2)^2 P_n - P_{n+1}$
- 18) $(2n P_n - P_n) P_{2n-3} = \frac{n}{2} P_{n-2} \cdot P_{2n-1}$
- 19) $\frac{1}{m!} - \frac{1}{(m+1)!} = \frac{m}{(m+1)!}$
- 20) $P_{m+1} \cdot P_m \cdot P_{m-1} = V_{m+1,m} \cdot V_{m,m-1} \cdot V_{m-1,m-2}$
- 21) $C_{m+1,m} \cdot C_{m,m-1} \cdot C_{m-1,m-2} = m^3 - m$
- 22) $V_{m+1,m} + V_{m,m-1} + V_{m-1,m-2} = \frac{m+1}{m} (m+1)!$
- 23) $V_{8x,4x} \cdot V_{4x,2x} \cdot V_{2x,x} = V_{8x,7x}$
- 24) $\lg P_{10} = 6 \lg 2 + 4 \lg 3 + \lg 7 + 2$
- 25) $(m-n) V_{m,n} = m P_n \cdot C_{m-1,n}$
- 26) $(C_{2n,n} + V_{2n,n}) P_n = V_{2n,n} + P_{2n}$
- 27) $\frac{P_{2n} \cdot (P_{3n})^2 \cdot C_{4n,2n} \cdot C_{6n,3n}}{(P_{4n})^2} = C_{6n,2n}$
- 28) $V_{m,m} = V_{m,m-1} = P_m$
- 29) $\lg_6(27 P_9) = 7 + \lg_6 35$
- 30) $V_{15,3} \cdot C_{11,9} \cdot C_{9,6} \cdot V_{9,2} \cdot V_{6,3} \cdot V_{4,2} = P_{15}$

Sistemas de ecuaciones que contienen expresiones combinatorias

Ejemplo 26

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 3 C_{x,y-1} = 5 C_{x,y-2} \\ 2y - x = 1 \end{cases}$$

Desarrollando la primera ecuación del sistema:

$$\frac{3x!}{(x-y+1)!(y-1)!} = \frac{5x!}{(x-y+2)!(y-2)!}$$

Simplificando los numeradores y haciendo las descomposiciones factoriales convenientes para poder simplificar los denominadores:

$$\frac{3}{(x-y+1)!(y-1)(y-2)!} = \frac{5}{(x-y+2)(x-y+1)!(y-2)!}$$

$$\frac{3}{y-1} = \frac{5}{x-y+2}$$

$$3(x-y+2) = 5(y-1)$$

$$3x - 3y + 6 = 5y - 5$$

$$3x - 8y = -11$$

Con el desarrollo de la primera ecuación, el sistema queda así:

$$\begin{cases} 3x - 8y = -11 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

La solución de este sistema elemental es:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ejemplo 27

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} 4V_{x,y-1} + 2V_{x,y} = 15C_{x,y} \\ V_{x+1,y} = 6C_{x+1,y} \end{cases}$$

Tomamos la segunda ecuación y transformamos el miembro de la derecha utilizando (4^c):

$$V_{x+1,y} = \frac{6V_{x+1,y}}{P_y}$$

Simplificando:

$$P_y = 6$$

Desarrollando la permutación y transformando 6 en un factorial:

$$y! = 3!$$

de donde

$$y = 3$$

Al sustituir este valor en la primera ecuación, ésta queda así:

$$4V_{x,2} + 2V_{x,3} = 15C_{x,3}$$

Desarrollando:

$$4x(x-1) + 2x(x-1)(x-2) = \frac{15x(x-1)(x-2)}{6}$$

Dividiendo todos los términos por $x(x-1)$:

$$4 + 2(x-2) = \frac{5}{2}(x-2)$$

de donde, resolviendo:

$$x = 10$$

Y la solución del sistema es:

$$(10, 3)$$

Ejemplo 28

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} V_{x+2,y+1} + 6V_{x+1,y} = 6C_{x^2,y-1} \\ V_{x^2,y+1} = 24C_{x^2,y+1} \end{cases}$$

Tomamos la segunda ecuación y transformamos el miembro de la derecha utilizando (4^c):

$$V_{x^2,y+1} = \frac{24V_{x^2,y+1}}{P_{y+1}}$$

Simplificando y resolviendo: $P_{y+1} = 24$

$$(y+1)! = 4!$$

$$y+1 = 4$$

$$y = 3$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación:

$$V_{x+2,4} + 6V_{x+1,3} = 6C_{x^2,2}$$

Desarrollando:

$$(x+2)(x+1)x(x-1) + 6(x+1)x(x-1) = \frac{6x^2(x^2-1)}{2}$$

Dividiendo todos los términos por $(x+1)x(x-1)$:

$$(x+2) + 6 = 3x$$

de donde

$$x = 4$$

La solución del sistema es:

$$(4, 3)$$

Ejercicio 56

Resolver los siguientes sistemas:

$$1) \begin{cases} C_{x,y-1} = C_{x,y} \\ 4C_{x,y} = 5C_{x,y-2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} P_x = 6V_{x,y} \\ V_{x,y} = 6C_{x,y} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 5C_{x,y} = 4C_{x,y-1} \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$4) 3C_{x,y} = 5C_{x,y-1} = 3C_{x,y+1}$$

$$5) 5C_{x,y+1} = 5C_{x,y-1} = 4C_{x,y}$$

$$6) \begin{cases} V_{x,y} - V_{x-1,y} = C_{x-1,y+1} \\ V_{x,y} = 2C_{x,y} \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} C_{x,y} + 2C_{x,y+1} = 5C_{x-1,y} \\ V_{x+1,y-1} = 2C_{x+1,y-1} \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} V_{x-1,y+1} - 120C_{x-1,y+1} = 0 \\ 4C_{x,y-1} + 2C_{x,y} = 11C_{x-1,y-1} \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} V_{x^2,y+2} = 720C_{x^2,y+2} \\ 3V_{x+3,y+1} - 15V_{x+2,y} = 10C_{x^2,y-2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
10) & \begin{cases} 24 V_{x,y} + P_x = 1 \\ 5 C_{x+2,y+1} + 5 C_{x+1,y} = 9 C_{x+2,y} \end{cases} \\
11) & \begin{cases} \lg C_{x,y-2} + \lg(x+y-3) = \lg C_{x+1,y-2} + \lg(x-y+3) \\ C_{x,y+1} - C_{x,y+2} = 0 \end{cases} \\
12) & \begin{cases} 2 \lg C_{x,y} - \lg C_{x,y-1} - \lg C_{x,y-2} = 2 \lg(x-y+1) + \lg 4 - 2 \lg 5 - \lg(y-1) \\ C_{x,y} = C_{x,y-3} \end{cases} \\
13) & \begin{cases} C_{x,y} - C_{x,2y-1} = 0 \\ P_x \cdot P_{3y} = 86400 \end{cases} \\
14) & \begin{cases} 7 V_{x,y} = 5 V_{x+1,y} \\ V_{x,3} \cdot \frac{P_{7y-10}}{2} = \frac{1440}{7y-8} \end{cases} \\
15) & \begin{cases} \frac{V_{x+y+1,2y+1}}{V_{x+y,2y}} = 6 \\ P_{5-y} \cdot V_{x+2,2} = \frac{720}{8-y} \end{cases} \\
16) & \begin{cases} 132 V_{2x,y-2} = V_{2x,y} \\ \frac{24}{x-y-1} = V_{x-y+1,2} \cdot P_{x-y-2} \end{cases} \\
17) & \begin{cases} P_{x-4} \cdot \frac{P_{7y-9}}{3} = \frac{288}{P_{x-3}} \\ 4 C_{x+1,y} - 7 C_{x,y} = 0 \end{cases} \\
18) & \begin{cases} 15 V_{x+1,y} = 7 V_{x-1,y+1} \\ C_{x,3y-1} - C_{x,y} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Problemas de Combinatoria

Para resolver los problemas de Combinatoria es esencial determinar primero de qué tipo de agrupación se trata.

Una forma práctica para lograrlo es formar una ordenación cualquiera. Una vez formada la ordenación, se forma otra con los mismos elementos cambiados de lugar. Si resulta un grupo nuevo, se trata de una variación; en caso contrario, de una combinación.

Se reconoce fácilmente si se trata de una permutación si todos los elementos forman parte de cada ordenación y las ordenaciones difieren entre sí si cambia el orden en que se toman los elementos.

Los siguientes problemas son casos de permutaciones, variaciones y combinaciones simples; es decir, ordenaciones que no contemplan repetición de elementos. Posteriormente veremos permutaciones, variaciones y combinaciones con repetición de elementos.

Ejemplo 29

En grupo compuesto por 9 personas debemos elegir un Presidente, un Tesorero y un Suplente. ¿De cuántas formas distintas se puede realizar la elección?

Dado que el número total de elementos es $m = 9$ y el de los elementos que entran en cada ordenación es $n = 3$,

concluimos que, no se trata de una permutación.

Para determinar si es una variación o una combinación formamos una primera junta hipotética con las personas A, B y C .

Formamos ahora otra cambiando el orden de los elementos:

Hemos obtenido una junta distinta de la anterior: el orden en que se toman los elementos influye en la formación de ordenaciones distintas. Concluimos, por tanto, que se trata de una *variación*.

Si llamamos T al número total de posibles juntas, tendremos que:

A - Presidente
 B - Tesorero
 C - Suplente

B - Presidente
 A - Tesorero
 C - Suplente

$$T = V_{9,3} = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$= \boxed{504}$$

Ejemplo 30

Se tienen 7 galones de pintura de diferentes colores. ¿Cuántos colores distintos pueden obtenerse mezclando partes iguales de 3 de esas pinturas?

Siendo $m = 7$ y $n = 3$, no se trata de una permutación.

Tomamos partes iguales de tres de esas pinturas. Al mezclarlas obtenemos un color X :

$$A + B + C = \text{Color } X$$

Si hacemos la mezcla en otro orden, obtendremos, de todas formas, el mismo color:

$$C + A + B = \text{Color } X$$

Se trata, pues, de una *combinación*.

El total será:

$$T = C_{7,3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2}$$

$$= \boxed{35}$$

Ejemplo 31

¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta 5 personas que realizan una competencia de velocidad si no existe la posibilidad de que dos o más lleguen al mismo tiempo?

Como todas las personas participantes corren al mismo tiempo, la diferencia en la llegada sólo puede deberse al orden de llegada. Se trata de una *permutación*:

$$T = P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= \boxed{120}$$

Ejercicio 57

- 1) Se dispone de 8 franjas de tela de distintos colores. ¿Cuántas banderas distintas de tres franjas horizontales se pueden hacer con ellas?
- 2) Se tienen 10 galones de pintura de distintos colores. ¿Cuántos colores nuevos se pueden obtener mezclando partes iguales de tres de ellas?
- 3) Cinco muchachos hacen una carrera de competencia. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta (suponiendo que no hay empates)?
- 4) ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, sin repetir ninguno?
- 5) En un salón de 30 alumnos se solicitan cuatro voluntarios para llevar una mesa. ¿Cuántos equipos distintos de voluntarios se podrían integrar?
- 6) ¿De cuántas formas se pueden ordenar 7 libros en un estante?
- 7) ¿Cuántas sumas distintas de tres sumandos cada una pueden obtenerse con los números 1, 4, 8, 16, 32 y 64?
- 8) Un club tiene 27 miembros. Se desea elegir entre ellos una junta compuesta por presidente, secretario, tesorero y vocal. ¿Cuántas juntas distintas pueden formarse?
- 9) En un juego de lotería hay un pote acumulado de Bs. 200.000.000. Una persona, para estar segura de ganárselo, decide marcar todos los posibles resultados. ¿Cuánto dinero gastará, sabiendo que para elaborar un billete hay que elegir seis números entre 42 y que cada billete vale Bs. 300?
- 10) Una muchacha tiene tres anillos diferentes y decide llevarlos cada día en una posición nueva. ¿Durante cuántos días podrá hacerlo sin repetir ninguna de las posiciones anteriores? (Se exceptúan los dedos pulgares y no debe colocarse más de un anillo en un mismo dedo).
- 11) Con 15 alumnos ¿cuántos equipos distintos de fútbol y cuántos equipos de remo (de 11 alumnos) se pueden formar? Se supone que en el primer caso la efectividad es distinta según el puesto que ocupe cada alumno, y en el segundo caso no.

- 12) Si cada vez que un jugador de dominó, al tomar las 7 fichas que le corresponden, le saliera un juego distinto, ¿después de cuántos juegos le volvería a salir un juego repetido?
- 13) Un estudiante desea utilizar 4 colores diferentes para colorear un mapa. ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo si tiene 10 colores distintos?

Nota: A partir de este momento suponemos conocido el procedimiento para determinar si la agrupación pertinente en un problema es una variación, una combinación o una permutación.

Ejemplo 32

¿Cuántos números menores de 3.000 se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, sin repetir ninguno de ellos?

Todos los números de una, dos y tres cifras son menores de 3000.

Los que se pueden formar con los 7 dígitos que nos dan son:

de una cifra:

$$V_{7,1}$$

de dos cifras:

$$V_{7,2}$$

de tres cifras:

$$V_{7,3}$$

De los números de cuatro cifras sólo satisfacen las condiciones del problema los que comienzan por 1 ó por 2 (los que comienzan por otra cifra serán ya mayores de 3000).

Para calcular cuántos números de 4 cifras que comienzan por 1 se pueden formar razonaremos así: dichos números serán de la forma 1XXX. La primera cifra será 1 y, para llenar los restantes tres lugares, nos quedan 6 dígitos. El total de estos números será, pues:

$$V_{6,3}$$

El razonamiento es idéntico para los números de cuatro cifras que comiencen por 2. El total de estos números será también:

$$V_{6,3}$$

En consecuencia, la cantidad total de números menores de 3000 que se pueden formar con los dígitos dados será:

$$T = V_{7,1} + V_{7,2} + V_{7,3} + 2V_{6,3}$$

$$= 7 + 42 + 210 + 2 \cdot 120 =$$

499

Ejemplo 33

Con los mismos dígitos del ejemplo anterior, ¿cuántos números pares de cinco cifras se pueden formar?

Los números pedidos serán de la forma

XX XX2

XX XX4

XX XX6

En cada uno de los tres casos, si uno de los dígitos ocupa el puesto de la quinta cifra, quedarán 6 dígitos para disponerlos en los cuatro puestos restantes.

El total será, por tanto:

$$T = 3V_{6,4}$$

$$= 3 \cdot 360 =$$

1080

Ejemplo 34

Con los mismos dígitos de los ejemplos anteriores, ¿cuántos números mayores de 500 y menores de 40.000 pueden formarse?

Entre los de tres cifras, sólo satisfacen las condiciones del problema los números de la forma

5XX

6XX

7XX

La cantidad de estos números es:

$$3V_{6,2}$$

Todos los números de cuatro cifras satisfacen las condiciones. Su total es:

$$V_{7,4}$$

De los de cinco cifras, sólo satisfacen las condiciones del problema los de la forma

1X XXX

2X XXX

3X XXX

La cantidad de estos números es:

$$3V_{6,4}$$

El total será, en definitiva:

$$T = 3V_{6,2} + V_{7,4} + 3V_{6,4}$$

$$= 3 \cdot 30 + 840 + 3 \cdot 360 =$$

2010

Ejemplo 35

Con los mismos dígitos, ¿cuántos números impares mayores de 500.000 pueden formarse?

Los números de seis cifras que nos sirven son los de la forma

5XX XX1

5XX XX3

5XX XX7

6XX XX1

6XX XX3

6XX XX5

6XX XX7

7XX XX1

7XX XX3

7XX XX5

(Obsérvese que no tomamos en cuenta los de la forma 5XX XX5 y 7XX XX7 dado que los dígitos no pueden repetirse). Para cada uno de estos casos vale el siguiente razonamiento: si el primero y último lugares están ocupados por dos dígitos determinados, quedan 5 para disponerlos en los 4 lugares restantes.

La cantidad total de estos números es, entonces:

$$10V_{5,4}$$

Los números impares de siete cifras son todos mayores de 500.000. Serán de la forma

X XXX XX1

X XXX XX3

X XXX XX5

X XXX XX7

La cantidad de estos números será:

$$4P_6$$

Y el total de los números pedidos:

$$T = 10V_{5,4} + 4P_6$$

$$= 10 \cdot 120 + 4 \cdot 720 =$$

4080

Ejemplo 36

Con los mismos dígitos, ¿cuántos números de cuatro cifras pueden formarse si las dos primeras deben ser pares y las dos últimas impares?

Los números son de la forma
PPII (P = par; I = impar).

La cantidad de formas distintas en que pueden estar ocupados los dos primeros lugares de las cifras es:

$$V_{3,2}$$

y la cantidad de formas distintas en que pueden estar ocupados los dos últimos lugares de las cifras es

$$V_{4,2}$$

Por el Teorema Fundamental de la Combinatoria, el total de números que se pueden formar en estas condiciones, es:

$$T = V_{3,2} \times V_{4,2}$$

$$= 6 \cdot 12 = \boxed{72}$$

Ejercicio 58

Calcular cuántos números (que satisfagan las condiciones dadas de cada ejercicio) se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, sin repetir ninguno.

- 1) Números pares de tres cifras.
- 2) Números impares de cuatro cifras.
- 3) Números mayores de 5.000.
- 4) Números menores de 600.
- 5) Números mayores de 4.000 y menores de 300.000.
- 6) Números pares mayores de 60.000.
- 7) Números impares menores de 4.000.
- 8) Números distintos.
- 9) Números pares.
- 10) Números impares.
- 11) Números de cinco cifras de las cuales las tres primeras sean impares y las dos últimas sean pares.
- 12) Números de cinco cifras de las cuales tres sean impares y dos pares.
- 13) Números mayores de 20.000 y menores de 70.000 que tengan las dos primeras cifras pares y las tres restantes impares.
- 14) Números mayores de 20.000 y menores de 70.000 que tengan dos cifras pares y tres impares.
- 15) Números de cuatro cifras que no tengan dos cifras pares o dos cifras impares juntas.

Ejemplo 37

¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 0, sin repetir ninguno de ellos?

La cantidad total de números de cinco cifras que podrían formarse con 7 dígitos es:

$$V_{7,5}$$

Pero entre estos dígitos se encuentra el cero que puede ocupar cualquier posición entre las cifras del número excepto la primera: un número de la forma 0X XXX deja de ser de cinco cifras.

Hay, por tanto, que restar del total anterior los números de la forma 0X XXX cuya cantidad es:

$$V_{6,4}$$

El total de los números pedidos es, por tanto:

$$T = V_{7,5} - V_{6,4}$$

$$= 2520 - 360 = \boxed{2160}$$

Ejemplo 38

Con los dígitos del ejemplo 37, ¿cuántos números impares de cuatro cifras pueden formarse?

Los números que satisfacen las condiciones del problema son de la forma

X XX1
X XX3
X XX5

cuyo total es:

$$3V_{6,3}$$

A éstos hay que restarle los que tienen el cero en el primer lugar, pues dejan de ser de cuatro cifras. Estos son de la forma

0 XX1
0 XX3
0 XX5

y su total es:

$$3V_{5,2}$$

Tendremos, entonces, que:

$$T = 3V_{6,3} - 3V_{5,2}$$

$$= 3 \cdot 120 - 3 \cdot 20 = \boxed{300}$$

Ejemplo 39

Con los dígitos del ejemplo 37, ¿cuántos números pares mayores de 50.000 pueden formarse?

Hay números de cinco, de seis y de siete cifras que satisfacen las condiciones del problema:

a) De cinco cifras: sólo nos sirven los que comienzan con 5 o con 6 (los demás son menores de 50.000) y son de la forma

5X XX0
5X XX2
5X XX4
5X XX6
6X XX0
6X XX2
6X XX4

El total de estos números es:

$$7V_{5,3}$$

b) De seis cifras: nos sirven los de la forma

XXX XX0
XXX XX2
XXX XX4
XXX XX6

excepto los que comienzan por cero:

0XX XX2
0XX XX4
0XX XX6

El total de números de seis cifras es:

$$4V_{6,5} - 3V_{5,4}$$

c) De siete cifras: nos sirven los de la forma

X XXX XX0
X XXX XX2
X XXX XX4
X XXX XX6

excepto los que comienzan por cero:

0 XXX XX2
0 XXX XX4
0 XXX XX6

El total de números de siete cifras es:

$$4V_{6,6} - 3V_{5,5}$$

es decir:

$$= 4P_6 - 3P_5$$

En definitiva, tendremos:

$$T = 7V_{5,3} + (4V_{6,5} - 3V_{5,4}) + (4P_6 - 3P_5)$$

$$= 7 \cdot 60 + 4 \cdot 720 - 3 \cdot 120 + 4 \cdot 720 - 3 \cdot 120 = \boxed{5460}$$

Ejemplo 40

Con los dígitos del ejemplo 37, ¿cuántos números pares mayores de 63.000 y menores de 3.420.000 pueden formarse?

a) Los números de cinco cifras que satisfacen las condiciones del problema son de la forma:

63 XX0

63 XX2

63 XX4

64 XX0

64 XX2

65 XX0

65 XX2

65 XX4

con un total de:

$$8V_{4,2}$$

b) De los de seis cifras tomamos en cuenta los de la forma

XXX XX0

XXX XX2

XXX XX4

XXX XX6

excepto los que comienzan por cero:

0XX XX2

0XX XX4

0XX XX6

El total de éstos es:

$$4V_{6,5} - 3V_{5,4}$$

c) De los de siete cifras tomamos en cuenta todos los que comienzan por 1 o por 2:

1 XXX XX0

1 XXX XX2

1 XXX XX4

1 XXX XX6

2 XXX XX0

2 XXX XX4

2 XXX XX6

$$7V_{5,5} = 7P_5$$

Tomamos en cuenta, además, entre los que comienzan por 3, los de la forma

3 0XX XX2
 3 0XX XX4
 3 0XX XX6
 3 1XX XX0
 3 1XX XX2
 3 1XX XX4
 3 1XX XX6
 3 2XX XX0
 3 2XX XX4
 3 2XX XX6

$$10V_{4,4} = 10P_4$$

y los de la forma

3 40X XX2
 3 40X XX6
 3 41X XX0
 3 41X XX2
 3 41X XX6

$$5V_{3,3} = 5P_3$$

En definitiva:

$$\begin{aligned}
 T &= 8V_{4,2} + (4V_{6,5} - 3V_{5,4}) + 7P_5 + 10P_4 + 5P_3 \\
 &= 8 \cdot 12 + 4 \cdot 720 - 3 \cdot 120 + 7 \cdot 120 + 10 \cdot 24 + 5 \cdot 6 \\
 &= \boxed{3726}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 59

Calcular cuántos números (que satisfagan las condiciones dadas de cada ejercicio) se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 0, sin repetir ninguno de ellos.

- 1) Números pares de 4 cifras.
- 2) Números impares de 5 cifras.
- 3) Números mayores de 40.000.
- 4) Números menores de 3.000.
- 5) Números mayores de 5.000 y menores de 4.000.000.
- 6) Números mayores de 350.000.
- 7) Números pares menores de 5.200.
- 8) Números pares mayores de 4.750.000.
- 9) Números impares menores de 34.500.
- 10) Números de 6 cifras de las cuales las cuatro primeras sean pares y las dos últimas impares.
- 11) Números de 6 cifras de las cuales cuatro sean impares y dos pares.
- 12) Números pares mayores de 57.000 y menores de 435.000.

Ejemplo 41

En una empresa trabajan 40 empleados discriminados así: 18 hombres y 22 mujeres. Se desea formar un comité compuesto por 4 mujeres y 3 hombres. ¿De cuántas formas distintas puede formarse ese comité?

El número total de formas distintas en que pueden ser elegidos 3 hombres de un grupo de 18 es:

$$C_{18,3}$$

Y el de formas distintas en que pueden ser elegidas las 4 mujeres del grupo de 22 es:

$$C_{22,4}$$

Por el Teorema Fundamental de la Combinatoria, el total de comités distintos que pueden formarse es:

$$T = C_{18,3} \times C_{22,4}$$

$$= 816 \times 7315 = \boxed{5.969.040}$$

Ejemplo 42

El abecedario de un extraño idioma tiene 6 vocales y 8 consonantes. Las palabras de ese idioma tienen todas 7 letras y tienen la particularidad de que las vocales y las consonantes están siempre alternadas. ¿Cuántas palabras existen en ese idioma?

Si las palabras de ese idioma comienzan con vocal, tienen la siguiente configuración:

VCVCVCV

Si, en cambio, por consonante, tienen esta otra:

CVCVCVC

Estudiemos cada caso por separado.

a) Forma VCVCVCV: el número de formas distintas en que pueden ser dispuestas las vocales en los cuatro lugares que les corresponden es:

$$V_{6,4}$$

y el número de formas para disponer las consonantes en los tres puestos restantes es:

$$V_{8,3}$$

El total de palabras que tienen esta configuración es:

$$V_{6,4} \times V_{8,3}$$

b) Forma **CVCVCVC**: en este caso las distintas formas para disponer las consonantes son:

$$V_{8,4}$$

y para disponer las vocales

$$V_{6,3}$$

El total de palabras de este tipo es:

$$V_{8,4} \times V_{6,3}$$

Y el número total de palabras que existen en el idioma es:

$$T = (V_{6,4} \times V_{8,3}) + (V_{8,4} \times V_{6,3})$$

$$= 360 \cdot 336 + 1680 \cdot 120 = \boxed{322.560}$$

Ejemplo 43

¿De cuántas formas pueden repartirse 12 libros distintos entre 3 personas si a cada una le debe tocar igual número de libros?

Las formas distintas para asignarle a la primera persona los 4 libros que le corresponden son:

$$C_{12,4}$$

Una vez asignados los libros a la primera persona, quedan 8 libros para asignarle 4 a la segunda. Las distintas formas para hacer esto son:

$$C_{8,4}$$

Para asignarle los 4 libros restantes a la tercera persona, las formas de hacerlo son:

$$C_{4,4}$$

(una sola posibilidad)

El total de formas distintas de repartición que nos pide el problema será (por el Teorema Fundamental de la Combinatoria):

$$T = C_{12,4} \times C_{8,4} \times C_{4,4}$$

$$= 495 \cdot 70 \cdot 1 = \boxed{34.650}$$

Ejemplo 44

Nueve personas se presentan como voluntarios para conformar una junta compuesta por Presidente, Vicepresidente, Secretario, Tesorero y Vocal. Cinco de ellos sólo se postulan si no son elegidos ni de Presidente, ni de Vicepresidente. ¿Cuántas juntas diferentes pueden formarse en esas condiciones?

Sólo cuatro personas aceptan ser elegidas para los dos puestos principales. El número de formas distintas para ocupar estos puestos es

$$V_{4,2}$$

Una vez ocupados estos cargos, quedan 7 personas disponibles para ocupar los otros tres. Las distintas formas de hacerlo son:

$$V_{7,3}$$

El total de posibles juntas es

$$\begin{aligned} T &= V_{4,2} \times V_{7,3} \\ &= 12 \cdot 210 = \boxed{2.520} \end{aligned}$$

Ejemplo 45

Siete amigos, 4 muchachos y 3 muchachas, van a un cine y deciden sentarse en siete puestos consecutivos de una misma hilera de asientos. ¿De cuántas formas distintas pueden hacerlo si las muchachas quieren sentarse juntas?

Dado que las muchachas desean sentarse juntas, considerémoslas como una unidad inseparable. Esta unidad, junto con los cuatro muchachos forman un conjunto de cinco unidades. El número de formas distintas en que pueden colocarse estas cinco unidades es:

$$P_5$$

Pero por cada una de estas posibilidades, las formas en que pueden colocarse las muchachas ocupando puestos consecutivos es:

$$P_3$$

El total será:

$$\begin{aligned} T &= P_5 \times P_3 \\ &= 120 \cdot 6 = \boxed{720} \end{aligned}$$

Ejemplo 46

¿Cuántos colores diferentes se pueden obtener mezclando partes iguales de 7 pinturas de colores distintos?

Tomando cada pintura por separado, los colores que se obtienen son:

$$C_{7,1}$$

Tomando partes iguales de dos de esas pinturas y mezclándolas, los colores que se obtienen son:

$$C_{7,2}$$

Tomando partes iguales de tres pinturas se obtienen:

$$C_{7,3}$$

Considerando sucesivamente los colores nuevos que se obtienen mezclando partes iguales de 4, de 5, de 6 y de las 7 pinturas, el número total de colores que se pueden obtener será:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{k=1}^7 C_{7,k} \\ &= C_{7,1} + C_{7,2} + C_{7,3} + C_{7,4} + C_{7,5} + C_{7,6} + C_{7,7} \\ &= 7 + 21 + 35 + 35 + 21 + 7 + 1 = \boxed{127} \end{aligned}$$

Ejercicio 60

- 1) En un salón de clase hay 15 muchachos y 16 muchachas. Se desea formar una comisión compuesta por 2 muchachas y 3 muchachos. ¿Cuántas comisiones distintas podrían formarse?
- 2) Se tienen 4 vocales y 4 consonantes. ¿Cuántas palabras de 8 letras pueden formarse con ellas con la condición de que las consonantes y las vocales estén alternadas?
- 3) Se tienen 5 vocales y 7 consonantes. ¿Cuántas palabras distintas de 8 letras pueden formarse con la condición de que las consonantes y las vocales estén alternadas?
- 4) Se tienen 4 vocales y 4 consonantes. ¿Cuántas palabras de más de 5 letras pueden formarse con la condición de que las consonantes y las vocales estén alternadas?
- 5) ¿Cuántos sonidos distintos pueden obtenerse con una flauta que tiene 9 agujeros?
- 6) ¿Cuántos sonidos distintos pueden obtenerse con 10 campanas?
- 7) ¿Cuántos grupos diferentes se pueden formar con 9 pintores, 11 albañiles y 7 plomeros si un grupo está formado por 3 pintores, 4 albañiles y 2 plomeros?
- 8) ¿De cuántas formas se pueden repartir 15 caramelos distintos entre 3 niños si a todos les debe tocar la misma cantidad de caramelos?
- 9) ¿De cuántas formas se pueden repartir 14 postales diferentes entre 4 personas dando 3 a cada una?
- 10) ¿Cuántos grupos diferentes pueden formarse con 8 personas?
- 11) En un grupo de 15 personas se desea formar dos comisiones de cuatro integrantes cada uno. ¿Cuántas son las posibilidades?
- 12) En un torneo de ajedrez se inscriben 15 personas. Cada una de ellas deberá jugar dos partidas con cada uno de los restantes jugadores. En caso

- de empate, jugarán una partida más. ¿Cuál es el número mínimo de juegos a realizarse? ¿Y el máximo?
- 13) ¿De cuántas formas pueden repartirse 6 regalos entre 3 personas si a cada una de ellas le debe corresponder por lo menos un regalo?
 - 14) Se lanzan dos dados, uno a continuación del otro. ¿Cuántos resultados distintos pueden obtenerse?
 - 15) Una prueba consta de 10 preguntas de "Verdadero" y "Falso". ¿De cuántas formas distintas puede contestarse la prueba?
 - 16) El manager de un equipo de baseball insiste en que su mejor jugador batee en cuarto lugar y el pitcher al final. En estas condiciones, ¿cuántos órdenes de bateo son posibles, si hay 9 jugadores?
 - 17) Entre las ciudades A y B hay cinco caminos principales y entre B y C hay cuatro. ¿De cuántas maneras puede una persona viajar de A a C y regresar, pasando por B en ambos sentidos, y sin viajar dos veces por el mismo camino?
 - 18) Si se lanzan simultáneamente 5 monedas diferentes, ¿de cuántas formas distintas pueden caer éstas?
 - 19) En un carro caben 3 personas en el asiento delantero y 3 en el de atrás. Si entre 8 personas sólo dos saben manejar, ¿de cuántas formas distintas se puede llenar el carro?
 - 20) Un matrimonio y sus tres hijos desean tomarse una foto familiar sentados en un banco de un parque. ¿De cuántas formas distintas podrán disponerse? ¿En cuántas de esas fotos quedarán los padres sentados uno junto a otro?
 - 21) ¿De cuántas formas distintas pueden formarse 8 soldados en línea recta si dos de ellos no deben nunca quedar juntos?
 - 22) En un grupo de 9 personas hay seis mujeres y tres hombres. ¿De cuántas formas pueden ponerse en fila de manera que los tres hombres queden siempre juntos?
 - 23) ¿De cuántas formas pueden ponerse en fila las personas del ejercicio anterior de manera que los tres hombres nunca queden juntos?
 - 24) Se tienen los números 6.789 y 12.345. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse que contengan dos cifras del primero y tres del segundo, sin que se repita ninguna cifra?
 - 25) ¿Cuántos de los números del ejercicio anterior serán mayores de 7.000?
 - 26) Una persona que presencia la salida de un grupo de ladrones de un banco refiere a la policía que éstos huyeron en un automóvil cuya placa tenía 6 cifras. El testigo sólo recuerda que la placa no tenía números repetidos, que era un número impar y que las tres primeras cifras eran 254. ¿Cuántos vehículos, como máximo, tendrá que investigar la policía?
 - 27) ¿De cuántas formas diferentes pueden asignarse 4 jugadores de baseball a las posiciones del infield si sólo dos de ellos pueden jugar el shortstop?
 - 28) ¿Cuántas sumas diferentes se pueden obtener con un centavo, un medio, un real, una moneda de a bolívar, una de dos bolívares y una de 5 bolívares?

- 29) El equipo de tennis de un colegio tiene 12 jugadores; el de otro tiene 10. ¿De cuántas formas distintas se puede organizar un match doble entre las dos instituciones?
- 30) Un profesor tiene una colección de 15 problemas de Combinación y 11 problemas de Permutación. ¿Cuántos exámenes distintos puede elaborar con ellos si éstos deben incluir 4 problemas de cada tipo?
- 31) ¿De cuántas formas diferentes puede uno hacer una selección de 3 novelas, 2 biografías y 5 libros de cienciaficción de una colección de 10 novelas, 8 biografías y 10 libros de cienciaficción?
- 32) ¿Cuántas comisiones distintas de 6 personas pueden formarse en un grupo de 12 hombres y 20 mujeres, si el número de mujeres en la comisión no debe ser mayor de 4?
- 33) ¿Cuántos equipos distintos de baseball pueden formarse con 18 jugadores si sólo 4 pueden pitchar, sólo dos pueden catchar y estos seis jugadores no pueden jugar en otra posición?
- 34) ¿De cuántas formas diferentes pueden separarse 6 objetos en dos grupos iguales?
- 35) ¿De cuántas formas diferentes pueden separarse 7 objetos en dos grupos, uno de 4 objetos y otro de 3?
- 36) ¿De cuántas formas diferentes pueden separarse 8 objetos en dos grupos iguales?
- 37) ¿De cuántas formas diferentes pueden separarse 9 objetos en dos grupos, uno de 5 objetos y otro de 4?

Ejercicio 61

Se dispone de 6 libros diferentes de física, 4 de química y 3 de matemáticas. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse en un estante...

- 1) ... si pueden estar mezclados?
- 2) ... si los libros de cada materia deben quedar juntos?
- 3) ... si los libros de cada materia deben estar juntos y los de física en el medio?
- 4) ... si los libros de física deben estar de últimos?
- 5) ... si los libros de química deben estar juntos?
- 6) ... si cada libro de matemáticas debe estar entre dos libros de química?
- 7) ... si el primer libro y el último deben ser de matemáticas?
- 8) ... si el primer libro y el último deben ser de física?
- 9) ... si los libros de física deben estar juntos y ordenados de menor a mayor?
- 10) ... si los libros de química deben estar juntos y en orden de tamaño?

Ejemplo 47

Calcular el número de diagonales de un heptágono convexo.

Un polígono cualquiera tiene tantos vértices como lados posee. Un heptágono tiene 7 vértices. El segmento que une cada dos vértices *no consecutivos* del polígono es una diagonal del mismo.

Para determinar el número de diagonales del heptágono, calcularemos primero el número de segmentos que pueden formarse uniendo cada dos vértices y le restaremos el número de lados (que son segmentos que unen vértices consecutivos).

De esta forma tendremos que el total de diagonales es:

$$\begin{aligned} T &= C_{7,2} - 7 \\ &= 21 - 7 = \boxed{14} \end{aligned}$$

Nota: En general, el número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$T = C_{n,2} - n$$

Ejemplo 48

En un plano hay 11 rectas de las cuales 5 son paralelas. ¿Cuántos puntos de intersección hay si en un mismo punto no se cortan más de dos rectas?

Dos rectas no paralelas del plano se intersectan en un punto. Si por cada dos rectas se produce un punto de intersección, el número de intersecciones originado por 11 rectas será:

$$C_{11,2}$$

Pero a esta cantidad hay que restarle las intersecciones correspondientes a las 5 rectas que son paralelas y que, por tanto, no se cortan:

$$C_{5,2}$$

El total es, pues:

$$\begin{aligned} T &= C_{11,2} - C_{5,2} \\ &= 55 - 10 = \boxed{45} \end{aligned}$$

Ejemplo 49

En un plano hay 15 circunferencias. Cada una interseca a todas las demás con excepción de 7 circunferencias que son concéntricas y, obviamente, no se intersecan entre sí. ¿Cuántos son los puntos de intersección?

Dos circunferencias secantes entre sí dan origen a dos puntos de intersección. Si todas las 15 de nuestro problema se cortaran entre sí, el total de intersecciones sería:

$$2C_{15,2}$$

Sin embargo a este número hay que restarle las intersecciones que no se producen, dado el hecho de que 7 circunferencias son concéntricas. El número de esas intersecciones sería:

$$2C_{7,2}$$

El total buscado es, por tanto:

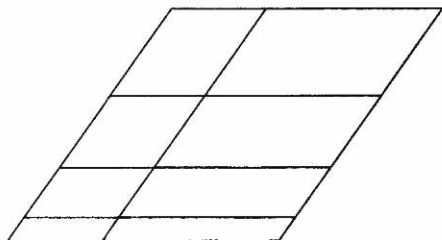
$$T = 2C_{15,2} - 2C_{7,2}$$

$$= 2 \cdot 105 - 2 \cdot 21 = \boxed{168}$$

Ejemplo 50

Determinar cuántos paralelogramos pueden apreciarse en la figura.

(Las cinco líneas horizontales son paralelas; las tres inclinadas también lo son)



Cada par de rectas horizontales puede servir como el par de lados opuestos de un paralelogramo. El total de posibles pares de lados horizontales es:

$$C_{5,2}$$

Cada par de rectas inclinadas puede proporcionar los lados opuestos que completan el paralelogramo. El número de estos pares de lados es:

$$C_{3,2}$$

El total de paralelogramos que hay en la figura es (por el Teorema Fundamental de la Combinatoria):

$$T = C_{5,2} \times C_{3,2}$$

$$= 10 \cdot 3 = \boxed{30}$$

- 1) ¿Cuántas diagonales tiene un hexágono?
- 2) ¿Cuántas diagonales tiene un octágono?
- 3) Se tienen en un plano 5 rectas de las cuales 3 son paralelas. ¿En cuántos puntos se cortan las rectas, si en un mismo punto no se cortan más de dos de ellas?
- 4) Se tienen 8 rectas de las cuales 2 son paralelas. ¿En cuántos puntos se cortan?
- 5) Se tienen 14 rectas de las cuales 5 son paralelas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?
- 6) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono convexo de 25 lados?
- 7) Se tienen en el plano 7 rectas. Entre ellas hay dos que son paralelas entre sí y otras dos que son paralelas entre sí pero no lo son de las dos anteriores. ¿Cuántos puntos de intersección hay?
- 8) En un plano hay 12 rectas. Entre ellas hay 4 que son paralelas entre sí y, en otra dirección, otras 3 que son paralelas entre sí. ¿Cuántos son los puntos de intersección?
- 9) En un plano hay 7 puntos de los cuales no hay tres que estén alineados. ¿Cuántas rectas que pasen por dos de esos puntos pueden trazarse?
- 10) En un plano hay 13 puntos y, a excepción de 4 puntos que están alineados, no hay otros tres que lo estén. ¿Cuántas rectas que pasen por dos de esos puntos pueden trazarse?
- 11) En un plano se tienen 8 circunferencias, cada una de las cuales interseca a las restantes. ¿Cuántos son los puntos de intersección?
- 12) En un plano hay 12 circunferencias. Cada una de ellas cuales interseca a todas las demás, a excepción de tres que son concéntricas. ¿Cuántos son los puntos de intersección?
- 13) Calcular el máximo número de puntos de intersección que se pueden obtener con n circunferencias en el plano.
- 14) Sabiendo que tres puntos determinan una circunferencia, ¿cuántas circunferencias se pueden obtener con 15 puntos del plano no habiendo entre ellos tres puntos colineales?
- 15) ¿Cuántas circunferencias se pueden obtener con 15 puntos del plano si tres de ellos son colineales?
- 16) ¿Y si hay 4 puntos colineales?
- 17) ¿Y si hay 5 puntos colineales?
- 18) Dos elipses pueden intersectarse hasta en cuatro puntos. ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección que se pueden obtener con 12 elipses en el plano?
- 19) ¿Cuántos triángulos quedan determinados por 10 puntos del plano si no hay entre ellos tres que sean colineales?
- 20) ¿Cuántos cuadriláteros quedan determinados por 15 puntos del plano si

no hay entre ellos tres que sean colineales?

- 21) ¿Cuántos tetraedros quedan determinados por 9 puntos si no hay cuatro que estén en el mismo plano?
- 22) ¿Cuántos triángulos se obtienen uniendo cada tres vértices de un pentadécagono convexo?
- 23) Se tiene un sistema de 5 rectas paralelas y otro sistema de 4 rectas paralelas, perpendiculares a las anteriores. ¿Cuántos rectángulos pueden obtenerse con ellas?
- 24) ¿Cuántos paralelogramos se pueden obtener al intersectar un sistema de 8 rectas paralelas con otro de 6 rectas paralelas entre sí pero no a las anteriores?
- 25) En una de dos rectas paralelas se toman 5 puntos. En la otra se toman 4. Cada uno de los puntos de la primera recta se une mediante un segmento con cada uno de los puntos de la otra. Calcular en cuántos puntos se intersectan dichos segmentos sabiendo que en ningún punto se cruzan más de dos segmentos al mismo tiempo.
- 26) En un sistema de rectas paralelas hay m rectas; en otro sistema de rectas del mismo plano hay n rectas paralelas entre sí (pero no a las anteriores). ¿Cuántos paralelogramos se forman?
- 27) ¿Cuántos rectángulos hay en la Fig. 1?
- 28) ¿Cuántos paralelogramos tiene la Fig. 2?
- 29) ¿Cuántos rectángulos y cuántos trapezios rectángulos hay en la Fig. 3?

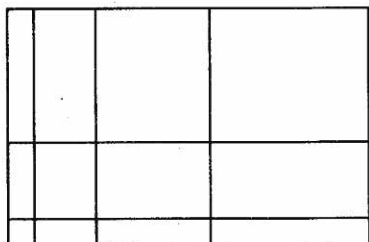


Fig. 1

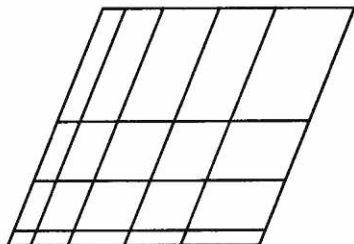


Fig. 2

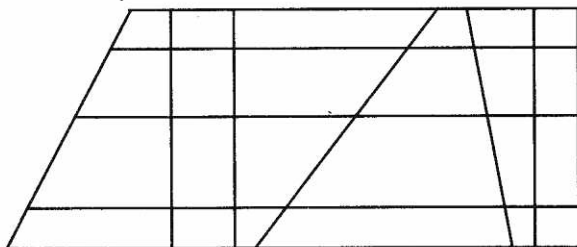


Fig. 3

Ejemplo 51

¿Cuántos elementos son necesarios para formar con ellos 55 combinaciones binarias?

Si llamamos x el número de elementos, tenemos que

$$C_{x,2} = 55$$

Resolviendo la ecuación:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 55$$

$$x(x-1) = 110$$

Descomponiendo el miembro de la derecha en dos factores consecutivos decrecientes:

$$x(x-1) = 11 \cdot 10$$

De donde

$x = 11$

Ejemplo 52

Las combinaciones cuaternarias de un número y las combinaciones binarias de otro número mayor que el primero por cuatro unidades están en la relación 1:3. ¿Cuál es el primer número?

Si llamamos x al primer número, tenemos que:

$$\frac{C_{x,4}}{C_{x+4,2}} = \frac{1}{3}$$

Resolviendo la ecuación:

$$3C_{x,4} = C_{x+4,2}$$

$$\frac{3x(x-1)(x-2)(x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{(x+4)(x+3)}{2}$$

Simplificando y trasponiendo denominadores:

$$x(x-1)(x-2)(x-3) = 4(x+4)(x+3)$$

$$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 4x^2 + 28x + 48$$

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 34x - 48 = 0$$

Resolvemos la ecuación utilizando Ruffini. Para que la primera combinación tenga sentido debe cumplirse que $x \geq 4$. Probaremos por tanto sólo con números positivos de 4 en adelante.

La primera raíz que encontramos es 6:

	1	-6	7	-34	-48
6		6	0	42	48
	1	0	7	8	0

El cociente resultante no tiene más raíces positivas; por tanto, la solución única del problema es:

$$x = 6$$

Ejemplo 53

¿Cuál es el polígono que tiene 35 diagonales?

En un polígono de n lados (y vértices) el número de diagonales es igual a:

$$C_{n,2} - n$$

En nuestro problema el número de diagonales es 35. Tenemos entonces que:

$$C_{n,2} - n = 35$$

Resolviendo:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = 35$$

$$n(n-1) - 2n = 70$$

$$n^2 - n - 2n - 70 = 0$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

$$(n-10)(n+7) = 0$$

De donde:

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -7$$

La segunda solución es en nuestro caso inadmisibles. El polígono de 35 diagonales es, en consecuencia, el *decágono*.

Ejemplo 54

En un polígono, el número de diagonales excede en 5 al triple del número de lados. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Si llamamos n al número de lados, tendremos que:

$$C_{n,2} - n = 3n + 5$$

Resolviendo:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = 3n + 5$$

$$n(n-1) - 2n = 6n + 10$$

$$n^2 - n - 2n - 6n - 10 = 0$$

$$n^2 - 9n - 10 = 0$$

$$(n-10)(n+1) = 0$$

De donde:

$$n_1 = 10$$

$$n_2 = -1$$

El polígono tiene 10 lados.

Ejemplo 55

El total de números de 3 y de 4 cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos distintos (entre los que no figura el cero), sin repetir ninguno de ellos, es igual a 480. ¿Cuántos son los dígitos?

Llamando x al número de dígitos, los números de tres cifras que pueden formarse son:

$$V_{x,3}$$

Los de cuatro cifras son:

$$V_{x,4}$$

Tenemos, entonces, que:

$$V_{x,3} + V_{x,4} = 480$$

Desarrollando:

$$x(x-1)(x-2) + x(x-1)(x-2)(x-3) = 480$$

Sacando factor común:

$$x(x-1)(x-2)[1 + (x-3)] = 480$$

$$x(x-1)(x-2)^2 = 480$$

Descomponiendo 480 en factores que guarden entre sí la misma relación que guardan entre sí los factores del miembro de la izquierda:

$$x(x-1)(x-2)^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4^2$$

De donde:

$$x = 6$$

Ejemplo 56

El total de números de 5 cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos (entre los que figura el cero) sin repetir ninguno de éstos es 5 veces mayor que el de números de 4 cifras que se pueden formar con ellos. ¿Cuántos son los dígitos?

Sea x el número de dígitos del que se dispone. Los números de 5 cifras que se pueden formar con ellos son de la forma XX XXX. A éstos hay que restarle los que comienzan por cero y que tienen la forma 0X XXX:

$$V_{x,5} - V_{x-1,4}$$

Análogamente, los de cuatro cifras serán los de la forma X XXX menos los de la forma 0 XXX:

$$V_{x,4} - V_{x-1,3}$$

Según las condiciones del problema, el total de aquéllos es 5 veces mayor que el de éstos:

$$V_{x,5} - V_{x-1,4} = 5(V_{x,4} - V_{x-1,3})$$

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) &= \\ = 5[x(x-1)(x-2)(x-3) - (x-1)(x-2)(x-3)] \end{aligned}$$

Dividiendo cada término por

$$(x-1)(x-2)(x-3):$$

$$x(x-4) - (x-4) = 5[x-1]$$

$$x^2 - 4x - x + 4 = 5x - 5$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-9)(x-1) = 0$$

$$\boxed{x_1 = 9}$$

$$x_2 = 1$$

Los dígitos son 9.

Ejercicio 63

- 1) ¿Cuántos elementos deben intervenir para que con ellos se puedan formar tantas variaciones binarias como combinaciones ternarias?
- 2) ¿Cuántos elementos deben intervenir para que con ellos se puedan formar tantas variaciones ternarias como combinaciones cuaternarias?
- 3) Las combinaciones ternarias y las combinaciones cuaternarias de un número están en la relación 4:5. ¿Cuál es el número?
- 4) La relación entre las variaciones ternarias y las combinaciones ternarias de un número k es k . ¿Cuál es el valor de k ?
- 5) ¿Cuántos elementos son necesarios para formar con ellos 91 combinaciones binarias?
- 6) El número de variaciones binarias de un determinado número de elementos es el doble de las combinaciones cuaternarias de los mismos elementos. ¿Cuántos son éstos?
- 7) Las combinaciones cuaternarias de un número exceden en 10 a las variaciones ternarias de otro número inferior al primero en 3 unidades. ¿Cuál es el primer número?
- 8) La suma de las combinaciones binarias de un número, las ternarias del número consecutivo y las cuaternarias del consecutivo de éste último excede en 5 unidades a las variaciones ternarias del primero. ¿Cuál es éste?

- 9) En un polígono regular se pueden trazar 54 diagonales. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- 10) ¿Cuántos lados tiene un polígono si el número de sus diagonales es 5 veces mayor que el número de sus lados?
- 11) ¿Cuántos lados tiene un polígono si el número de sus diagonales es 7 veces el número de sus lados?
- 12) El número de diagonales de un polígono excede en 3 al número de lados del polígono. ¿De qué polígono se trata?
- 13) En un polígono, el número de diagonales excede en 4 al doble del número de lados. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- 14) En un plano hay un número determinado de circunferencias todas secantes entre sí. Determinar el número de circunferencias sabiendo que el total de intersecciones es 90 y que en un mismo punto no se cortan más de dos circunferencias.
- 15) El total de números distintos de dos y de tres cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos distintos (entre los que no figura el cero), sin repetir ninguno de ellos, es igual a 25 veces la cantidad de dígitos de la que se dispone. ¿De cuántos dígitos se dispone?
- 16) El total de números de dos y de tres cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos distintos (entre los que no figura el cero), sin repetir ninguno de ellos, es igual a 49 veces la cantidad de dígitos de la que se dispone. ¿Cuántos son éstos?
- 17) El total de números de dos y de tres cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos (entre los que está el cero), sin repetir ninguno de ellos, es igual a 31 veces el número de dígitos disminuido en uno. ¿Cuántos son éstos?
- 18) El total de números de dos y de tres cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos (entre los que está el cero), sin repetir ninguno de ellos, es igual a 216. ¿Cuántos son los dígitos?
- 19) El total de números de 5 cifras que se pueden formar con un determinado número de dígitos distintos (entre los que figura el cero), sin repetir ninguno de ellos, es 3 veces mayor que el de números de 4 cifras que se pueden formar con ellos. ¿Cuántos son los dígitos?
- 20) En una reunión a la que asiste un determinado número de personas, cada uno de los asistentes saluda con un apretón de manos a cada una de las restantes personas. Si en total se producen 36 apretones de mano, ¿cuántos eran los asistentes?
- 21) Dos países A y B en litigio envían sendos grupos de representantes a un debate. La delegación del país A es más numerosa que la del país B . Los delegados son, en total, 18. Los del país A se saludan entre sí, al igual que los del país B , pero ningún delegado saluda a un delegado del otro país. En total se producen 73 saludos. ¿Cuántos representantes hay en cada delegación?
- 22) Se realiza un congreso de Zambos, Zimbos y Zumbos. Al encontrarse, los de cada delegación se saludan entre sí y saludan a los miembros de las

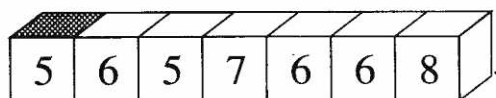
otras delegaciones, con excepción de Zimbos y Zumbos que son enemigos y no se saludan. En total se producen 244 saludos. Determinar cuántas personas hay en cada delegación, sabiendo que en total hay 25 personas, que los Zambos son los más numerosos y que el número de Zambos excede en 3 al de los Zumbos.

- 23) Un grupo de profesionales está compuesto por médicos, abogados e ingenieros. El número de formas distintas en que pueden colocarse en una fila, con la condición de que los abogados queden juntos y los ingenieros queden también juntos, es de 3.456. Determinar cuántos médicos, abogados e ingenieros hay, sabiendo que los abogados son la tercera parte del grupo y que los ingenieros superan en uno el número de abogados.
- 24) Se dispone de una cantidad de libros de Matemáticas, Física, Química y Biología. Si se pone la condición de que los libros de Física deben estar juntos y también los de Química y los de Biología, hay 49.766.400 formas distintas de colocar todos los libros en un estante. Determinar cuántos libros hay de cada materia, sabiendo que la cuarta parte de los libros son de Física, los de Química exceden en uno a los de Física y los de Biología en uno a los de Química.
- 25) Un polígono tiene tantas diagonales como lados. ¿Cuál es el polígono?
- 26) En un polígono se trazan todas las diagonales y el número de éstas resulta menor que el número de lados. ¿De qué polígono se trata?
- 27) En un polígono el número de diagonales es mayor que el número de lados pero sin llegar a ser el doble de éstos. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- 28) En un polígono el número de diagonales es mayor que el doble pero menor que el triple del número de lados. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- 29) En un polígono que tiene un número impar de lados, el número de diagonales es mayor que cinco veces el número de lados pero menor que siete veces el número de éstos. ¿Cuántos lados tiene el polígono?
- 30) El número de diagonales de un polígono es 10 veces el número de diagonales de otro polígono que tiene 9 lados menos que el primero. ¿Cuántos lados tiene el primer polígono?
- 31) El número de diagonales de un polígono es $\frac{1}{18}$ del número de diagonales de otro polígono que tiene 17 lados más que el primero. ¿Cuántos lados tiene el primer polígono?
- 32) La suma de las diagonales de un polígono y las de otro polígono que tiene dos lados más es igual al número de diagonales de un tercer polígono que tiene siete lados más que el primero. ¿Cuántos lados tiene el primero?
- 33) La suma de las diagonales de un polígono y las de otro que tiene tres lados más es igual al número de diagonales de un tercer polígono que tiene nueve lados más que el primero. ¿Cuántos lados tiene el primero?
- 34) El número de diagonales de un polígono excede en 6 unidades a la suma de las diagonales de otros dos polígonos que tienen, respectivamente, 8 y 12 lados menos que el primer polígono. ¿Cuántos lados tiene el primero?
- 35) Si cierto polígono tuviera un lado menos, tendría siete diagonales menos. ¿Cuántos lados tiene?

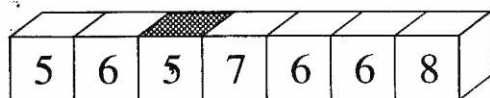
Permutaciones con repetición

Supóngase que deseamos conocer la cantidad de números de siete cifras que se pueden formar con los dígitos 5, 5, 6, 6, 6, 7 y 8. Supóngase también que estos dígitos están grabados cada uno sobre una de las caras de dados de madera diferentes.

Formemos con los dados un número cualquiera de siete cifras, por ejemplo



Si en esta ordenación intercambiamos el primero y el tercer dado



el número que obtenemos será idéntico al anterior. Lo mismo ocurre si intercambiamos entre sí de cualquier forma los tres dados que tienen grabado el número 6.

Llamemos M al número de permutaciones discernibles (es decir, realmente distintas) que se pueden formar con estos elementos.

Dado que tenemos $2!$ formas de intercambiar los dados que tienen grabado el número 5 y $3!$ formas de intercambiar los que tienen grabado el 6, el número total de formas distintas en que pueden ser ordenados los siete dados es (por el Teorema Fundamental de la Combinatoria):

$$T = M \cdot 2! \cdot 3!$$

Por otra parte, ya sabemos que el total de formas en que se pueden ordenar siete elementos es

$$T = P_7 = 7!$$

Igualando las expresiones anteriores:

$$M \cdot 2! \cdot 3! = 7!$$

y

$$M = \frac{7!}{2! \cdot 3!}$$

Generalizando, el número de permutaciones que podemos obtener con n elementos entre los que hay p elementos iguales entre sí, q iguales entre sí, t iguales entre sí, etc., es

$$P = \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot t! \cdots}$$

(10^c)

Ejemplo 57

¿Cuántos números distintos de ocho cifras se pueden formar con los dígitos 3, 3, 3, 3, 5, 5, 7, y 8?

Obviamente se trata de un caso de permutación con repetición. Dado que el tres está repetido 4 veces y el cinco 2 veces, el total será:

$$T = \frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \boxed{840}$$

Ejemplo 58

¿Cuántos de los números del ejemplo anterior serán pares?

Serán pares los terminados en 8, es decir, los de la forma X XXX XX8.

El número de éstos es:

$$T = \frac{7!}{4!2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!2!} = \boxed{105}$$

Ejercicio 64

- 1) ¿Cuántos números distintos de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 7, 8, 8, 8?
- 2) ¿Cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 8, 9, 9, 9, 9?
- 3) ¿Cuántos números distintos de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 2, 2, 4, 5, 6?
- 4) ¿Y con los dígitos 2, 2, 2, 4, 6, 6?
- 5) ¿Y con los dígitos 2, 2, 2, 2, 6, 6?

¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de las siguientes palabras?

- 6) MAMUT
- 7) LOGRAR
- 8) CARACAS
- 9) HEREDERO
- 10) CACOFONIA
- 11) PROPORCION
- 12) BARRABAS
- 13) BOCACALLE
- 14) ABRACADABRA
- 15) INDEPENDIENTE

A continuación se dan 5 palabras. En cada caso determinar cuántas palabras distintas (que tengan igual número de letras que la palabra dada) se pueden formar con la condición de que las vocales y las consonantes estén alternadas:

- 16) LICENCIA
- 17) PAPUPAPA
- 18) PENITENTE
- 19) PENICILINA
- 20) TITIRITERO

- 21) ¿Cuántos números distintos de 7 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 2, 2, 2, 4, 5, 6?
- 22) ¿Cuántos de los números del ejercicio anterior serán divisibles por 5?
- 23) ¿Cuántos serán divisibles por 25?
- 24) ¿Cuántos serán divisibles por 125?

Variaciones con repetición

Estudiemos la variación de m elementos en el caso de que éstos puedan estar repetidos cualquier número de veces.

El hecho de que los m elementos puedan aparecer repetidos hace que, en el caso de las variaciones con repetición, n pueda ser menor, igual o mayor que m .

Designaremos este tipo de variaciones con el símbolo $V_{m,n}^R$

Si disponemos de m elementos, las variaciones monarias de éstos son:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$$

Tenemos, pues, que:

$$V_{m,1}^R = m$$

Las variaciones binarias se obtienen colocando a la derecha de cada monaria los m elementos dados, tal como aparece en el siguiente cuadro:

$a_1 a_1$	$a_1 a_2$	$a_1 a_3$	$\dots$	$a_1 a_m$
$a_2 a_1$	$a_2 a_2$	$a_2 a_3$	$\dots$	$a_2 a_m$
$a_3 a_1$	$a_3 a_2$	$a_3 a_3$	$\dots$	$a_3 a_m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_m a_1$	$a_m a_2$	$a_m a_3$	$\dots$	$a_m a_m$

Es obvio que

$$V_{m,2}^R = V_{m,1}^R \cdot m$$

$$V_{m,2}^R = m \cdot m$$

$$V_{m,2}^R = m^2$$

Las variaciones ternarias se obtienen colocando a la derecha de cada una de las binarias los m elementos dados.

Tendremos, pues, que:

$$V_{m,3}^R = V_{m,2}^R \cdot m$$

$$V_{m,3}^R = m^2 \cdot m$$

$$V_{m,3}^R = m^3$$

Razonando en forma análoga, tendremos la fórmula general:

$$V_{m,n}^R = m^n$$

(11^c)

Ejemplo 59

¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6? (Para este ejemplo y para los siguientes se supone que los elementos pueden repetirse cualquier cantidad de veces).

El número de elementos dado es $m = 6$ y el de los que entran en cada ordenación es $n = 4$.

El total del número es: $T = V_{6,4}^R = 6^4 =$ 1296

Ejemplo 60

¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar con los dígitos 2, 3 y 4?

El total de elementos dados es $m = 3$ y el de los que entran en cada ordenación es $n = 6$.

Tendremos que: $T = V_{3,6}^R = 3^6 =$ 729

Ejemplo 61

¿Cuántas ordenaciones distintas de 4 letras cada una pueden formarse con las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, si en cada ordenación debe haber dos vocales y dos consonantes?

El total de formas distintas en que se pueden colocar las vocales en los dos sitios correspondientes a ellas es:

$$V_{3,2}^R$$

El total de formas en que se pueden colocar las consonantes en los dos sitios restantes es:

$$V_{6,2}^R$$

Los espacios de la ordenación pueden estar ocupados por las vocales y consonantes de seis formas distintas, a saber:

VVCC
VCVC
VCCV
CVVC
CVCV
CCVV

El total de ordenaciones que pueden hacerse con las condiciones dadas es (por el Teorema Fundamental de la Combinatoria):

$$T = V_{3,2}^R \times V_{6,2}^R \times 6$$

$$= 3^2 \cdot 6^2 \cdot 6 = \boxed{1944}$$

Ejercicio 65

- 1) ¿Cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6?
- 2) ¿Y cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los mismos dígitos?
- 3) ¿Cuántos números menores de 400 se pueden formar con los dígitos del ejercicio 1?
- 4) ¿Cuántos números mayores de 4.000 y menores de 300.000 se pueden formar con los dígitos del ejercicio 1?
- 5) ¿Cuántas placas de carro distintas se pueden obtener que tengan dos de las letras A, B, C, D, E, F, G y, a continuación, cuatro de los siguientes dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 y 6?
- 6) Un dispositivo hexagonal para hacer señales luminosas tiene, en cada vértice, cuatro faros de colores amarillo, azul, rojo y verde. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con él si para cada señal debe estar encendido sólo uno de los faros de cada vértice?
- 7) ¿Cuántos números distintos de 3 cifras se pueden formar que tengan dos cifras pares y una impar si se excluye el cero?
- 8) ¿Cuántos son los números del ejercicio anterior si no se excluye el cero?

- 9) ¿Cuántas ordenaciones de 5 letras cada una pueden formarse con las letras a, b, c, d y e si en cada ordenación debe haber 3 consonantes y 2 vocales?
- 10) ¿Cuántas ordenaciones de 5 letras cada una pueden formarse con las letras del ejercicio anterior si en cada ordenación debe haber 3 vocales y 2 consonantes?
- 11) Para transmitir señales de una isla a la costa se dispone de 6 luces blancas y 6 rojas, colocadas en los vértices de un hexágono. En cada vértice no puede haber encendida más que una luz (blanca o roja) y el número mínimo de luces encendidas es tres. Hallar el número de señales distintas que se pueden hacer.

Combinaciones con repetición

Utilizaremos el símbolo

$$C_{m,n}^R$$

para designar las combinaciones con repetición, es decir, aquellas en las que cada uno de los elementos puede repetirse cualquier número de veces.

En las combinaciones con repetición, dos ordenaciones se consideran diferentes cuando difieren en algún elemento o cuando tienen los mismos elementos repetidos un número distinto de veces.

También en el caso de las combinaciones con repetición, n puede ser menor, igual o mayor que m .

Para calcular su número consideremos que disponemos de m elementos y que n de ellos entran a formar parte de cada ordenación.

Construyamos una ordenación cualquiera de n elementos como la siguiente:

$$a_1, a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_9, \dots, a_m$$

Para diferenciar mejor cada uno de esos elementos los transformaremos designándolos con otra letra b cuyo subíndice será el subíndice disminuido en una unidad del elemento que queremos transformar más el ordinal del elemento en la ordenación. Dicho de otra forma: el subíndice de b será igual al del correspondiente elemento a aumentado en tantas unidades como términos le preceden:

1	a_1	$b_{1+1-1} = b_1$
1	a_1	$b_{1+2-1} = b_2$
1	a_1	$b_{1+3-1} = b_3$
1	a_2	$b_{2+4-1} = b_5$
1	a_2	$b_{2+5-1} = b_6$
1	a_3	$b_{3+6-1} = b_8$
1	a_9	$b_{9+7-1} = b_{15}$
⋮	⋮	⋮
n	a_m	$b_{m+n-1} = b_{m+n-1}$

Con esto hemos obtenido que cada uno de los elementos de la ordenación de la segunda columna quede representado por algún elemento de la que aparece en la cuarta columna. La diferencia radica en que en la primera ordenación aparecen elementos repetidos; no así en la segunda.

El número de ordenaciones del primer tipo es una combinación con repetición de m elementos entrando n en cada ordenación: $C_{m,n}^R$.

El número de ordenaciones del segundo tipo es una combinación ordinaria de $m+n-1$ elementos entrando n en cada ordenación: $C_{m+n-1,n}$.

Y dado que hay una correspondencia biunívoca entre las ordenaciones de ambos tipos, podemos concluir que

$$C_{m,n}^R = C_{m+n-1,n}$$

o también:
$$C_{m,n}^R = \frac{(m+n-1)!}{n! (m-1)!} \quad (12^c)$$

Ejemplo 62

En una tienda hay estatuillas de vidrio, de porcelana, de madera y de bronce. ¿De cuántas formas distintas pueden elegirse 6 estatuillas?

Hay cuatro tipos de elementos ($m = 4$) con los que hay que formar ordenaciones de seis ($n = 6$).

El total de formas distintas de hacerlo es:

$$\begin{aligned} T &= C_{4,6}^R = \frac{(4+6-1)!}{6! (4-1)!} \\ &= \frac{9!}{6! 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} \\ &= \boxed{84} \end{aligned}$$

Ejemplo 63

A un congreso asisten representantes de cuatro países (Austria, Bélgica, Canadá y Dinamarca). Todas las delegaciones tienen al menos ocho representantes, a excepción de la de Dinamarca que sólo tiene tres. ¿De cuántas formas distintas puede elegirse entre todos ellos un equipo de trabajo de 6 personas?

Si la delegación danesa tuviera al menos seis representantes, los equipos de trabajo que podrían formarse serían:

$$C_{4,6}^R$$

Pero, dado que los daneses son sólo tres, hay que restar de este número las siguientes configuraciones:

DDDDDD cuyo número es:

$$C_{1,6}^R$$

DDDDDX cuyo número es:

$$C_{1,5}^R \times C_{3,1}^R$$

DDDDXX cuyo número es:

$$C_{1,4}^R \times C_{3,2}^R$$

El total de equipos de trabajo es, por tanto:

$$T = C_{4,6}^R - (C_{1,6}^R + C_{1,5}^R \times C_{3,1}^R + C_{1,4}^R \times C_{3,2}^R)$$

$$= 84 - (1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 6) = \boxed{74}$$

Ejercicio 66

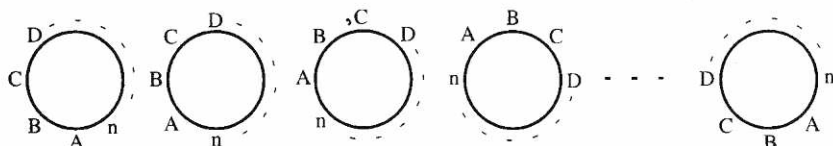
- 1) Con los números 1, 7, 11, 15, 24 y 37, ¿cuántas sumas distintas de tres sumandos cada una pueden obtenerse, sabiendo que dichos números pueden repetirse cualquier número de veces?
- 2) Se tienen pinturas de cinco colores. ¿Cuántos colores pueden obtenerse con ellas mezclando tres medidas iguales de una o de varias de esas pinturas?
- 3) ¿Cuántas notas y acordes distintos pueden obtener cuatro flautistas si cada uno de ellos tiene una flauta que puede producir 12 sonidos diferentes? (Se considera que el acorde producido por un flautista que toca el Do, dos que tocan el Mi y uno que toca el Sol es distinta al producido por un Do, un Mi y dos Sol, por ejemplo).
- 4) Una florista dispone de claveles, rosas y crisantemos. ¿Cuántos ramos distintos de 8 de esas flores puede formar?
- 5) ¿Cuántos grupos distintos de 11 personas se pueden formar con pilotos, marinos, soldados de infantería y guardias nacionales?
- 6) En una asamblea compuesta de abogados, médicos, arquitectos y economistas se desea formar una comisión de 7 personas. ¿De cuántas formas distintas puede formarse ésta si en la comisión debe haber por lo menos un médico?
- 7) Un empresario que tiene cuentas en cinco bancos debe darle cinco cheques de igual monto a un proveedor. ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo?
- 8) En un barco en peligro hay niños, adultos, ancianos y miembros de la tripulación. ¿De cuántas formas pueden elegirse los ocupantes de un bote salvavidas en el que caben 10 personas si el bote debe llevar por lo menos dos niños y un miembro de la tripulación?

- 9) Se dispone de cuadernos de cinco marcas distintas. ¿De cuántas formas distintas se le pueden dar siete cuadernos a un estudiante?
- 10) De un grupo de 9 trompetistas, 10 saxofonistas, 8 clarinetistas y 3 flautistas se desea seleccionar a siete músicos para formar un conjunto. ¿De cuántas formas puede hacerse esto?
- 11) En un grupo de cantores hay sopranos, contraltos, tenores, barítonos y bajos. De cada uno de ellos hay por lo menos diez, a excepción de los bajos que son sólo cuatro. ¿Cuántos coros distintos de 10 personas pueden formarse con ellos?

Permutaciones circulares

Llamaremos permutaciones circulares a las ordenaciones de n elementos dispuestos sobre una línea cerrada (por ejemplo una circunferencia) y las designaremos con el símbolo P_n^C .

Dos permutaciones circulares son iguales si los objetos iguales de ambas tienen, a su derecha e izquierda, objetos respectivamente iguales.



Las permutaciones de la figura anterior son todas iguales, pues en ellas un objeto cualquiera tiene siempre a derecha e izquierda los mismos objetos.

Dado que un objeto cualquiera puede ocupar n lugares alrededor de la circunferencia, son n las permutaciones iguales derivadas de esta rotación.

Ya es sabido que el total de permutaciones que se pueden obtener con n elementos es $P_n = n!$

Si dividimos por n este total, obtendremos las permutaciones circulares distintas:

$$P_n^C = \frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)! = P_{n-1}$$

En definitiva,

$$\boxed{P_n^C = P_{n-1} = (n-1)!} \quad (13^C)$$

Ejemplo 64

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse siete personas alrededor de una mesa redonda?

Es obviamente un caso de permutación circular de 7 elementos. El total es:

$$T = P_7^C = 6! = \boxed{720}$$

Ejemplo 65

¿De cuántas formas distintas pueden sentarse el Presidente de una empresa y seis empleados alrededor de una mesa redonda?

Cuando en una permutación circular uno de los elementos destaca de los demás, las distintas posiciones que este elemento ocupa en la línea cerrada deben considerarse como ordenaciones distintas. El problema se convierte, por tanto, en un caso simple de permutaciones ordinarias.

El total pedido es:

$$T = P_7 = 7! = \boxed{5040}$$

Ejemplo 66

¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 8 personas alrededor de una mesa si hay tres de ellas que no deben ocupar sitios consecutivos?

Calcularemos el total de permutaciones circulares y le restaremos aquellas en las que las tres personas ocupan sitios consecutivos.

El total de permutaciones circulares es:

$$P_8^C$$

Para calcular las ordenaciones en las que las tres personas ocupan sitios consecutivos, consideraremos estas personas como una unidad inseparable. Esta unidad con las cinco personas restantes forman un total de seis elementos. Las permutaciones circulares de éstos son:

$$P_6^C$$

Pero, por cada una de estas posibilidades, las formas en que pueden colocarse las tres personas en sitios consecutivos es:

$$P_3$$

El número de ordenaciones en las que las tres personas ocupan puestos consecutivos es:

$$P_6^C \times P_3$$

Y el total pedido es:

$$T = P_8^C - (P_6^C \times P_3)$$

$$= 7! - 5! \cdot 3! = \boxed{4320}$$

Ejercicio 67

- 1) ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse cuatro personas para jugar dominó?
- 2) ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse alrededor de una mesa redonda un profesor con sus 8 alumnos?
- 3) ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse 8 velas de distintos colores en los bordes de una torta redonda?
- 4) ¿De cuántas formas pueden colocarse las velas del ejercicio anterior si una de ellas debe ir en el centro de la torta?
- 5) ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse siete niños al hacer una rueda si entre ellos hay dos hermanitos que siempre quieren quedar juntos?
- 6) ¿De cuántas formas pueden colocarse 9 personas alrededor de una mesa redonda si 4 de ellas no deben quedar en sitios consecutivos?
- 7) ¿De cuántas formas distintas pueden colocarse cinco presos alrededor de una mesa redonda si uno de ellos tiene la mano derecha esposada a la izquierda de otro preso?
- 8) ¿De cuántas formas pueden cuatro niños y cuatro niñas hacer una rueda si los niños y las niñas deben estar alternados?

Ejercicio 68

Ejercicios de recapitulación

- 1) Demostrar que $n! + (n+1)! = \frac{(n+2)!}{n+1}$
- 2) Demostrar que $(n+1)! - n! = n^2(n-1)!$
- 3) Demostrar que $\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n+2}{(n+1)!}$
- 4) Demostrar que $\frac{m!}{(n-1)!(m-n+1)!} + \frac{m!}{n!(m-n)!} = \frac{(m+1)!}{n!(m-n+1)!}$

Demostrar por Inducción Completa las tres igualdades siguientes:

- 5) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$
- 6) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$
- 7) $V_{m,n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)$
- 8). Un dispositivo para hacer señales con banderas tiene 6 posiciones para 6 banderas. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con ellas desplegándolas simultáneamente si tres de las banderas son rojas, dos son azules y una es blanca?

- 9) ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse 5 llaves en un aro?
- 10) ¿Cuántos comités distintos de 6 personas se pueden formar con los 10 empleados y con los 15 obreros de una fábrica
 - a) si el comité debe estar formado por 4 obreros y 2 empleados?
 - b) si en el comité no debe haber más de 4 empleados?
- 11) ¿De cuántas formas distintas se pueden ordenar las letras de la palabra "MURCIELAGO" si en todas ellas las vocales deben aparecer en ese mismo orden: U I E A O?
- 12) ¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra "TRIQUITRAQUE" si después de la letra Q debe ir una U y, después de éstas, una I o una E?
- 13) Se dispone de 3 pesas de 5 gr cada una, 3 pesas de 1kg cada una y 2 pesas de 5 kg cada una. ¿Cuántas pesadas distintas pueden efectuarse con 3 pesas como máximo?
- 14) Resolver el sistema:
$$\begin{cases} (x - y)! = y - 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$
- 15) Resolver el sistema:
$$\begin{cases} (x^2 - y)! = 5y + 1 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$
- 16) Resolver:
$$\begin{cases} x! \neq 7 \\ (3 - y)! \neq 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$
- 17) Seis personas, entre las que están A y B, van a tomar la palabra en una reunión. ¿De cuántas formas distintas puede establecerse el orden de las intervenciones si A debe hablar antes que B?
- 18) ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

La primera fila de una sala de cine tiene 12 asientos. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse en esa primera fila 5 hombres y 4 mujeres ...

- 19) ... si pueden sentarse en cualquier asiento, sin ninguna restricción?
- 20) ... si el grupo debe sentarse en asientos contiguos?
- 21) ... si las mujeres deben sentarse en asientos contiguos?
- 22) ... si los hombres deben sentarse en asientos contiguos?
- 23) ... si las mujeres deben colocarse de a dos y entre un par de mujeres y otro debe haber al menos un hombre?
- 24) ... si no deben quedar más de tres hombres en asientos contiguos?
- 25) ... si hombres y mujeres deben colocarse en forma alternada y en asientos contiguos?
- 26) ... si hombres y mujeres deben colocarse en forma alternada pero no necesariamente en asientos contiguos?

- 27) ... si no deben sentarse dos hombres o dos mujeres en asientos contiguos?
- 28) ... si las mujeres deben colocarse en asientos contiguos y en orden de edad?
- 29) ... si no deben quedar dos asientos contiguos vacíos?
- 30) ... si deben sentarse todos en orden de estatura?
-
- 31) Una urna contiene 12 bolas, de las cuales 5 son negras, 4 blancas y 3 rojas. ¿De cuántas maneras se pueden sacar simultáneamente grupos de seis donde haya por lo menos una de cada color?
- 32) ¿De cuántas formas se pueden colocar 3 damas en un tablero de ajedrez de tal forma que sus posiciones sean los vértices de un triángulo rectángulo cuyos catetos sean paralelos a los bordes del tablero?
- 33) ¿De cuántas formas se pueden colocar 4 damas en un tablero de ajedrez de tal forma que sus posiciones sean los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero?
- 34) ¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de ajedrez que tengan un lado igual al doble del otro?
- 35) ¿Cuántos rectángulos hay en un tablero de ajedrez que tengan un lado igual al triple del otro?
- 36) ¿De cuántas formas se pueden colocar 4 damas en un tablero de ajedrez de tal forma que sus posiciones sean los vértices de un rectángulo de lados paralelos a los bordes del tablero y que uno de los lados sea igual al doble del otro?
- 37) Cuatro muchachos viajan en un autobús que corre a una velocidad de 90 km/hora, ocupando cuatro puestos que están al fondo del vehículo. Cada cuarto de hora se intercambian los puestos y llegan a su destino cuando han agotado todas las disposiciones posibles. ¿Cuántos kilómetros recorrió el autobús?



Números combinatorios

En el estudio de las propiedades de la potencia de un binomio, emplearemos, dada su practicidad, la notación de **Euler** $\binom{m}{n}$ para representar la ya conocida expresión $C_{m,n}$.

$$\boxed{\binom{m}{n} = C_{m,n}} \quad (14^c)$$

La expresión $\binom{m}{n}$ recibe el nombre de **número combinatorio**. A pesar de que no se trata de una fracción, llamaremos **numerador** al número m y **denominador** al número n .

Dado que el número combinatorio $\binom{m}{n}$ es igual a $C_{m,n}$, todas las equivalencias y propiedades de éste último se pueden aplicar al primero.

Tenemos, por tanto, que, por la relación (4^c):

$$\boxed{\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}} \quad (15^c)$$

Esta relación nos permite calcular el valor del número combinatorio cuando conocemos el valor de n .

Ejemplos

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4!} = 35$$

$$\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Tenemos, además, que, por la relación (6^C):

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)! n!} \quad (16^C)$$

relación que nos será de utilidad especialmente cuando desconozcamos el valor de n .

Ejemplos

$$\binom{5}{x} = \frac{5!}{(5-x)! x!}$$

$$\binom{x+7}{x} = \frac{(x+7)!}{7! x!}$$

$$\binom{x}{x-3} = \frac{x!}{3! (x-3)!} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{6(x-3)!} = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

Propiedades de los números combinatorios

Son las mismas que las de la expresión $C_{m,n}$.

Propiedad I: Por la relación (7^C) tenemos:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \quad (17^C)$$

es decir, que dos números combinatorios con igual numerador y denominadores complementarios con respecto a aquél son iguales.

Ejemplos

Son ciertas por la propiedad (17^C) las siguientes igualdades:

$$\binom{9}{7} = \binom{9}{2}$$

$$\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$$

$$\binom{8}{3} = \binom{8}{5}$$

Esta propiedad nos permite, como en el caso de las combinaciones, simplificar algunos cálculos.

Ejemplo

Calcular $\binom{90}{88}$

$$\binom{90}{88} = \binom{90}{2} = \frac{90 \cdot 89}{2!} = 4005$$

Propiedad II: Por la relación (8^c) tenemos:

$$\boxed{\binom{m}{m} = \binom{m}{0} = 1} \quad (18^c)$$

Ejemplos

$$\binom{8}{8} = 1$$

$$\binom{9}{0} = 1$$

$$\binom{15}{15} = 1$$

$$\binom{x-1}{0} = 1$$

Propiedad III: Es fácilmente demostrable que

$$\boxed{\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m} \quad (19^c)$$

En efecto:

$$\binom{m}{1} = \frac{m!}{(m-1)! 1!} = \frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

$$\binom{m}{m-1} = \frac{m!}{(m-m+1)! (m-1)!} = \frac{m!}{1! (m-1)!} = \frac{m(m-1)!}{(m-1)!} = m$$

Ejemplos

$$\binom{8}{7} = 1$$

$$\binom{9}{1} = 9$$

$$\binom{10}{9} = 10$$

$$\binom{7}{1} = 7$$

Ejercicio 69

Calcular el valor de los siguientes números combinatorios:

1) $\binom{12}{3}$

7) $\binom{31}{5}$

13) $\binom{91}{89}$

19) $\binom{x}{3}$

2) $\binom{22}{20}$

8) $\binom{74}{71}$

14) $\binom{120}{118}$

20) $\binom{x}{x-3}$

3) $\binom{7}{0}$

9) $\binom{52}{49}$

15) $\binom{115}{3}$

21) $\binom{x}{x-1}$

4) $\binom{43}{40}$

10) $\binom{61}{2}$

16) $\binom{943}{942}$

22) $\binom{x+1}{x}$

5) $\binom{110}{107}$

11) $\binom{38}{34}$

17) $\binom{x+1}{2}$

23) $\binom{x+1}{x-1}$

6) $\binom{15}{4}$

12) $\binom{85}{4}$

18) $\binom{x-5}{3}$

24) $\binom{x+2}{x-1}$

Ejercicio 70

Tomando en cuenta la propiedad (17^c), determinar por simple inspección el valor de x en cada una de las siguientes igualdades:

1) $\binom{5}{2} = \binom{5}{x}$

6) $\binom{18}{11} = \binom{18}{x}$

2) $\binom{6}{2} = \binom{6}{x}$

7) $\binom{20}{20} = \binom{20}{x}$

3) $\binom{7}{0} = \binom{7}{x}$

8) $\binom{17}{7} = \binom{17}{x}$

4) $\binom{11}{9} = \binom{11}{x}$

9) $\binom{30}{12} = \binom{30}{x}$

5) $\binom{12}{6} = \binom{12}{x}$

10) $\binom{a}{b} = \binom{a}{x}$

Ejercicio 71

Tomando en cuenta la propiedad (17^c), determinar cuál debe ser el valor de m en las siguientes igualdades:

1) $\binom{m}{7} = \binom{m}{2}$

2) $\binom{m}{5} = \binom{m}{9}$

3) $\binom{m}{1} = \binom{m}{7}$

$$4) \binom{2m}{4} = \binom{2m}{0}$$

$$9) \binom{6-m}{8+3x} = \binom{6-m}{9-3x}$$

$$5) \binom{m}{a} = \binom{m}{b}$$

$$10) \binom{8-4m}{a-b} = \binom{8-4m}{3a+5b}$$

$$6) \binom{3m}{a+2} = \binom{3m}{7-a}$$

$$11) \binom{5m+10}{7+2x} = \binom{5m+10}{3+3x}$$

$$7) \binom{m+2}{2x+3} = \binom{m+2}{8-2x}$$

$$12) \binom{m^2}{7-x} = \binom{m^2}{x+2}$$

$$8) \binom{15-m}{7+x} = \binom{15-m}{7-x}$$

$$13) \binom{m^2+3}{8+a} = \binom{m^2+3}{11-a}$$

Propiedad IV: Esta última propiedad de los números combinatorios, llamada *Regla de Pascal*, fue demostrada en el Ejercicio 55 N° 10 (pág. 206):

$$\boxed{\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n}} \quad (20^c)$$

que se puede expresar también de esta forma:

$$\boxed{\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}} \quad (21^c)$$

La suma de dos números combinatorios de igual numerador y denominadores que difieren en una unidad, es otro número combinatorio cuyo numerador es superior en una unidad al de los anteriores y cuyo denominador es el mayor de los denominadores.

Ejemplos

Son ciertas las siguientes igualdades:

$$\binom{8}{7} = \binom{7}{6} + \binom{7}{7}$$

$$\binom{15}{5} = \binom{14}{4} + \binom{14}{5}$$

$$\binom{x+1}{3} = \binom{x}{2} + \binom{x}{3}$$

y también éstas otras:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} = \binom{5}{3}$$

$$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \binom{8}{6}$$

$$\binom{x+1}{5} + \binom{x+1}{6} = \binom{x+2}{6}$$

$$\binom{8}{x+2} + \binom{8}{x+3} = \binom{9}{x+3}$$

Ejercicio 72

Utilizando la propiedad (20^c), descomponer cada uno de los siguientes números combinatorios en una suma de números combinatorios:

1) $\binom{5}{3}$

5) $\binom{12}{5}$

8) $\binom{18}{14}$

2) $\binom{6}{4}$

6) $\binom{10}{2}$

9) $\binom{a+3}{b+2}$

3) $\binom{7}{5}$

7) $\binom{9}{1}$

10) $\binom{2x-1}{x+1}$

4) $\binom{9}{4}$

Ejercicio 73

Utilizando la propiedad (21^c), hallar el número combinatorio equivalente a cada una de las siguientes sumas:

1) $\binom{8}{5} + \binom{8}{6}$

5) $\binom{x}{6} = \binom{x}{7}$

8) $\binom{3x-2}{12} + \binom{3x-2}{11}$

2) $\binom{9}{4} + \binom{9}{5}$

6) $\binom{x+1}{0} + \binom{x+1}{1}$

9) $\binom{10}{x+5} + \binom{10}{x+6}$

3) $\binom{11}{6} + \binom{11}{7}$

7) $\binom{2x+3}{9} + \binom{2x+3}{8}$

10) $\binom{20}{x+7} + \binom{20}{x+6}$

4) $\binom{10}{9} + \binom{10}{8}$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación: $\binom{x}{2} + \binom{x}{3} = 56$

Aplicamos la propiedad (21^c) al primer miembro:

$$\binom{x+1}{3} = 56$$

Desarrollamos el número combinatorio:

$$\frac{(x+1)x(x-1)}{3!} = 56$$

$$(x+1)x(x-1) = 336$$

Descomponemos el miembro de la derecha en tres factores decrecientes consecutivos:

$$(x+1)x(x-1) = 8 \cdot 7 \cdot 6$$

De donde

$$x = 7$$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación: $\binom{x-1}{2} + \binom{x-1}{3} + \binom{x}{4} + \binom{x+1}{5} = 252$

Aplicamos la propiedad (21^c) a los dos primeros términos del miembro izquierdo:

$$\binom{x}{3} + \binom{x}{4} + \binom{x+1}{5} = 252$$

Volvemos a hacerlo con los dos primeros términos de la ecuación resultante:

$$\binom{x+1}{4} + \binom{x+1}{5} = 252$$

Nuevamente:

$$\binom{x+2}{5} = 252$$

Resolviendo:

$$\frac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{5!} = 252$$

$$(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) = 30240$$

$$(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

De donde

$$x = 8$$

Ejemplo 3

Resolver la ecuación: $\binom{9}{x+1} + \binom{9}{x+2} = 3 \binom{9}{x}$

Aplicando (21^c) en el primer miembro:

$$\binom{10}{x+2} = 3 \binom{9}{x}$$

Desarrollando ambos miembros mediante la relación (21^c):

$$\frac{10!}{(8-x)!(x+2)!} = \frac{3 \cdot 9!}{(9-x)! x!}$$

$$\frac{10 \cdot 9!}{(8-x)!(x+2)(x+1)x!} = \frac{3 \cdot 9!}{(9-x)(8-x)! x!}$$

Simplificando y resolviendo:

$$\frac{10}{(x+2)(x+1)} = \frac{3}{(9-x)}$$

$$10(9-x) = 3(x+2)(x+1)$$

$$90 - 10x = 3x^2 + 9x + 6$$

$$3x^2 + 19x - 84 = 0$$

De donde

$$x_1 = -\frac{28}{3} \quad \boxed{x_2 = 3}$$

Ejercicio 74

Utilizando la relación (21^c), resolver cada una de las siguientes ecuaciones:

- 1) $\binom{x}{1} + \binom{x}{2} = 28$
- 2) $\binom{x}{3} + \binom{x}{4} = 495$
- 3) $\binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x+1}{3} = 35$
- 4) $\binom{x-1}{3} + \binom{x-1}{4} + \binom{x}{5} = 126$
- 5) $\binom{x+2}{2} + \binom{x+2}{3} + \binom{x+3}{4} = 5$
- 6) $\binom{x}{3} + \binom{x+1}{5} + \binom{x}{4} = 56$
- 7) $\binom{x-2}{1} + \binom{x-2}{2} + \binom{x-1}{3} + \binom{x}{4} = 35$
- 8) $\binom{x+1}{3} + \binom{x+2}{4} + \binom{x}{1} + \binom{x+3}{5} + \binom{x}{2} + \binom{x+4}{6} = 84$
- 9) $\binom{x-1}{5} + \binom{x-3}{3} + \binom{x-2}{4} + \binom{x}{6} + \binom{x-3}{2} = 210$
- 10) $\binom{8}{x} + \binom{8}{x+1} + \binom{9}{x+2} = 3 \binom{8}{x+2}$

$$11) \binom{13}{x} + \binom{12}{x-2} + \binom{14}{x+1} + \binom{12}{x-1} = 3 \binom{14}{x}$$

$$12) \binom{18}{x+3} + \binom{16}{x} + \binom{17}{x+2} + \binom{19}{x+4} + \binom{16}{x+1} = 20 \binom{19}{x+1}$$

Ejercicio 75

1) Demostrar que $\binom{2n}{n} = 2 \binom{2n-1}{n}$

Aplicar la relación demostrada en el ejercicio anterior a cada uno de los siguientes casos:

2) $\binom{12}{6}$

4) $\binom{20}{10}$

3) $\binom{18}{9}$

5) $\binom{10}{5}$

Verificar las siguientes igualdades:

6) $\binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} = n^2$

7) $\binom{n}{1} + 6 \binom{n}{2} + 6 \binom{n}{3} = n^3$

8) $\binom{n}{1} + 14 \binom{n}{2} + 36 \binom{n}{3} + 24 \binom{n}{4} = n^4$

9) $\binom{n}{1} + 30 \binom{n}{2} + 150 \binom{n}{3} + 240 \binom{n}{4} + 120 \binom{n}{5} = n^5$

10) $\binom{n}{3} + 4 \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3} = n^3$

Resolver las siguientes ecuaciones:

11) $5 \binom{x}{3} - \binom{x+2}{3} = 0$

12) $2 \binom{x}{2} \binom{x}{4} - 3 \binom{x}{3} = 0$

13) $\binom{x}{1} + 6 \binom{x}{2} + 6 \binom{x}{3} = 64$

Teorema del Binomio

Examínese la siguiente tabla de números combinatorios:

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

En ella aparecen algunos valores de $\binom{m}{n}$. Los valores de m aparecen escritos verticalmente en la columna de la izquierda; los de n , horizontalmente en la fila superior.

Verifíquese, por ejemplo, que

$$\binom{3}{2} = 3$$

$$\binom{4}{2} = 6$$

$$\binom{5}{3} = 10$$

$$\binom{6}{4} = 15$$

Obsérvese, además, que cada uno de ellos satisface la regla de Pascal

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \quad (20^c)$$

En efecto, cualquier número combinatorio de la tabla es igual a la suma del que está inmediatamente arriba y el que precede a éste último en la fila a la que pertenece. Por ejemplo, $20 = 10 + 10$; $15 = 5 + 10$ ó $15 = 10 + 5$; $6 = 3 + 3$, etc.

Por esta razón, este cuadro recibe el nombre de *Triángulo de Pascal*.

Examínense, ahora, los desarrollos de las siguientes potencias del binomio $a + b$, desarrollos que se obtienen fácilmente con la aplicación de productos notables o de multiplicaciones sucesivas:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Un hecho salta inmediatamente a la vista: los coeficientes de los términos de un desarrollo cualquiera coinciden con los números de la fila correspondiente en el cuadro de números combinatorios que anteriormente construimos.

Sustituyendo, por tanto, en un desarrollo cualquiera, por ejemplo en $(a+b)^5$, los coeficientes por los números combinatorios equivalentes, tenemos:

$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

Dado que esto podemos hacerlo en cada uno de los seis casos, parece natural esperar que lo mismo suceda con el desarrollo de cualquier potencia n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Demostraremos, por Inducción Completa, que esto es cierto.

Ya comprobamos que la igualdad es cierta para algunos valores de n .

Supongamos que es cierta para $n = k$:

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-2} + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \quad (I)$$

Demostraremos que, entonces, la igualdad es también cierta para $n = k+1$, es decir, que

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} \quad (II)$$

Partimos del miembro izquierdo de la igualdad (II):

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b)$$

Sustituimos $(a+b)^k$ por su equivalente en la igualdad (I):

$$= \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-2} + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k \right] (a+b)$$

Multiplicamos aplicando la propiedad distributiva:

$$= \left[\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k}{k-2}a^3b^{k-2} + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \right] + \\ + \left[\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k-2}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \right]$$

Sacando factor común en cada par de términos semejantes:

$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] a^k b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] a^{k-1}b^2 + \dots + \\ + \left[\binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-1} \right] a^2b^{k-1} + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right] ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

Aplicando la propiedad (21^c) de los números combinatorios, transformamos cada una de las sumas que aparecen entre corchetes:

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

Pero $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$ y, también $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$. Por tanto, sustituyendo tenemos

$$= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^k b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^2 + \dots + \binom{k+1}{k-1} a^2 b^{k-1} + \binom{k+1}{k} a b^k + \binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

• con lo que demostramos la proposición.

Podemos en consecuencia generalizar nuestra proposición para cualquier valor natural de n :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Esta igualdad se conoce como **Teorema del Binomio (22^C)**.

Propiedades del Binomio de Newton

Analizando la igualdad (22^C) podemos deducir algunas propiedades del Binomio de Newton. Para facilitar este análisis, tomaremos como ejemplo el desarrollo de $(a+b)^6$:

$$(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3 + \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6$$

En el desarrollo de $(a+b)^n$ se observan las siguientes

Propiedades

1) El número de términos del desarrollo es igual a $n + 1$. En nuestro ejemplo, los términos del desarrollo son $6 + 1 = 7$.

2) El coeficiente de un término cualquiera del desarrollo es un número combinatorio cuyo numerador es n y cuyo denominador es el ordinal del término disminuido en una unidad.

Véase en el desarrollo tomado como ejemplo, que todos los números combinatorios tienen como numerador 6. Por otra parte, en el tercer término el denominador del número combinatorio es 2; en el sexto término el denominador del número combinatorio es 5; etc.

3) El exponente de a en un término cualquiera es siempre igual a la diferencia entre numerador y denominador del número combinatorio que ese término tiene por coeficiente.

El exponente de a en el cuarto término es $6 - 3 = 3$

El exponente de a en el séptimo término es $6 - 6 = 0$

4) El exponente de b en un término cualquiera es siempre igual al denominador del número combinatorio que ese término tiene de coeficiente. (Verifíquese).

5) La suma de los exponentes de a y b en un término cualquiera es siempre igual a n .

En el tercer término: $4 + 2 = 6$

En el sexto término: $1 + 5 = 6$

6) El exponente de a en el primer término del desarrollo es n y decrece en una unidad por vez en cada uno de los términos siguientes.

7) El exponente de b en el primer término del desarrollo es cero y crece en una unidad por vez en cada uno de los términos siguientes.

8) Los términos equidistantes de los extremos tienen siempre igual coeficiente. Esto se debe a que en los números combinatorios de esos términos los denominadores son complementarios con respecto al numerador.

El primero y el séptimo término tienen coeficiente 1

El segundo y el sexto término tienen coeficiente 6

y así sucesivamente.

9) La suma de los coeficientes de los términos impares es igual a la suma de los de los términos pares, y esta suma es siempre igual a 2^{n-1} . (Esta propiedad y la siguiente serán demostradas más adelante).

En nuestro ejemplo:

$$1 + 15 + 15 + 1 = 32 = 2^{6-1} = 2^5$$

$$6 + 20 + 6 = 32 = 2^{6-1} = 2^5$$

10) La suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo es siempre igual a 2^n .

$$1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$$

Desarrollo de potencias de binomios

Ejemplo 1

Desarrollar: $(x + y)^8$

El desarrollo tendrá 9 términos cuyos coeficientes serán:

$$= \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} + \binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8}$$

El primer término x del binomio aparecerá con exponente 8 en el primer término del desarrollo y, a partir de éste, en todos los demás términos con exponentes decrecientes una unidad por vez:

$$= \binom{8}{0}x^8 + \binom{8}{1}x^7 + \binom{8}{2}x^6 + \binom{8}{3}x^5 + \binom{8}{4}x^4 + \binom{8}{5}x^3 + \binom{8}{6}x^2 + \binom{8}{7}x^1 + \binom{8}{8}x^0$$

El segundo término y del binomio aparecerá en todos los términos con exponentes crecientes en una unidad por vez, comenzando por el exponente cero:

$$= \binom{8}{0}x^8y^0 + \binom{8}{1}x^7y^1 + \binom{8}{2}x^6y^2 + \binom{8}{3}x^5y^3 + \binom{8}{4}x^4y^4 + \binom{8}{5}x^3y^5 + \binom{8}{6}x^2y^6 + \binom{8}{7}x^1y^7 + \binom{8}{8}x^0y^8$$

Calculando los números combinatorios y simplificando:

$$= \boxed{x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8}$$

Ejemplo 2

Desarrollar: $(a-b)^5$

Construimos los coeficientes de los 6 términos del desarrollo:

$$= \binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

Colocamos a en potencias decrecientes:

$$= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4 + \binom{5}{2}a^3 + \binom{5}{3}a^2 + \binom{5}{4}a^1 + \binom{5}{5}a^0$$

Colocamos $-b$ en potencias crecientes:

$$= \binom{5}{0}a^5(-b)^0 + \binom{5}{1}a^4(-b)^1 + \binom{5}{2}a^3(-b)^2 + \binom{5}{3}a^2(-b)^3 + \binom{5}{4}a^1(-b)^4 + \binom{5}{5}a^0(-b)^5$$

Calculamos los números combinatorios y simplificamos:

$$= \boxed{a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5}$$

Nota: Cuando el segundo término del binomio tiene signo negativo, los términos del desarrollo son alternadamente positivos y negativos. Esto sucede porque cuando el segundo término $-b$ tiene exponente par, cosa que ocurre en los

términos impares, el resultado es una cantidad positiva. Lo contrario sucede cuando $-b$ tiene exponente impar, cosa que ocurre en los términos pares. Tendremos en cuenta esta observación en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 3

Desarrollar: $(a^2 - b^3)^6$

Construimos los coeficientes con signo alternado, dado que el segundo término es negativo, de los 7 términos del desarrollo:

$$= \binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \binom{6}{3} + \binom{6}{4} - \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$$

Colocamos a^2 en potencias decrecientes:

$$= \binom{6}{0}(a^2)^6 - \binom{6}{1}(a^2)^5 + \binom{6}{2}(a^2)^4 - \binom{6}{3}(a^2)^3 + \binom{6}{4}(a^2)^2 - \binom{6}{5}(a^2) + \binom{6}{6}$$

Colocamos b^3 en potencias crecientes:

$$= \binom{6}{0}(a^2)^6 - \binom{6}{1}(a^2)^5(b^3) + \binom{6}{2}(a^2)^4(b^3)^2 - \binom{6}{3}(a^2)^3(b^3)^3 + \binom{6}{4}(a^2)^2(b^3)^4 - \binom{6}{5}(a^2)(b^3)^5 + \binom{6}{6}(b^3)^6$$

Calculando coeficientes y efectuando potencias:

$$= a^{12} - 6a^{10}b^3 + 15a^8b^6 - 20a^6b^9 + 15a^4b^{12} - 6a^2b^{15} + b^{18}$$

Ejemplo 4

Desarrollar: $(\sqrt[3]{a} - 2)^7$

El desarrollo tendrá la siguiente forma:

$$= \binom{7}{0}(\sqrt[3]{a})^7 - \binom{7}{1}(\sqrt[3]{a})^6 \cdot 2 + \binom{7}{2}(\sqrt[3]{a})^5 \cdot 2^2 - \binom{7}{3}(\sqrt[3]{a})^4 \cdot 2^3 + \binom{7}{4}(\sqrt[3]{a})^3 \cdot 2^4 - \binom{7}{5}(\sqrt[3]{a})^2 \cdot 2^5 + \binom{7}{6}(\sqrt[3]{a}) \cdot 2^6 - \binom{7}{7}2^7$$

Efectuando y simplificando radicales:

$$= \boxed{a^6\sqrt{a} - 14a + 84\sqrt[6]{a^5} - 280\sqrt[3]{a^2} + 560\sqrt{a} - 672\sqrt[3]{a} + 448\sqrt[6]{a} - 128}$$

Ejemplo 5

Desarrollar: $(1 + 2i)^4$

El desarrollo tendrá la siguiente forma:

$$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1}2i + \binom{4}{2}2^2i^2 + \binom{4}{3}2^3i^3 + \binom{4}{4}2^4i^4$$

Efectuando y reduciendo las potencias de la unidad imaginaria:

$$= 1 + 8i - 24 - 32i + 16 = \boxed{-7 - 24i}$$

Ejercicio 76

Desarrollar las siguientes potencias y simplificar los resultados:

1) $(x+1)^4$

11) $(1+i)^6$

2) $(a^2-1)^5$

12) $(1-i)^5$

3) $(\sqrt{x}+1)^5$

13) $(1+\sqrt{3}i)^7$

4) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$

14) $(\sqrt[8]{x}-2)^6$

5) $(\cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha)^4$

15) $(1 - \lg x)^4$

6) $(\cos x - \operatorname{sen} x)^3$

16) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^5$

7) $\left(\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right)^4$

17) $(a^x - 3)^4$

8) $(2^x + 1)^5$

18) $(a^2b^3 + 1)^3$

9) $(x - \sqrt{2})^7$

19) $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^6$

10) $(\sqrt{x} + 2x)^4$

20) $(x-y)^8$

Ejercicio 77

Tomando en cuenta las propiedades del Binomio de Newton, calcular en cada caso el valor de n en $(a+b)^n$, el coeficiente del término, el número de términos del desarrollo, el ordinal del término y la suma de los coeficientes de los términos del desarrollo sabiendo que hay un término cuya parte literal es:

1) a^4b^2

5) a^3b^2

8) a^5b^7

2) a^5b

6) a^9b^2

9) ab^8

3) a^2b^5

7) a^3b^7

10) a^2b^{11}

4) a^4b^3

Cálculo de un término cualquiera

Las propiedades del Binomio de Newton nos permiten calcular un término específico de una potencia sin necesidad de desarrollarla por completo.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 6

Calcular el quinto término del desarrollo de $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$

El término que se nos pide (T_5) tiene como coeficiente un número combinatorio cuyo numerador es n (12 en nuestro caso) y cuyo denominador es el ordinal del término disminuido en una unidad ($5 - 1 = 4$):

$$\binom{12}{4}$$

El exponente del primer término del binomio es igual a la diferencia entre numerador y denominador del número combinatorio ($12 - 4 = 8$):

$$\binom{12}{4} (\sqrt[4]{x})^8$$

El del segundo término del binomio es igual al denominador del número combinatorio:

$$\binom{12}{4} (\sqrt[4]{x})^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

El término es, por tanto:

$$T_5 = \binom{12}{4} (\sqrt[4]{x})^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$$

Efectuando y simplificando:

$$= 495x^2 \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$= \boxed{495}$$

Ejemplo 7

Calcular el séptimo término del desarrollo de $(\sin^2 \alpha + \csc^3 \alpha)^{11}$

Siguiendo en forma análoga los pasos dados en el ejercicio anterior, tendremos:

$$T_7 = \binom{11}{6} (\sin^2 \alpha)^5 (\csc^3 \alpha)^6$$

$$= 462 \sin^{10} \alpha \csc^{18} \alpha = \boxed{462 \csc^8 \alpha}$$

Ejemplo 8

Determinar el penúltimo término del desarrollo de $(3-i)^{13}$

Como el desarrollo de esta potencia tiene 14 términos, el que se nos está pidiendo es el 13°:

$$T_{13} = \binom{13}{12} 3^1 (-i)^{12}$$

Nótese que el segundo término del binomio es negativo. Sin embargo, como en el T_{13} dicha expresión aparece elevada a exponente par, tendremos:

$$= 13 \cdot 3i^{12}$$

Reduciendo las potencias de la unidad imaginaria:

$$= 13 \cdot 3 \cdot 1 = \boxed{39}$$

Término o términos centrales

El desarrollo de la potencia de un binomio tendrá uno o dos términos centrales dependiendo de que el exponente sea par o impar.

En efecto, si el exponente es par, dado que el número de términos del desarrollo es igual a $n + 1$, tendremos un número impar de términos en el desarrollo y un solo término central.

Por el contrario, si el exponente es impar, tendremos un número par de términos y, en consecuencia, dos términos centrales.

Ejemplo 9

¿Cuál es el término central en $(a+b)^{10}$?

El desarrollo tiene 11 términos y, por tanto, un solo término central.

Para saber cuál es, dividimos 11 entre 2:

$$11 \div 2 = 5,5$$

$$\boxed{\text{Término central} = T_6}$$

Ejemplo 10

¿Cuáles son los términos centrales en $(a+b)^{15}$?

El desarrollo tiene 16 términos y, por tanto, dos centrales:

$$16 \div 2 = 8$$

$$\boxed{\text{Términos centrales} = T_8 \text{ y } T_9}$$

Ejercicio 78

Calcular en cada uno de los siguientes desarrollos el término o los términos que se indican entre paréntesis:

1) $\left(\frac{a}{3} + b^2\right)^{12}$ (T_9)

2) $\left(\frac{a^2}{2} - \frac{b^3}{3}\right)^{14}$ $(T_4 \text{ y } T_8)$

3) $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[5]{b})^{13}$ $(T_{11} \text{ y } T_6)$

4) $\left(\frac{a^2}{\sqrt[4]{3}} - \frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right)^{10}$ $(T_7 \text{ y } T_4)$

5) $\left(\frac{\sqrt[5]{x}}{2} + \frac{y}{\sqrt[3]{9}}\right)^{10}$ $(T \text{ central})$

6) $(\sqrt[8]{a} - \sqrt[4]{b})^{19}$ $(Ts \text{ centrales})$

7) $(a + \sqrt[4]{b})^{17}$ $(\text{Penúltimo Término})$

8) $(\csc^2 \alpha - \sec^3 \alpha)^{15}$ (T_7)

9) $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{2}} - \sqrt[6]{\frac{b}{7}}\right)^{12}$ $(T \text{ central})$

10) $\left(\frac{\sqrt[3]{2x}}{y} - \frac{\sqrt[5]{3y^3}}{x}\right)^8$ (T_6)

11) $(\sqrt{\operatorname{tg} \alpha} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg} \alpha})^{10}$ $(T_7 \text{ y } T_4)$

12) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}i}{3}\right)^{11}$ $(Ts \text{ centrales})$

13) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}i}{2}\right)^{13}$ $(T_{10} \text{ y } T_8)$

14) $\left(2^{x+3} + \frac{1}{2^{x+5}}\right)^{17}$ $(T_{11} \text{ y } T_7)$

Términos de ordinal desconocido

La aplicación de las propiedades del Binomio de Newton nos permite, con la ayuda de determinados datos, trabajar con términos de ordinal desconocido y calcularlos.

Un término de ordinal k del desarrollo de $(a+b)^n$ tiene la siguiente configuración:

$$T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$$

Por su mayor sencillez, se hace preferible, en los casos de términos de ordinal desconocido, darles el subíndice $k+1$. En ese caso la expresión anterior queda así:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Veamos algunos ejemplos que implican la utilización del término de ordinal desconocido:

Ejemplo 11

En el desarrollo de $\left(a^3 - \frac{5}{a}\right)^{17}$ hay un término cuya parte literal es a^{23} . ¿De cuál término se trata? ¿Tiene el desarrollo término independiente?

No conocemos el ordinal del término cuya parte literal es a^{23} . Lo llamaremos T_{k+1} y su configuración es:

$$T_{k+1} = \binom{17}{k} (a^3)^{17-k} \left(-\frac{5}{a}\right)^k$$

Sabemos que la parte literal de ese término es a^{23} . Tomamos la parte literal del T_{k+1} (prescindiendo de las demás cantidades y de los signos) y la igualamos a a^{23} :

$$(a^3)^{17-k} \left(\frac{1}{a}\right)^k = a^{23}$$

La igualdad hecha da origen a una ecuación exponencial que siempre se puede resolver por igualdad de bases (¿Por qué?)

$$a^{51-3k} \cdot a^{-k} = a^{23}$$

$$a^{51-3k-k} = a^{23} \quad (I)$$

Siendo iguales las bases, deben serlo también los exponentes:

$$51 - 3k - k = 23$$

de donde

$k = 7$

Conociendo el valor de k , podemos dar respuesta a la primera pregunta. El término que contiene a^{23} es:

$$T_{7+1} = \boxed{T_8}$$

La segunda parte del problema consiste en determinar si el desarrollo tiene término independiente. El término independiente es aquel en el que la parte literal tiene exponente cero.

Si en la ecuación (I) igualamos el miembro de la izquierda a a^0 podremos dar respuesta a la pregunta:

$$a^{51-3k-k} = a^0$$

$$51 - 3k - k = 0$$

$$k = \frac{51}{4}$$

El desarrollo no tiene término independiente, pues éste debería ser el término 55/4 y el ordinal de un término debe ser un número entero, positivo y menor o igual a n .

No hay término independiente

Ejemplo 12

Determinar el coeficiente del término que contiene y^3 en el desarrollo de

$$\left(\sqrt[4]{\frac{x}{14y}} - \sqrt[3]{\frac{y^2}{5x^2}} \right)^{10}$$

Tenemos que conocer primero de cuál término se trata. Lo llamaremos T_{k+1} :

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} \left(\sqrt[4]{\frac{x}{14y}} \right)^{10-k} \left(-\sqrt[3]{\frac{y^2}{5x^2}} \right)^k$$

Sabemos que el exponente de y en ese término es 3:

$$\left(\sqrt[4]{\frac{1}{y}} \right)^{10-k} \left(\sqrt[3]{y^2} \right)^k = y^3$$

Resolviendo:

$$\left(y^{-\frac{1}{4}} \right)^{10-k} \left(y^{\frac{2}{3}} \right)^k = y^3$$

$$y^{-\frac{5}{2} + \frac{k}{4}} \cdot y^{\frac{2k}{3}} = y^3$$

$$y^{-\frac{5}{2} + \frac{k}{4} + \frac{2k}{3}} = y^3$$

Iguando exponentes:

$$-\frac{5}{2} + \frac{k}{4} + \frac{2k}{3} = 3$$

Multiplcando por 12:

$$-30 + 3k + 8k = 36$$

$$11k = 66$$

$$k = 6$$

El coeficiente de ese término, el séptimo, es:

$$\binom{10}{6} \left(\sqrt[4]{\frac{1}{14}} \right)^4 \left(-\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \right)^6$$

Obsérvese que hemos prescindido de la parte literal:

$$= 210 \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{25} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

Ejemplo 13

Calcular el término independiente de $\left(\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20}$

Antes de comenzar cualquier cálculo, trataremos de convertir en un binomio la expresión que está entre paréntesis:

$$\begin{aligned} & \left(\sec^2 \alpha + \csc^2 \alpha + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20} \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20} \\ &= \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20} \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20} \\ &= \left(\frac{4}{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20} \\ &= \left(\frac{4}{\sin^2 2\alpha} + \frac{\sin^3 2\alpha}{16} \right)^{20} \\ &= \left(\frac{2^2}{\sin^2 2\alpha} + \frac{\sin^3 2\alpha}{2^4} \right)^{20} \end{aligned}$$

Llamamos T_{k+1} al término independiente del desarrollo:

$$T_{k+1} = \binom{20}{k} \left(\frac{2^2}{\sin^2 2\alpha} \right)^{20-k} \left(\frac{\sin^3 2\alpha}{2^4} \right)^k \quad (I)$$

En ese término el exponente de $\sin 2\alpha$ es cero:

$$\left(\frac{1}{\sin^2 2\alpha}\right)^{20-k} (\sin^3 2\alpha)^k = (\sin 2\alpha)^0$$

Resolviendo:

$$(\sin^{-2} 2\alpha)^{20-k} (\sin^3 2\alpha)^k = (\sin 2\alpha)^0$$

$$(\sin 2\alpha)^{-40+2k} (\sin 2\alpha)^{3k} = (\sin 2\alpha)^0$$

$$(\sin 2\alpha)^{-40+2k+3k} = (\sin 2\alpha)^0$$

Iguando exponentes:

$$-40 + 2k + 3k = 0$$

$$k = 8$$

El término independiente es T_9 . Se nos pide calcularlo. Dado que es, precisamente, el término independiente, $\sin 2\alpha$ estará elevado al exponente cero. Por eso en la expresión (I) prescindiremos de $\sin 2\alpha$:

$$\begin{aligned} T_9 &= \binom{20}{8} (2^2)^{12} \cdot \left(\frac{1}{2^4}\right)^8 \\ &= 125970 \cdot 2^{24} \cdot \frac{1}{2^{32}} = \frac{125970}{2^8} \\ &= \boxed{\frac{62985}{128}} \end{aligned}$$

Ejercicio 79

Calcular los datos que se piden de cada uno de los desarrollos que aparecen a continuación:

$$1) \left(\frac{a^2}{2} + \frac{3}{a}\right)^9$$

¿En cuál término aparece a^9 ? ¿Qué lugar ocupa el término independiente?

$$2) \left(\frac{x^3}{y} - \frac{y^2}{x^4}\right)^{12}$$

¿En cuál término aparece x^{-13} ? ¿Cuál es el coeficiente de x^{-41} ?

$$3) \left(\frac{2a}{b^2} - \frac{b}{3a}\right)^7$$

Calcular el término que contiene a a^9 . ¿Existe algún término independiente de a ?

$$4) \left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{2y}{x^3}\right)^{14}$$

¿En cuál término aparece x^{-7} ? ¿Cuál es el exponente de y en el término que contiene x^{-21} ?

$$5) \left(\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{a}} - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{18}$$

¿Cuál es el exponente de a en el término que contiene x^{-4} ? ¿Cuál es el coeficiente numérico de $x^{-\frac{7}{3}}$?

- 6) $\left(\frac{x}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3x}}\right)^{12}$ ¿Cuál es el coeficiente de x^4 ? ¿Existe en este desarrollo un término independiente de x ?
- 7) $(\sec^4 x + \cos^5 x)^{15}$ Calcular el término que contiene $\cos^{21} x$.
Calcular el coeficiente de $\sec^6 x$.
- 8) $(\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[5]{\operatorname{ctg} x})^{16}$ Calcular el término independiente. Determinar en cuál término aparece $\operatorname{ctg}^{16/15} x$.
- 9) $(e^{2x} - e^{-3x})^{14}$ ¿Cuál es el coeficiente de e^{3x} ? ¿En cuál término aparece e^{-2x} ?
- 10) $(\sin^2 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^{21}$ ¿Qué lugar ocupa el término independiente?
Calcular el término que contiene $\sin^{36} 2\alpha$.

Ejercicio 80

¿Cuál el valor de n en $(a + b)^n$...

- ... si el coeficiente del 7° término es igual al del 24° término?
- ... si no existe otro término que tenga el coeficiente igual al del término 13°?
- ... si el término $n - 19$ y el término $\frac{n}{2} - 1$ tienen igual coeficiente?
- ... si $n < 77$; hasta el 37° término, por lo menos, no hay dos coeficientes iguales y hay dos términos centrales?
- ... si los coeficientes de los términos 5°, 6° y 7° están en progresión aritmética?
- ... si el coeficiente del 8° término es el doble del del 7°?
- ... si el coeficiente del 8° término es el doble del del 9°?
- ... si el coeficiente del 6° término es el triple del del 5°?
- ... si el coeficiente del 4° término excede en 5 unidades al del 3°?
- ... si el coeficiente del 7° término es igual a la suma de los del 5° y 6° términos?
- ... si la suma de los coeficientes del 2°, 3° y 4° términos equivale al coeficiente del 5° término?
- ... si la suma de los coeficientes de los tres primeros términos excede al coeficiente del 4° en dos unidades?
- ... si el coeficiente del 5° término excede en 33 unidades a la diferencia de los coeficientes del 6° y 4° términos?
- ... si el coeficiente del 4° término excede en 35 unidades al cuádruplo del del 3er. término?

Ejemplo 14

En el desarrollo de $(x\sqrt[4]{y} + y\sqrt[3]{x})^n$ hay un término cuya parte literal es x^6y^7 .

¿Cuál es el valor de n ? ¿De cuál término se trata?

Desconocemos el ordinal del término que contiene x^6y^7 .

Lo llamaremos T_{k+1} :

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} (x\sqrt[4]{y})^{n-k} (y\sqrt[3]{x})^k$$

Como el exponente de x en ese término es 6, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$x^{n-k} (\sqrt[3]{x})^k = x^6$$

Resolviendo:

$$x^{n-k} \cdot x^{\frac{k}{3}} = x^6$$

$$x^{n-k+\frac{k}{3}} = x^6$$

Igualando exponentes:

$$n - k + \frac{k}{3} = 6$$

$$3n - 2k = 18$$

(1)

Y como el exponente de y en ese término es 7, podemos plantear que:

$$(\sqrt[4]{y})^{n-k} y^k = y^7$$

Resolviendo:

$$y^{\frac{n-k}{4}} \cdot y^k = y^7$$

$$y^{\frac{n-k}{4}+k} = y^7$$

Igualando exponentes:

$$\frac{n-k}{4} + k = 7$$

$$n + 3k = 28$$

(2)

Para hallar los valores de n y k , formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 3n - 2k = 18 \\ n + 3k = 28 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$n = 10$$

$$k = 6$$

La primera pregunta ya queda respondida: el valor de n es 10.

Y el término que contiene x^6y^7 es:

$$T_{6+1} = T_7$$

Ejemplo 15

En el desarrollo de $\left(\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ hay un término cuya parte literal es $y^{\frac{15}{2}}$.

¿Cuánto vale n ? ¿Cuál es el coeficiente de ese término?

Desconocemos el ordinal de ese término. Planteamos, por tanto, que:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)^{n-k} \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x}}\right)^k$$

Si en la parte literal no aparece x es porque el exponente de x en ese término es cero. Tenemos, pues, que:

$$x^{n-k} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = x^0$$

Resolviendo:

$$x^{n-k} \cdot x^{-\frac{k}{3}} = x^0$$

$$x^{n-k-\frac{k}{3}} = x^0$$

$$n - k - \frac{k}{3} = 0$$

$$3n - 4k = 0 \quad (1)$$

El exponente de y en ese término es $15/2$. Por tanto:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^{n-k} \cdot y^k = y^{\frac{15}{2}}$$

Resolviendo:

$$y^{\frac{k-n}{2}} \cdot y^k = y^{\frac{15}{2}}$$

$$y^{\frac{k-n}{2} + k} = y^{\frac{15}{2}}$$

$$\frac{k-n}{2} + k = \frac{15}{2}$$

$$3k - n = 15 \quad (2)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 3n - 4k = 0 \\ 3k - n = 15 \end{cases}$$

La solución del sistema es

$$n = 12$$

$$k = 9$$

El valor de n es 12 y el coeficiente de ese término es:

$$\binom{n}{k} = \binom{12}{6}$$

$$= 220$$

Ejemplo 16

En el desarrollo de $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{y}\right)^n$ el coeficiente del término que contiene y^2

es 45. ¿Cuál es el valor de n ? ¿Cuál es el exponente de x en ese término?

Dado que desconocemos el ordinal del término, planteamos:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k} (\sqrt[4]{y})^k$$

El exponente de y en ese término es 2, por tanto:

$$(\sqrt[4]{y})^k = y^2$$

Resolviendo:

$$y^{\frac{k}{4}} = y^2$$

$$\frac{k}{4} = 2$$

$$k = 8$$

El coeficiente de ese 9º término es igual a 45:

$$\binom{n}{k} = 45$$

Sustituyendo el valor conocido de k :

$$\binom{n}{8} = 45$$

Resolviendo:

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-7)}{8!} = 45$$

$$n(n-1) \cdots (n-7) = 45 \cdot 8!$$

Transformamos el segundo miembro en ocho factores decrecientes consecutivos:

$$n(n-1) \cdots (n-7) = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

de donde

$$\boxed{n = 10}$$

Calculamos ahora x en ese 9º término:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n-k}$$

Sustituyendo:

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10-8}$$

$$= \frac{1}{x} = x^{-1}$$

El exponente de x en ese término es

$$\boxed{-1}$$

Ejemplo 17

En el desarrollo de $(\sqrt{x} + y)^{10}$ el tercer término vale 72.000 y el sexto 787.500. Determinar el valor de x y el de y .

Calculamos el tercer término del desarrollo y lo igualamos a 72.000:

$$T_3 = \binom{10}{2} (\sqrt{x})^8 y^2 = 72\,000$$

De donde

$$45x^4 y^2 = 72\,000$$

$$x^4 y^2 = 1600 \quad (1)$$

Calculamos ahora el sexto término y lo igualamos a 787.500:

$$T_6 = \binom{10}{5} (\sqrt{x})^5 y^5 = 787\,500$$

$$252 \sqrt{x^5} y^5 = 787\,500$$

$$\sqrt{x^5} y^5 = 3125 \quad (2)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} x^4 y^2 = 1600 \\ \sqrt{x^5} y^5 = 3125 \end{cases}$$

Descomponemos en cada ecuación el miembro de la derecha en factores primos:

$$\begin{cases} x^4 y^2 = 2^6 \cdot 5^2 \\ \sqrt{x^5} y^5 = 5^5 \end{cases}$$

Elevamos ambos miembros de la primera ecuación a la quinta potencia y ambos miembros de la segunda al cuadrado para que, al dividir miembro a miembro, se elimine y :

$$\begin{cases} (x^4 y^2)^5 = (2^6 \cdot 5^2)^5 \\ (\sqrt{x^5} y^5)^2 = (5^5)^2 \\ x^{20} y^{10} = 2^{30} \cdot 5^{10} \\ x^5 y^{10} = 5^{10} \end{cases}$$

Dividiendo las ecuaciones miembro a miembro:

$$\frac{x^{20} y^{10}}{x^5 y^{10}} = \frac{2^{30} \cdot 5^{10}}{5^{10}}$$

$$x^{15} = 2^{30}$$

De donde:

$$x = 2^2$$

$$\boxed{x = 4}$$

Sustituyendo en la ecuación (1):

$$4^4 y^2 = 1600$$

$$256 y^2 = 1600$$

$$y^2 = \frac{1600}{256}$$

$$y^2 = \frac{25}{4}$$

$$y = \pm \frac{5}{2}$$

Sólo el valor positivo de y satisface las condiciones del problema. En efecto, si y toma el valor negativo, entonces el sexto término debería ser negativo, contradiciendo las condiciones del problema. Por tanto:

$$\boxed{y = \frac{5}{2}}$$

Y la solución del problema es:

$$\boxed{\left(4, \frac{5}{2}\right)}$$

Ejemplo 18

¿Cuál debe ser el valor de x y el de y en $(\sqrt[3]{x} + y)^{11}$ para que el sexto término valga $16632\sqrt{3}$ y el octavo, $17820\sqrt[5]{108}$?

Procesamos el primer dato:

$$T_6 = 16632\sqrt{3}$$

$$\binom{11}{5} (\sqrt[3]{x})^6 y^5 = 16632\sqrt{3}$$

$$462 x^2 y^5 = 16632\sqrt{3}$$

$$x^2 y^5 = 36\sqrt{3}$$

$$x^2 y^5 = 2^2 \cdot 3^2 \sqrt{3} \quad (1)$$

Procesamos el segundo dato:

$$T_8 = 17820\sqrt[5]{108}$$

$$\binom{11}{7} (\sqrt[3]{x})^4 y^7 = 17820\sqrt[5]{108}$$

$$330 \sqrt[3]{x^4 y^7} = 17820 \sqrt[6]{108}$$

$$\sqrt[3]{x^4 y^7} = 54 \sqrt[6]{108}$$

$$\sqrt[3]{x^4 y^7} = 2 \cdot 3^3 \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} \quad (2)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} x^2 y^5 = 2^2 \cdot 3^2 \sqrt{3} \\ \sqrt[3]{x^4 y^7} = 2 \cdot 3^3 \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} \end{cases}$$

Elevamos ambos miembros de la primera ecuación al cuadrado y ambos miembros de la segunda al cubo para que, al dividir miembro a miembro, se elimine x :

$$\begin{cases} (x^2 y^5)^2 = (2^2 \cdot 3^2 \sqrt{3})^2 \\ \left(\sqrt[3]{x^4 y^7}\right)^3 = \left(2 \cdot 3^3 \sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3}\right)^3 \\ x^4 y^{10} = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3 \\ x^4 y^{21} = 2^3 \cdot 3^9 \sqrt{2^2 \cdot 3^3} \end{cases}$$

Dividiendo miembro a miembro la segunda ecuación entre la primera y resolviendo:

$$\frac{x^4 y^{21}}{x^4 y^{10}} = \frac{2^4 \cdot 3^{10} \sqrt{3}}{2^4 \cdot 3^5}$$

$$y^{11} = 3^5 \sqrt{3}$$

$$y^{11} = 3^5 \cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{11} = 3^{\frac{11}{2}}$$

$$y = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{y = \sqrt{3}}$$

Sustituyendo en (1):

$$x^2 \sqrt{3}^5 = 2^2 \cdot 3^2 \sqrt{3}$$

$$x^2 \cdot 3^2 \sqrt{3} = 2^2 \cdot 3^2 \sqrt{3}$$

$$x^2 = 2^2$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

La variable x puede tomar cualquiera de los dos valores, el positivo o el negativo. La solución del problema es, por tanto:

$$\boxed{(\pm 2, \sqrt{3})}$$

Ejemplo 19

La suma de los términos del desarrollo de $(x+y)^{14}$ es 16.384. Determinar el valor de x y de y sabiendo que el término central vale 3.432.

Si la suma de los términos del desarrollo es 16.384, el valor de la potencia sin desarrollar debe ser el mismo:

$$(x+y)^{14} = 16\,384$$

De donde:

$$x+y = \pm 2 \quad (1)$$

Calculamos el término central, es decir, T_8 :

$$T_8 = \binom{14}{7} x^7 y^7 = 3\,432$$

Resolviendo:

$$3\,432 x^7 y^7 = 3\,432$$

$$x^7 y^7 = 1$$

$$xy = 1 \quad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) se pueden formar dos sistemas:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases}$$

Resolvemos el primero:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = 2 - x$$

Sustituimos este valor en la otra y resolvemos:

$$x(2-x) = 1$$

$$2x - x^2 = 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

Sustituyendo nuevamente:

$$\boxed{y = 1}$$

Resolviendo en forma análoga el segundo sistema, se obtiene:

$$\boxed{x = -1}$$

$$\boxed{y = -1}$$

Las soluciones del problema son:

$$\boxed{(\pm 1, \pm 1)}$$

Ejemplo 20

El valor total del desarrollo de $(x+y)^{10}$ es 4, y el sexto término vale -32.256. Determinar x y y .

El primer dato nos permite plantear la igualdad:

$$(x+y)^{10} = 4$$

De donde:

$$x+y = \pm \sqrt[5]{2} \quad (1)$$

Por otra parte:

$$T_6 = \binom{10}{5} x^5 y^5 = -32\,256$$

$$252 x^5 y^5 = -32\,256$$

$$x^5 y^5 = -128$$

$$xy = -2\sqrt[5]{4} \quad (2)$$

Con las ecuaciones (1) y (2) podemos formar dos sistemas:

$$\begin{cases} x+y = \sqrt[5]{2} \\ xy = -2\sqrt[5]{4} \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} x+y = -\sqrt[5]{2} \\ xy = -2\sqrt[5]{4} \end{cases}$$

Resolución del primer sistema:

$$\begin{cases} x+y = \sqrt[5]{2} \\ xy = -2\sqrt[5]{4} \end{cases}$$

Despejamos y en la primera ecuación:

$$y = \sqrt[5]{2} - x$$

Sustituimos este valor en la otra y resolvemos:

$$x(\sqrt[5]{2} - x) = -2\sqrt[5]{4}$$

$$\sqrt[5]{2}x - x^2 = -2\sqrt[5]{4}$$

$$x^2 - \sqrt[5]{2}x - 2\sqrt[5]{4} = 0$$

$$x = \frac{\sqrt[5]{2} \pm \sqrt{\sqrt[5]{4} + 8\sqrt[5]{4}}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt[5]{2} \pm \sqrt{9\sqrt[5]{4}}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt[5]{2} \pm 3\sqrt[5]{2}}{2}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2}}{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}}{2} = -\sqrt[3]{2}$$

Por sustitución hallamos los valores correspondientes de y :

$$y_1 = -\sqrt[3]{2}$$

$$y_2 = 2\sqrt[3]{2}$$

Tenemos ya un primer par de soluciones:

$$(2\sqrt[3]{2}, -\sqrt[3]{2})$$

$$(-\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{2})$$

Segundo sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt[3]{2} \\ xy = -2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

Resolviendo este sistema en forma análoga al utilizado para resolver el anterior, se obtiene el siguiente par de soluciones:

$$(\sqrt[3]{2}, -2\sqrt[3]{2})$$

$$(-2\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$$

Las soluciones del problema son, pues:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \pm 2\sqrt[3]{2}, \mp \sqrt[3]{2} \\ \pm \sqrt[3]{2}, \mp 2\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}}$$

Ejemplo 21

Si se suman todos los términos del desarrollo de $(\sqrt{x} + y)^7$ el resultado es -1 .

Calcular x y y sabiendo que el sexto término vale -672 .

Si la suma de los términos del desarrollo da -1 , lo mismo podemos afirmar de la potencia sin desarrollar:

$$(\sqrt{x} + y)^7 = -1$$

de donde

$$\sqrt{x} + y = -1$$

Despejando x :

$$\sqrt{x} = -y - 1$$

$$x = (-y-1)^2$$

$$x = y^2 + 2y + 1 \quad (1)$$

Por otra parte:

$$T_6 = \binom{7}{5} (\sqrt{x})^2 y^5 = -672$$

$$21xy^5 = -672$$

$$xy^5 = -32 \quad (2)$$

Sustituyendo en (2) el valor de x obtenido en (1):

$$(y^2 + 2y + 1)y^5 = -32$$

$$y^7 + 2y^6 + y^5 + 32 = 0$$

Al resolver, utilizando Ruffini, la única raíz que encontramos es -2 :

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 \\ & & -2 & 0 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & 0 \end{array}$$

Por tanto:

$$y = -2$$

Sustituyendo en (1):

$$x = (-2)^2 + 2(-2) + 1$$

$$x = 1$$

Y la solución es:

$$(1, -2)$$

Ejemplo 22

En el desarrollo de $(a+b)^n$ el tercer término vale 240, el cuarto vale -160 y el quinto, 60. Determinar el valor de a , de b y de n .

Construimos los tres términos de valor conocido:

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 = 240 \quad (1)$$

$$T_4 = \binom{n}{3} a^{n-3} b^3 = -160$$

$$T_5 = \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 = 60$$

Dividimos T_4 entre T_3 y simplificamos:

$$\frac{\binom{n}{3} a^{n-3} b^3}{\binom{n}{2} a^{n-2} b^2} = \frac{-160}{240}$$

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}{\frac{n(n-1)}{2}} a^{-1} b = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{n-2}{3} a^{-1} b = -\frac{2}{3}$$

$$a^{-1} b = -\frac{2}{n-2} \quad (2)$$

Dividimos T_5 entre T_4 y simplificamos:

$$\frac{\binom{n}{4} a^{n-4} b^4}{\binom{n}{3} a^{n-3} b^3} = \frac{60}{-160}$$

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} a^{-1} b = -\frac{3}{8}$$

$$\frac{n-3}{4} a^{-1} b = -\frac{3}{8}$$

$$a^{-1} b = -\frac{3}{2(n-3)} \quad (3)$$

Igualando el segundo miembro de las ecuaciones (2) y (3) y resolviendo:

$$-\frac{2}{n-2} = -\frac{3}{2(n-3)}$$

$$4(n-3) = 3(n-2)$$

$$4n - 12 = 3n - 6$$

$$\boxed{n = 6}$$

Sustituyendo en (2) y despejando b :

$$a^{-1} b = -\frac{2}{6-2}$$

$$a^{-1} b = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{a}{2} \quad (4)$$

Sustituyendo en (1) el valor conocido de n y el valor obtenido para b en (4):

$$\binom{6}{2} a^4 \left(-\frac{a}{2}\right)^2 = 240$$

$$\frac{15a^6}{4} = 240$$

$$a^6 = 64$$

$$a = \pm 2$$

Sustituyendo, por último, en (4):

$$b = -\frac{(\pm 2)}{2}$$

$$b = \mp 1$$

La solución del problema es, pues:

$$(\pm 2, \mp 1, 6)$$

Ejemplo 23

El tercer término del desarrollo de $(a+b)^n$ vale $\frac{5}{16}$, el quinto vale $\frac{35}{108}$ y el séptimo, $\frac{35}{486}$. Calcular a , b y n .

Construimos los tres términos conocidos:

$$T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 = \frac{5}{16} \quad (1)$$

$$T_5 = \binom{n}{4} a^{n-4} b^4 = \frac{35}{108}$$

$$T_7 = \binom{n}{6} a^{n-6} b^6 = \frac{35}{486}$$

Dividimos T_5 entre T_3 y simplificamos:

$$\frac{\binom{n}{4} a^{n-4} b^4}{\binom{n}{2} a^{n-2} b^2} = \frac{\frac{35}{108}}{\frac{5}{16}}$$

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}}{\frac{n(n-1)}{2}} a^{-2} b^2 = \frac{28}{27}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{12} a^{-2} b^2 = \frac{28}{27}$$

$$(n-2)(n-3) a^{-2} b^2 = \frac{112}{9}$$

$$a^{-2}b^2 = \frac{112}{9(n-2)(n-3)} \quad (2)$$

Dividimos T_7 entre T_5 y simplificamos:

$$\frac{\binom{n}{6} a^{n-6} b^6}{\binom{n}{4} a^{n-4} b^4} = \frac{35}{108}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720} a^{-2} b^2 = \frac{2}{9}$$

$$\frac{(n-4)(n-5)}{30} a^{-2} b^2 = \frac{2}{9}$$

$$(n-4)(n-5) a^{-2} b^2 = \frac{20}{3}$$

$$a^{-2} b^2 = \frac{20}{3(n-4)(n-5)} \quad (3)$$

Igualando el segundo miembro de las ecuaciones (2) y (3) y resolviendo:

$$\frac{112}{9(n-2)(n-3)} = \frac{20}{3(n-4)(n-5)}$$

$$\frac{28}{3(n-2)(n-3)} = \frac{5}{(n-4)(n-5)}$$

$$28(n-4)(n-5) = 15(n-2)(n-3)$$

$$28(n^2 - 9n + 20) = 15(n^2 - 5n + 6)$$

$$28n^2 - 252n + 560 = 15n^2 - 75n + 90$$

$$13n^2 - 177n + 470 = 0$$

$$(13n - 130)(13n - 47) = 0$$

$$\boxed{n_1 = 10} \quad n_2 = \frac{47}{13}$$

Sustituyendo en (3) el único valor admisible de n y despejando b^2 :

$$a^{-2} b^2 = \frac{20}{3 \cdot 6 \cdot 5}$$

$$a^{-2} b^2 = \frac{2}{9}$$

$$b^2 = \frac{2a^2}{9} \quad (4)$$

Sustituyendo en (1) el valor de n y el valor obtenido en (4) para b^2 :

$$\left(\frac{10}{2}\right)a^8 \cdot \frac{2a^2}{9} = \frac{5}{16}$$

$$45 \cdot \frac{2a^{10}}{9} = \frac{5}{16}$$

$$a^{10} = \frac{1}{32}$$

$$a^{10} = \frac{1}{2^5}$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo este valor en (4):

$$b^2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{9}$$

$$b^2 = \frac{1}{9}$$

$$b = \pm \frac{1}{3}$$

Las soluciones del problema son, en definitiva:

$$\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{3}, 10 \right); \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{1}{3}, 10 \right)$$

Ejercicio 81

- 1) En el desarrollo de $(x\sqrt{x} + y\sqrt[3]{y})^n$ hay un término cuya parte literal es x^3y^8 .

¿Cuál es el valor de n ? ¿Cuál término es?

- 2) En el desarrollo de $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{x}{\sqrt{y}}\right)^n$ hay un término cuya parte literal es y^{-1} .

¿Cuál es el valor de n ? ¿De cuál término se trata?

- 3) En el desarrollo de $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[5]{y^3})^n$ hay un término en el que el exponente de x es 4 y el de y es $9/5$. ¿Cuál es el valor de n ? ¿Cuál es el coeficiente de ese término?

- 4) Calcular el coeficiente del término que contiene $a^6b^{13}\sqrt{b}$ en el desarrollo de

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}} - \frac{b^2}{\sqrt[3]{a}}\right)^n$$

- 5) Calcular el coeficiente del término que contiene x^5y^3 en el desarrollo de $\left(\frac{y}{\sqrt{2x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{15y}}\right)^n$.
- 6) Calcular el coeficiente del término que contiene $x^{14}y^{-3}$ en el desarrollo de $\left(\frac{x}{\sqrt[3]{2y}} + \frac{1}{\sqrt[5]{9y}}\right)^n$.
- 7) En el desarrollo de $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^n$ el coeficiente del término que contiene y^2 es 210. ¿Cuál es el valor de n ? ¿Cuál es el exponente de x en ese término?
- 8) En el desarrollo de $(2a - b)^6$ el quinto término vale 60 y el sexto vale 12. ¿Cuáles son los valores de a y de b ?
- 9) En el desarrollo de $(2a + b)^6$ el tercer término vale 2.160 y el sexto vale -2.916. ¿Cuáles son los valores de a y de b ?
- 10) En el desarrollo de $(\sqrt{x} + y)^{10}$ el séptimo término vale 1.890 y el quinto vale 5.670. ¿Cuáles son los valores de x y de y ?
- 11) Se sabe que en el desarrollo de $(\sqrt[3]{x} + \sqrt{y})^{13}$ el quinto término vale 77.220 y el undécimo vale 27.456. ¿Cuánto valen x y y ?
- 12) ¿Cuáles deben ser los valores de x y y en el desarrollo de $(x + \sqrt{y})^{15}$ para que el 9º término valga 102.960 y el 4º valga $910\sqrt{2}$?
- 13) Calcular cuáles deben ser los valores de x y y en el desarrollo de $(\sqrt[3]{x} + y)^{11}$ para que el 9º término valga 330 y el 6º valga -1.848.
- 14) ¿Cuáles deben ser los valores de x y y en el desarrollo de $\left(\frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{3}{\sqrt{y}}\right)^5$ para que el tercer término valga $\frac{10}{9}$ y el cuarto valga $\frac{10\sqrt{3}}{3}$?
- 15) En el desarrollo de $\left(\frac{\sqrt{x}}{6} + \frac{3}{\sqrt{y}}\right)^5$ el tercer término vale $\frac{5\sqrt{2}}{6}$ y el cuarto vale 15. Determinar los valores de x y de y .
- 16) En el desarrollo de $(x + \sqrt[3]{y})^{12}$ el cuarto término vale $17\,600\sqrt{2}$ y el octavo vale $79\,200\sqrt[3]{200}$. ¿Cuánto valen x y y ?
- 17) La suma de los términos del desarrollo de $(x + y)^{10}$ es 1.024 y el término central vale 252. ¿Cuánto valen x y y ?
- 18) En el desarrollo de $(x + y)^{14}$ la suma de todos los términos es 1 y el término central vale -439.296. Calcular x y y .
- 19) La suma de los términos del desarrollo de $(x + y)^9$ es 512 y el séptimo

término vale 2.268. Determinar los valores de x y de y .

- 20) La suma de los términos del desarrollo de $(x+y)^7$ es $\frac{1}{128}$ y el segundo término vale $-\frac{7}{2}$. ¿Cuánto valen x y y ?
- 21) El valor total del desarrollo de $(x+y)^{11}$ es -1. El 7º término vale -14.784. Calcular los valores de x y de y .
- 22) El valor total del desarrollo de $(x+\sqrt{y})^7$ es 2.187 y el 2º término vale 14. Calcular x y y .
- 23) La suma de los términos de $(x+\sqrt[3]{y})^9$ es 19.683. El valor del séptimo término es 5.376. Hallar x y y .
- 24) La suma de todos los términos del desarrollo de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{3}{\sqrt{y}}\right)^5$ es 32. El último término vale 1. Determinar los valores de x y de y .
- 25) En el desarrollo de $\left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt{y}}{2}\right)^7$ los términos medios valen, respectivamente, $\frac{35\sqrt{3}}{54}$ y $\frac{35\sqrt{2}}{24}$. Determinar los valores de x y de y .
- 26) En el desarrollo de $(a+b)^n$ el 2º término vale 80, el 3º término vale 80 y el 4º término vale 40. Determinar a , b y n .
- 27) En el desarrollo de $(a+b)^n$ el 3º término vale $20\sqrt{2}$, el 4º vale 20 y el 5º vale $5\sqrt{2}$. Determinar a , b y n .
- 28) El 2º término del desarrollo de $(a+b)^n$ vale 12, el 4º vale 160 y el 6º vale 192. Determinar a , b y n .
- 29) El 2º término del desarrollo de $(a+b)^n$ vale 2.304, el 5º vale 4.032 y el 8º vale 144. Determinar a , b y n .

Binomio de Newton y fórmula de potenciación de Moivre

Recordamos la fórmula de potenciación de Moivre que permite elevar un complejo dado en forma trigonométrica a un exponente n :

$$(r \operatorname{Cis} \alpha)^n = r^n \operatorname{Cis} n\alpha$$

Haciendo $r = 1$, tenemos una expresión más sencilla de dicha fórmula:

$$\boxed{(\operatorname{Cis} \alpha)^n = \operatorname{Cis} n\alpha} \quad (23^c)$$

donde $\boxed{\operatorname{Cis} \alpha = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha} \quad (24^c)$

La utilización de la fórmula de Moivre combinada con las propiedades del

Binomio de Newton permite dos aplicaciones interesantes en trigonometría:

- 1) Expresar funciones trigonométricas de ángulos múltiples en términos de ángulo simple.
- 2) Expresar una potencia de $\cos \alpha$ o $\sin \alpha$, o un producto de potencias de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$, como una suma de senos y cosenos de ángulos múltiples.

1-. Funciones trigonométricas de ángulos múltiples expresados en términos de ángulos simples

Ejemplo 24

Expresar $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg} 4\alpha$ y $\operatorname{ctg} 4\alpha$ en términos de ángulo simple.

Procederemos de la siguiente forma: planteamos, utilizando la relación (23^c), la siguiente igualdad:

$$\operatorname{Cis} 4\alpha = (\operatorname{Cis} \alpha)^4$$

Utilizando (24^c), la transformamos así:

$$\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^4$$

Desarrollamos el segundo miembro:

$$\begin{aligned} \cos 4\alpha + i \sin 4\alpha &= \binom{4}{0} \cos^4 \alpha + \binom{4}{1} \cos^3 \alpha \cdot i \sin \alpha + \\ &\quad + \binom{4}{2} \cos^2 \alpha \cdot i^2 \sin^2 \alpha + \binom{4}{3} \cos \alpha \cdot i^3 \sin^3 \alpha + \binom{4}{4} i^4 \sin^4 \alpha \end{aligned}$$

Calculamos los números combinatorios y reducimos las potencias de i :

$$\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha = \cos^4 \alpha + 4i \cos^3 \alpha \sin \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha - 4i \cos \alpha \sin^3 \alpha + \sin^4 \alpha$$

Agrupamos parte real y parte imaginaria en el miembro de la derecha:

$$\cos 4\alpha + i \sin 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha + (4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha)i$$

Comparando partes reales y partes imaginarias, obtenemos directamente los equivalentes de $\cos 4\alpha$ y $\sin 4\alpha$

$$\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$$

$$\sin 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha$$

Utilizamos estos resultados para calcular $\operatorname{tg} 4\alpha$ y $\operatorname{ctg} 4\alpha$:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}{\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}$$

Dividiendo cada término del numerador y del denominador por $\cos^4 \alpha$, la expresión anterior queda escrita en términos de $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{4 \cos^3 \alpha \sin \alpha}{\cos^4 \alpha} - \frac{4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}{\cos^4 \alpha}}{\frac{\cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} - \frac{6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha} + \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}}$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha}$$

Siguiendo un proceso análogo, pero dividiendo esta vez por $\sin^4 \alpha$, obtenemos $\operatorname{ctg} 4\alpha$:

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha}{4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\frac{\cos^4 \alpha}{\sin^4 \alpha} - \frac{6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} + \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^4 \alpha}}{\frac{4 \cos^3 \alpha \sin \alpha}{\sin^4 \alpha} - \frac{4 \cos \alpha \sin^3 \alpha}{\sin^4 \alpha}}$$

$$\operatorname{ctg} 4\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^4 \alpha - 6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{4 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 4 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Ejercicio 82

Escribir cada una de las siguientes expresiones de ángulo múltiple en términos de ángulo simple:

1) $\cos 3\alpha$

8) $\operatorname{ctg} 5\alpha$

15) $\operatorname{tg} 7\alpha$

2) $\sin 3\alpha$

9) $\cos 6\alpha$

16) $\operatorname{ctg} 7\alpha$

3) $\operatorname{tg} 3\alpha$

10) $\sin 6\alpha$

17) $\cos 8\alpha$

4) $\operatorname{ctg} 3\alpha$

11) $\operatorname{tg} 6\alpha$

18) $\sin 8\alpha$

5) $\cos 5\alpha$

12) $\operatorname{ctg} 6\alpha$

19) $\operatorname{tg} 8\alpha$

6) $\sin 5\alpha$

13) $\cos 7\alpha$

20) $\operatorname{ctg} 8\alpha$

7) $\operatorname{tg} 5\alpha$

14) $\sin 7\alpha$

2-. Potencias de cosenos o senos y productos de potencias de cosenos y senos en términos de ángulo múltiple

Para esta segunda aplicación, calculemos previamente las siguientes expresiones:

a) $\text{Cis } \alpha + \text{Cis}(-\alpha)$

Utilizando (24^c):
$$= \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$$

Utilizando las fórmulas de ángulos negativos:

$$\begin{aligned} &= \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \alpha - i \sin \alpha \\ &= 2 \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cis } \alpha + \text{Cis}(-\alpha) = 2 \cos \alpha} \quad (25^c)$$

b) $\text{Cis } \alpha - \text{Cis}(-\alpha)$

En forma análoga:

$$\begin{aligned} &= \cos \alpha + i \sin \alpha - [\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)] \\ &= \cos \alpha + i \sin \alpha - [\cos \alpha - i \sin \alpha] \\ &= 2i \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Cis } \alpha - \text{Cis}(-\alpha) = 2i \sin \alpha} \quad (26^c)$$

Despejando $\cos \alpha$ en la relación (25^c) y $\sin \alpha$ en la (26^c) se obtiene:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1}{2} [\text{Cis } \alpha + \text{Cis}(-\alpha)]} \quad (27^c)$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{1}{2i} [\text{Cis } \alpha - \text{Cis}(-\alpha)]} \quad (28^c)$$

Ejemplo 25

Expresar $\sin^5 \alpha$ en términos de ángulo múltiple.

Utilizando la relación (28^c):
$$\sin^5 \alpha = \frac{1}{2^5 i^5} [\text{Cis } \alpha - \text{Cis}(-\alpha)]^5$$

Desarrollamos el segundo miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{32i} \left[\binom{5}{0} \text{Cis } 5\alpha - \binom{5}{1} \text{Cis } 4\alpha \text{Cis}(-\alpha) + \binom{5}{2} \text{Cis } 3\alpha \text{Cis}(-2\alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \binom{5}{3} \text{Cis } 2\alpha \text{Cis}(-3\alpha) + \binom{5}{4} \text{Cis } \alpha \text{Cis}(-4\alpha) - \binom{5}{5} \text{Cis}(-5\alpha) \right] \end{aligned}$$

Obsérvese que se aplicó en cada término la fórmula de potenciación de Moivre.

Calculamos los números combinatorios y multiplicamos los complejos en cada término:

$$= \frac{1}{32i} [\text{Cis } 5\alpha - 5\text{Cis } 3\alpha + 10\text{Cis } \alpha - 10\text{Cis } (-\alpha) + 5\text{Cis } (-3\alpha) - \text{Cis } (-5\alpha)]$$

Agrupamos los términos equidistantes de los extremos y sacamos factor común en ellos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{32i} [\text{Cis } 5\alpha - \text{Cis } (-5\alpha) - 5\text{Cis } 3\alpha + 5\text{Cis } (-3\alpha) + 10\text{Cis } \alpha - 10\text{Cis } (-\alpha)] \\ &= \frac{1}{32i} \{ [\text{Cis } 5\alpha - \text{Cis } (-5\alpha)] - 5[\text{Cis } 3\alpha - \text{Cis } (-3\alpha)] + 10[\text{Cis } \alpha - \text{Cis } (-\alpha)] \} \end{aligned}$$

Utilizando la relación (26^c) transformamos cada una de las expresiones que aparecen entre corchetes:

$$= \frac{1}{32i} (2i \text{sen } 5\alpha - 5 \cdot 2i \text{sen } 3\alpha + 10 \cdot 2i \text{sen } \alpha)$$

Simplificando:

$$\text{sen }^5 \alpha = \frac{1}{16} (\text{sen } 5\alpha - 5 \text{sen } 3\alpha + 10 \text{sen } \alpha)$$

Ejemplo 26

Expresar $\text{sen}^3 \alpha \cos^5 \alpha$ en términos de ángulo múltiple:

Transformamos la expresión utilizando las relaciones (27^c) y (28^c):

$$\begin{aligned} \text{sen}^3 \alpha \cos^5 \alpha &= \frac{1}{2^3 i^3} [\text{Cis } \alpha - \text{Cis } (-\alpha)]^3 \cdot \frac{1}{2^2 i^2} [\text{Cis } \alpha + \text{Cis } (-\alpha)]^5 \\ &= -\frac{1}{2^5 i} [\text{Cis } \alpha - \text{Cis } (-\alpha)]^3 \cdot [\text{Cis } \alpha + \text{Cis } (-\alpha)]^5 \end{aligned}$$

Desarrollamos las potencias (calcularemos directamente los números combinatorios y aplicaremos la fórmula de Moivre):

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{256i} [\text{Cis } 3\alpha - 3\text{Cis } 2\alpha \text{Cis } (-\alpha) + 3\text{Cis } \alpha \text{Cis } (-2\alpha) - \text{Cis } (-3\alpha)] \cdot \\ &\quad \cdot [\text{Cis } 5\alpha + 5\text{Cis } 4\alpha \text{Cis } (-\alpha) + 10\text{Cis } 3\alpha \text{Cis } (-2\alpha) + \\ &\quad 10\text{Cis } 2\alpha \text{Cis } (-3\alpha) + 5\text{Cis } \alpha \text{Cis } (-4\alpha) + \text{Cis } (-5\alpha)] \end{aligned}$$

Efectuamos todos los productos que aparecen:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{256i} [\text{Cis } 3\alpha - 3\text{Cis } \alpha + 3\text{Cis } (-\alpha) - \text{Cis } (-3\alpha)] \cdot \\ &\quad \cdot [\text{Cis } 5\alpha + 5\text{Cis } 3\alpha + 10\text{Cis } \alpha + 10\text{Cis } (-\alpha) + 5\text{Cis } (-3\alpha) + \text{Cis } (-5\alpha)] \end{aligned}$$

Multiplcamos, aplicando la propiedad distributiva, cada uno de los términos del primer corchete por cada uno de los términos del segundo:

$$= -\frac{1}{256i} [\text{Cis } 8\alpha + 5\text{Cis } 6\alpha + 10\text{Cis } 4\alpha + 10\text{Cis } 2\alpha + 5\text{Cis } 0 + \text{Cis } (-2\alpha) - \\ -3\text{Cis } 6\alpha - 15\text{Cis } 4\alpha - 30\text{Cis } 2\alpha - 30\text{Cis } 0 - 15\text{Cis } (-2\alpha) - 3\text{Cis } (-4\alpha) + \\ +3\text{Cis } 4\alpha + 15\text{Cis } 2\alpha + 30\text{Cis } 0 + 30\text{Cis } (-2\alpha) + 15\text{Cis } (-4\alpha) + 3\text{Cis } (-6\alpha) - \\ -\text{Cis } 2\alpha - 5\text{Cis } 0 - 10\text{Cis } (-2\alpha) - 10\text{Cis } (-4\alpha) - 5\text{Cis } (-6\alpha) - \text{Cis } (-8\alpha)]$$

Reducimos términos semejantes ($\text{Cis } 0 = 1$), agrupamos términos equidistantes de los extremos y sacamos factor común en cada uno de los pares que así se forman:

$$= -\frac{1}{256i} [\text{Cis } 8\alpha + 2\text{Cis } 6\alpha - 2\text{Cis } 4\alpha - 6\text{Cis } 2\alpha + \\ +6\text{Cis } (-2\alpha) + 2\text{Cis } (-4\alpha) - 2\text{Cis } (-6\alpha) - \text{Cis } (-8\alpha)] \\ = -\frac{1}{256i} \{ [\text{Cis } 8\alpha - \text{Cis } (-8\alpha)] + 2[\text{Cis } 6\alpha - \text{Cis } (-6\alpha)] - \\ -2[\text{Cis } 4\alpha - \text{Cis } (-4\alpha)] - 6[\text{Cis } 2\alpha - \text{Cis } (-2\alpha)] \}$$

Utilizando la relación (26^c), transformamos cada una de las expresiones que aparecen entre corchetes:

$$= -\frac{1}{256i} (2i \text{sen } 8\alpha + 2 \cdot 2i \text{sen } 6\alpha - 2 \cdot 2i \text{sen } 4\alpha - 6 \cdot 2i \text{sen } 2\alpha)$$

Simplificando:

$$= -\frac{1}{128} (\text{sen } 8\alpha + 2 \text{sen } 6\alpha - 2 \text{sen } 4\alpha - 6 \text{sen } 2\alpha)$$

Cambiando signos tenemos en definitiva que:

$$\boxed{\text{sen}^3 \alpha \cos^5 \alpha = \frac{1}{128} (6 \text{sen } 2\alpha + 2 \text{sen } 4\alpha - 2 \text{sen } 6\alpha - \text{sen } 8\alpha)}$$

Ejercicio 83

Escribir las siguientes potencias o productos de potencias en términos de ángulo múltiple:

- | | | |
|--------------------------|---|---|
| 1) $\text{sen}^2 \alpha$ | 11) $\cos^6 \alpha$ | 20) $\text{sen}^2 \alpha \cos^4 \alpha$ |
| 2) $\text{sen}^3 \alpha$ | 12) $\cos^7 \alpha$ | 21) $\text{sen}^3 \alpha \cos \alpha$ |
| 3) $\text{sen}^4 \alpha$ | 13) $\text{sen } \alpha \cos \alpha$ | 22) $\text{sen}^3 \alpha \cos^2 \alpha$ |
| 4) $\text{sen}^5 \alpha$ | 14) $\text{sen } \alpha \cos^2 \alpha$ | 23) $\text{sen}^3 \alpha \cos^3 \alpha$ |
| 5) $\text{sen}^6 \alpha$ | 15) $\text{sen } \alpha \cos^3 \alpha$ | 24) $\text{sen}^3 \alpha \cos^4 \alpha$ |
| 6) $\text{sen}^7 \alpha$ | 16) $\text{sen } \alpha \cos^4 \alpha$ | 25) $\text{sen}^4 \alpha \cos \alpha$ |
| 7) $\cos^2 \alpha$ | 17) $\text{sen}^2 \alpha \cos \alpha$ | 26) $\text{sen}^4 \alpha \cos^2 \alpha$ |
| 8) $\cos^3 \alpha$ | 18) $\text{sen}^2 \alpha \cos^2 \alpha$ | 27) $\text{sen}^4 \alpha \cos^3 \alpha$ |
| 9) $\cos^4 \alpha$ | 19) $\text{sen}^2 \alpha \cos^3 \alpha$ | 28) $\text{sen}^4 \alpha \cos^4 \alpha$ |
| 10) $\cos^5 \alpha$ | | |

Suma de las combinaciones posibles de n elementos

El Teorema del Binomio nos permite hallar una fórmula para calcular la suma de todas las combinaciones que se pueden hacer con n elementos.

Si tomamos el Teorema del Binomio (22^c)

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-2}a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

y hacemos $a = b = 1$, tendremos:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

es decir:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n} \quad (29^c)$$

relación que puede ser expresada en esta otra forma:

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n} \quad (30^c)$$

o también:

$$\boxed{\sum_{k=0}^n C_{n,k} = 2^n} \quad (31^c)$$

Ejemplo 27

Calcular: $\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k}$

Utilizando (30^c), tenemos:

$$\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} = 2^7 = \boxed{128}$$

Ejemplo 28

Calcular: $\sum_{k=0}^9 C_{9,k}$

Utilizando (31^c):

$$\sum_{k=0}^9 C_{9,k} = 2^9 = \boxed{512}$$

Ejemplo 29

Calcular: $\sum_{k=2}^8 \binom{8}{k}$

La sumatoria a calcular es equivalente a la sumatoria

$$\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k}$$

sin los dos primeros términos:

$$\sum_{k=2}^8 \binom{8}{k} = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} - \left[\binom{8}{0} + \binom{8}{1} \right]$$

$$= 2^8 - (1 + 8) = 256 - 9 = \boxed{247}$$

Suma de los coeficientes de los términos impares y de los términos pares del desarrollo de la potencia de un binomio

Si tomamos el Teorema del Binomio (22^C) y hacemos $a = 1$ y $b = 1$, tendremos:

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-2} \binom{n}{n-2} + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n}$$

es decir:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^{n-2} \binom{n}{n-2} + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

En caso de que n sea impar, la expresión anterior queda así:

$$\boxed{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots - \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n} = 0} \quad (32^C)$$

Si pasamos al miembro de la derecha los términos negativos de esta serie, obtenemos que

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{n}$$

con lo que resulta evidente la siguiente propiedad:

La suma de los coeficientes de los términos impares del desarrollo de la potencia de un binomio es igual a la suma de los coeficientes de los términos pares.

(33^C)

Sumando ahora las igualdades (29^C) y (32^C) tenemos:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots - \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n} = 0$$

$$2\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + \cdots + 2\binom{n}{n-2} = 2^n$$

Dividiendo ambos miembros por 2:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} = 2^{n-1}$$

Si en lugar de sumar las igualdades, restamos la igualdad (32^c) de la (29^c), la expresión que se obtiene es ésta:

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^{n-1}$$

Estas dos últimas igualdades nos permiten formular la siguiente propiedad:

La suma de los coeficientes de los términos impares del desarrollo de la potencia de un binomio y la suma de los coeficientes de los términos pares dan ambas por resultado 2^{n-1} (34^c)

Todo el razonamiento que hemos hecho es válido para el caso de que n sea impar. Realizando un proceso análogo para el caso de que n sea par, se obtienen idénticos resultados.

Ejemplo 31

Calcular: $S = \binom{14}{5} + \binom{14}{7} + \binom{14}{9} + \cdots + \binom{14}{13}$

S es igual a la suma de los coeficientes de los términos pares del desarrollo de $(a+b)^{14}$ sin los dos primeros coeficientes. La suma pedida será, por tanto:

$$S = 2^{14-1} - \left[\binom{14}{1} + \binom{14}{3} \right]$$

$$= 8192 - (14 + 364)$$

$$= \boxed{7814}$$

Ejercicio 84

Aplicando las relaciones y propiedades (29^c) a (34^c), calcular cada una de las siguientes expresiones:

$$1) \sum_{k=0}^6 C_{6,k}$$

$$2) \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k}$$

$$3) \sum_{k=1}^9 \binom{9}{k}$$

$$4) \sum_{k=4}^{11} C_{11,k}$$

$$5) \binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \cdots + \binom{15}{15}$$

$$6) \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \cdots + \binom{7}{7}$$

$$7) \binom{12}{0} + \binom{12}{1} + \binom{12}{2} + \cdots + \binom{12}{9}$$

$$8) \binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \cdots + \binom{10}{8}$$

$$9) \sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} + \sum_{k=2}^9 \binom{9}{k}$$

$$10) \sum_{k=2}^8 C_{8,k} - \sum_{k=3}^7 C_{7,k}$$

$$11) \sum_{k=0}^{10} 7 \binom{10}{k} - \sum_{k=0}^9 8 \binom{9}{k}$$

$$12) \sum_{k=0}^9 \left[\binom{10}{k} + \binom{9}{k} \right]$$

$$13) \sum_{k=0}^{11} (5C_{12,k} - 6C_{11,k})$$

$$14) \sum_{k=3}^9 \left[\binom{11}{k} - \binom{10}{k} \right]$$

$$15) \binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \cdots + \binom{10}{9}$$

$$16) \binom{9}{0} + \binom{9}{2} + \binom{9}{4} + \cdots + \binom{9}{8}$$

$$17) \binom{15}{5} + \binom{15}{7} + \binom{15}{9} + \cdots + \binom{15}{15}$$

$$18) \binom{14}{6} + \binom{14}{8} + \binom{14}{10} + \cdots + \binom{14}{14}$$

$$19) \binom{18}{5} + \binom{18}{7} + \binom{18}{9} + \cdots + \binom{18}{15}$$

$$20) \binom{17}{0} + \binom{17}{1} + \cdots + \binom{17}{6} + \binom{17}{10} + \binom{17}{11} + \cdots + \binom{17}{17}$$

Cálculo de término general de sucesiones de la forma:

$$a_n = b_1 n^k + b_2 n^{k-1} + b_3 n^{k-2} + \cdots + b_{n-1} n + b_n$$

Una aplicación de los números combinatorios es la que nos permite calcular el término general de algunas sucesiones de la forma arriba señalada.

Sea la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

Se determina, a partir del segundo término, la diferencia Δ entre cada término y el anterior:

$$\Delta_{1,1} = a_2 - a_1$$

$$\Delta_{1,2} = a_3 - a_2$$

$$\Delta_{1,3} = a_4 - a_3 \quad \text{etc.}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	$\dots$
	$\Delta_{1,1}$	$\Delta_{1,2}$	$\Delta_{1,3}$	$\Delta_{1,4}$	$\Delta_{1,5}$	$\dots$

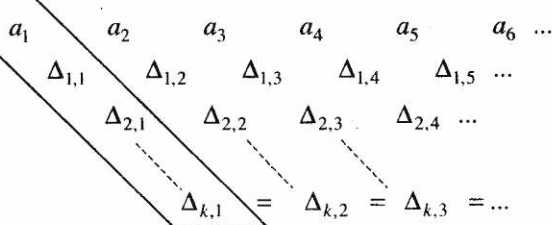
Se repite el proceso en forma análoga para cada fila resultante

$$\Delta_{2,1} = \Delta_{1,2} - \Delta_{1,1}$$

$$\Delta_{2,2} = \Delta_{1,3} - \Delta_{1,2}$$

$$\Delta_{2,3} = \Delta_{1,4} - \Delta_{1,3} \quad \text{etc.}$$

hasta que las diferencias obtenidas en la fila sean todas iguales entre sí:



Se forman tantos números combinatorios de numerador $n - 1$ y denominadores $0, 1, 2, 3, \dots, k$, como filas hayan resultado, multiplicados, respectivamente, por el primer número de cada fila:

$$a_1 \binom{n-1}{0} + \Delta_{1,1} \binom{n-1}{1} + \Delta_{2,1} \binom{n-1}{2} + \dots + \Delta_{k,1} \binom{n-1}{k}$$

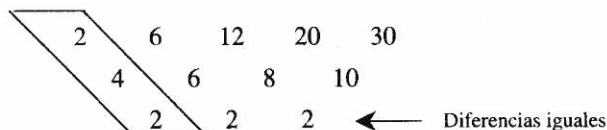
La expresión que se obtiene es el término general de la sucesión:

$$a_1 + \Delta_{1,1} \binom{n-1}{1} + \Delta_{2,1} \binom{n-1}{2} + \dots + \Delta_{k,1} \binom{n-1}{k}$$

Ejemplo 32

Calcular el término general de la sucesión $2, 6, 12, 20, 30, \dots$

A cada término de la sucesión, a partir del segundo, se le resta el término anterior. El proceso se repite hasta que las diferencias que se obtienen sean iguales entre sí:



Se forman tantos números combinatorios de numerador $n - 1$ y denominadores $0, 1, 2, 3, \dots$ como filas hayan resultado, multiplicados, respectivamente, por el primer número de cada fila. La expresión que se obtiene es el término general de la sucesión:

$$a_n = 2 \binom{n-1}{0} + 4 \binom{n-1}{1} + 2 \binom{n-1}{2}$$

Resolviendo:

$$a_n = 2 \cdot 1 + 4(n-1) + 2 \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$a_n = 2 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2$$

$$a_n = n^2 + n$$

Nota: Los términos de la sucesión se obtienen sustituyendo la variable n por números naturales. Si se desea que los términos se obtengan sustituyendo la variable por los números 0, 1, 2, 3, ..., en lugar de formar el término general con números combinatorios de numerador $n - 1$, se forma con números combinatorios de numerador n y denominadores 0, 1, 2, ... como antes.

Ejemplo 33

Calcular el término general de la sucesión 1, 5, 19, 49, 101, 181, ...

A cada término de la sucesión, a partir del segundo, se le resta el término anterior. El proceso se repite hasta obtener una fila de diferencias iguales entre sí:

1	5	19	49	101	181
	4	14	30	52	80
		10	16	22	28
			6	6	6

← Diferencias iguales

El término general de la sucesión es:

$$a_n = 1 \binom{n-1}{0} + 4 \binom{n-1}{1} + 10 \binom{n-1}{2} + 6 \binom{n-1}{3}$$

Resolviendo:

$$a_n = 1 + 4(n-1) + 10 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 2}$$

$$a_n = 1 + 4n - 4 + 5(n^2 - 3n + 2) + n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

$$a_n = n^3 - n^2 + 1$$

Ejemplo 34

Calcular el término general de la sucesión

$$\frac{1}{10}, \frac{-20}{27}, \frac{-59}{58}, \frac{-92}{109}, \frac{-71}{186}, \frac{76}{295}, \frac{445}{442}, \dots$$

Procesaremos por separado numerador y denominador.

1) Término general del numerador:

Tabla de diferencias:

1	-20	-59	-92	-71	76	445
	-21	-39	-33	21	147	369
		-18	6	54	126	222
			24	48	72	96
				24	24	24

←

Término general del numerador:

$$a_n = \binom{n-1}{0} - 21\binom{n-1}{1} - 18\binom{n-1}{2} + 24\binom{n-1}{3} + 24\binom{n-1}{4}$$

$$a_n = 1 - 21(n-1) - 18 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 24 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 2} + 24 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2}$$

$$a_n = 1 - 21(n-1) - 9(n^2 - 3n + 2) + 4(n^3 - 6n^2 + 11n - 6) + n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 40n + 24$$

$$a_n = n^4 - 6n^3 + 2n^2 + 4$$

2) Término general del denominador:

Tabla de diferencias:

10	27	58	109	186	295	442
17	31	51	77	109	147	
14	20	26	32	38		
6	6	...				

Término general del denominador:

$$b_n = 10\binom{n-1}{0} + 17\binom{n-1}{1} + 14\binom{n-1}{2} + 6\binom{n-1}{3}$$

$$b_n = 10 + 17(n-1) + 14 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 6 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3 \cdot 2}$$

$$b_n = 10 + 17(n-1) + 7(n^2 - 3n + 2) + n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

$$b_n = n^3 + n^2 + 7n + 1$$

Y el término general de la sucesión es:

$$c_n = \frac{n^4 - 6n^3 + 2n^2 + 4}{n^3 + n^2 + 7n + 1}$$

Ejercicio 85

Hallar el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

1) 10, 35, 72, 121, 182, 255...

2) 12, 29, 52, 81, 116, 157...

3) 24, 65, 120, 189, 272, 369...

4) 5, 15, 28, 44, 63, 85...

5) 6, 5, 8, 15, 26, 41...

6) 7, 17, 41, 85, 155, 257, 397...

7) 9, 28, 65, 126, 217, 344, 513...

8) 14, 108, 308, 650, 1.170, 1.904, 2.882...

9) -4, -11, 20, 179, 604, 1.481, 3.044, 5.575...

10) -10, -26, 0, 140, 490, 1.170, 2.324, 4.120...

11) 6, 6, 0, 0, 42, 186, 516...

12) $\frac{11}{8}, \frac{21}{23}, \frac{33}{52}, \frac{47}{101}, \frac{63}{176}, \frac{81}{283} \dots$

13) $-6, -\frac{7}{22}, -\frac{2}{97}, \frac{9}{286}, \frac{26}{673}, \frac{49}{1366}, \frac{78}{2497} \dots$

14) -216, -114, 0, 0, 0, 714, 3.816, 12.300, 30.840...

Ejercicios de recapitulación

- 1) Calcular el desarrollo de $(2 + \sqrt{x})^4 + (2 - \sqrt{x})^4$.
- 2) Calcular el desarrollo de $(a + \sqrt{a-1})^7 + (a - \sqrt{a-1})^7$.
- 3) En el desarrollo de $(a+b)^n$ demostrar que el coeficiente del término central es par si n es par.
- 4) Demostrar que $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \dots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$.
- 5) Determinar el valor de n en $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ sabiendo que el resultado de dividir el tercer término por el antepenúltimo es $x^{\frac{35}{6}}$.
- 6) En el desarrollo de $(1+x)^n$ el coeficiente del término $k+1$ y el del término $k+3$ son iguales. Determinar k .
- 7) Los coeficientes de x en el quinto y en el séptimo término de $(1+2x)^n$ son, respectivamente, 1.120 y 1.792. Determinar n .
- 8) Hallar m y n sabiendo que $\binom{m+1}{n+1} : \binom{m+1}{n} : \binom{m+1}{n-1} = 5 : 5 : 3$
- 9) Hallar m y n sabiendo que $\binom{m}{n} : \binom{m}{n+1} : \binom{m}{n+2} = 5 : 3 : 1$
- 10) Hallar m y n sabiendo que $\binom{m}{n} : \binom{m}{n+1} : \binom{m+1}{n+2} = 2 : 2 : 3$
- 11) En el desarrollo de $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ el coeficiente del tercer término excede al del segundo en 44 unidades. Hallar el término independiente.
- 12) En el desarrollo de $(1+\sqrt{3})^{100}$ hay un término T_{k+1} que es al mismo tiempo mayor que el término que le precede y mayor que el que le sigue. ¿De cuál término se trata?
- 13) En el desarrollo de $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ los coeficientes del 5º y del 13º término son iguales. Calcular T_{13} .
- 14) Demostrar que, si n es primo, todos los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^n$, exceptuando los extremos, son divisibles por n .

GEOMETRIA ANALITICA DEL PLANO

Es el estudio de la geometría con la utilización de coordenadas rectangulares.

El concepto de sistema de coordenadas rectangulares es muy antiguo: ya antes de la era cristiana, **Apolonio**, matemático de la escuela de Alejandría, definía y estudiaba las curvas de segundo orden (elipse, hipérbola y parábola) mediante el uso de coordenadas rectangulares.

René Descartes (1596-1650), cuyo nombre latinizado era Cartesius, inició en el siglo XVII la geometría analítica con la publicación, en 1637, de su obra *La Géométrie*.¹

Descartes, quién fue contemporáneo de Fermat y de Galileo, introdujo la regla de elección de signos en el sistema de coordenadas rectangulares; gracias a esta regla, los números negativos (que no eran reconocidos por la mayoría de los matemáticos de la Edad Media) obtuvieron una representación clara y fueron aceptados definitivamente en las matemáticas.

Muchos años más tarde, la aplicación del sistema de coordenadas rectangulares jugó un papel decisivo en la afirmación de los números complejos en las matemáticas.

Pero, indiscutiblemente, el gran mérito de la Geometría Cartesiana es haber incorporado de lleno el álgebra (y más tarde el cálculo) al estudio de la Geometría.

Eje de coordenadas - Generalidades

La recta en la que se determina un punto O (llamado *origen de coordenadas*) y un punto U (llamado *punto de unidad*) se denomina *eje de coordenadas*.



Se considera dirección positiva del eje de coordenadas la de la semirecta que sale del punto O y contiene el punto U . La dirección contraria se considera negativa.

Se llama coordenada de un punto M_0 , situado en el eje de coordenadas, el número x_0 que se define por la igualdad

$$x_0 = \pm \frac{|OM_0|}{|OU|} \quad (1^a)$$

siendo positivo el valor de x_0 cuando el punto M_0 se encuentra del mismo lado que

¹ Debido a esto, la Geometría Analítica se conoce también con el nombre de Geometría Cartesiana.

U con respecto al origen y siendo negativo cuando están a lados contrarios.



En la figura anterior, la coordenada de M_1 es positiva ($x_1 > 0$); la de M_2 es negativa ($x_2 < 0$).

La longitud del segmento OM_0 es igual a x_0 . Esto se desprende de la igualdad (1^o):

$$|OM_0| = x_0 \cdot |OU|$$

pero $|OU| = 1$; por lo cual

$$|OM_0| = x_0$$

La distancia, por tanto, del origen a un punto M_0 es la coordenada de M_0 .

Esta distancia se considera positiva si M_0 se encuentra en la dirección positiva y negativa en caso contrario,



En la figura anterior se cumple que

$$OM_0 = x_0$$

$$M_0O = -x_0$$

De las igualdades anteriores se desprende que

$$OM_0 = -M_0O$$

Desde el punto de vista de la Geometría elemental, las longitudes de los segmentos OM_0 y M_0O son iguales. En Geometría analítica, en cambio, se hace una distinción entre los signos de esas longitudes, por eso se habla de *distancia dirigida*.

Distancia dirigida entre dos puntos de un eje de coordenadas

Sean dos puntos M_1 y M_2 pertenecientes al eje de coordenadas.

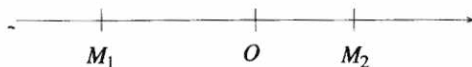


La distancia dirigida entre los puntos M_1 y M_2 será:

$$\vec{M_1M_2} = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$$

Esta relación es válida también en el caso de que M_1 y M_2 estén a lados

contrarios del origen.



En efecto, en la figura anterior tenemos que

$$M_1M_2 = M_1O + OM_2 = -OM_1 + OM_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1$$

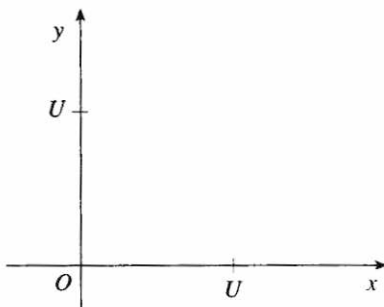
La distancia dirigida entre dos puntos de un eje de coordenadas se obtiene restando la coordenada del origen x_1 de la coordenada del extremo x_2 .

Sistema de ejes coordenados

Dos ejes ortogonales de coordenadas con origen O común forman un *sistema de ejes coordenados* o un sistema cartesiano.

El eje señalado con x se llama **eje de abscisas** y el señalado con y se llama **eje de ordenadas**.

Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro porciones llamadas *cuadrantes* y éstos se numeran, tal como se hizo en el estudio de la trigonometría, comenzando por el que está comprendido entre los semiejes positivos de abscisas y ordenadas y siguiendo el sentido contrario de las agujas del reloj.



Coordenadas de un punto en el plano

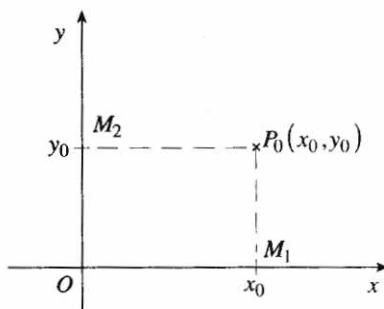
Sea un sistema de ejes coordenados y un punto cualquiera P_0 del plano.

Si se trazan perpendiculares desde P_0 a ambos ejes, éstas cortarán los ejes en los puntos M_1 y M_2 .

Sean x_0 y y_0 , respectivamente, las coordenadas de M_1 y M_2 .

En estas condiciones, se llaman coordenadas del punto P_0 al par ordenado (x_0, y_0) .

El número x_0 se llama *abscisa* del punto P_0 y y_0 se llama *ordenada* de ese punto.



Para señalar un punto P_0 en el plano, se marca la abscisa del punto sobre el eje de abscisas y la ordenada sobre el eje de ordenadas. Se trazan perpendiculares a los respectivos ejes por los puntos señalados. La intersección de esas perpendiculares nos darán la localización del punto P_0 .

En la figura aparecen señalados los puntos

$A(3,5)$

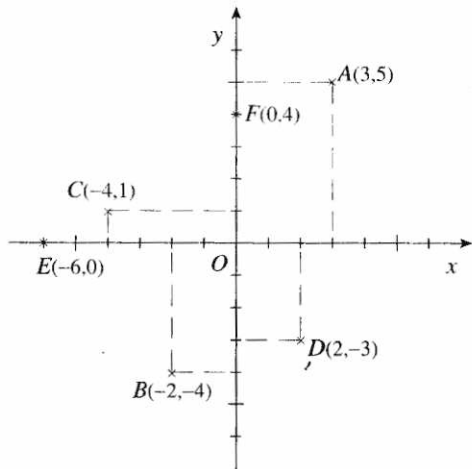
$B(-2,-4)$

$C(-4,1)$

$D(2,-3)$

$E(-6,0)$

y $F(0,4)$



Nota: Si una de las coordenadas de un punto es cero, el punto queda sobre uno de los dos ejes.

Ejercicio 87

Señalar en un mismo gráfico los cuatro puntos que se dan en cada uno de los ejercicios 1 al 5 (utilizar un gráfico en cada ejercicio)

- 1) $A(4,1)$ $B(5,-2)$ $C(-3,-4)$ $D(-4,3)$
- 2) $A(7,0)$ $B(-4,5)$ $C(6,-3)$ $D(0,-3)$
- 3) $A(-2,6)$ $B(0,3)$ $C(7,2)$ $D(-4,0)$
- 4) $A(\frac{1}{2}, 4)$ $B(-3, \frac{5}{2})$ $C(-\frac{3}{2}, 2)$ $D(-\frac{7}{2}, \frac{9}{2})$
- 5) $A(5, \frac{1}{3})$ $B(-\frac{2}{3}, 4)$ $C(\frac{4}{3}, -2)$ $D(-4, \frac{8}{3})$

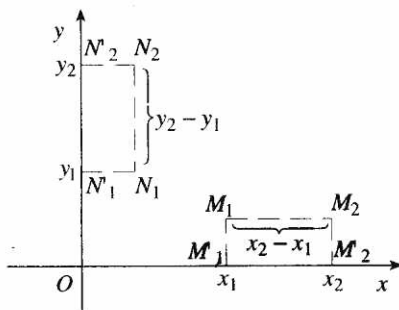
Representar gráficamente

- 6) el segmento cuyos extremos son $M(-3,4)$ y $N(3, -\frac{11}{2})$
- 7) el triángulo cuyos vértices son $A(-2,7)$; $B(3, \frac{5}{2})$ y $C(-3,-4)$
- 8) el cuadrilátero cuyos vértices son $M(7,3)$; $N(11,-6)$; $P(-2,-8)$ y $Q(-6,5)$
- 9) el paralelogramo cuyos vértices son $A(-3,1)$; $B(6,3)$; $C(4,-2)$ y $D(-5,-4)$
- 10) Señale en un gráfico la siguiente secuencia de puntos uniendo cada punto con el anterior mediante un segmento de recta: $(0,5)$; $(-2,5)$; $(-4,4)$; $(-5,2)$; $(-5,1)$; $(-6,0)$; $(-7,-2)$; $(-7,-4)$; $(-6,-6)$; $(-5,-7)$; $(-5,-6)$; $(-6,-4)$; $(-6,-2)$; $(-5,0)$; $(-4,-2)$; $(-2,-3)$; $(0,-2)$; $(1,0)$; $(1,2)$; $(0,4)$; $(-2,3)$; $(-2,1)$; $(0,0)$; $(2,1)$; $(3,3)$; $(4,3)$; $(6,2)$; $(7,0)$; $(7,-2)$; $(6,-3)$; $(8,-2)$; $(8,0)$; $(7,2)$; $(6,3)$; $(5,4)$; $(3,4)$; $(3,5)$; $(2,7)$; $(2,5)$; $(0,6)$; $(-1,5)$; $(-2,6)$; $(-4,5)$; $(-4,7)$; $(-5,5)$; $(-5,4)$; $(-6,4)$; $(-8,3)$; $(-9,2)$; $(-10,0)$; $(-10,-2)$; $(-8,-3)$; $(-9,-2)$; $(-9,0)$; $(-8,2)$; $(-6,3)$; $(-5,3)$; $(-4,1)$; $(-2,0)$; $(0,1)$; $(0,3)$; $(-2,4)$; $(-3,2)$; $(-3,0)$; $(-2,-2)$; $(0,-3)$; $(2,-2)$; $(3,0)$; $(4,-2)$; $(4,-4)$; $(3,-6)$; $(3,-7)$; $(4,-6)$; $(5,-4)$; $(5,-2)$; $(4,0)$; $(3,1)$; $(3,2)$; $(2,4)$; $(0,5)$

Distancia dirigida entre dos puntos de igual abscisa o de igual ordenada

Si dos puntos del plano M_1 y M_2 tienen igual ordenada, es evidente que la distancia que los separa será igual a la que separa sus proyecciones ortogonales sobre el eje de abscisas M'_1 y M'_2 , es decir $x_2 - x_1$.

Y si tienen igual abscisa, como es el caso de N_1 y N_2 , la distancia que los separa será $y_2 - y_1$.



La distancia dirigida entre dos puntos de igual ordenada es igual a la diferencia de sus abscisas. La distancia dirigida entre dos puntos de igual abscisa es igual a la diferencia de sus ordenadas. En ambos casos la diferencia se obtiene restando la coordenada del punto de origen de la del extremo.

Ejemplo 1

Dados los puntos $A(-2,5)$; $B(3,1)$; $C(-2,-1)$; $D(-5,1)$ y $E(-2,1)$ determinar las distancias dirigidas entre los extremos de los segmentos AC , EB , CE y BD .

Segmento AC : dado que A y C tienen igual abscisa, la distancia dirigida entre esos puntos será igual a la ordenada de C (extremo) menos la ordenada de A (origen):

$$AC = y_C - y_A = -1 - 5 = -6$$

Segmento EB : E y B tienen igual ordenada. La distancia dirigida entre esos puntos será igual a la abscisa de B (extremo) menos la de E (origen):

$$EB = x_B - x_E = 3 - (-2) = 5$$

Segmento CE : C y E tienen igual abscisa, por tanto:

$$CE = y_E - y_C = 1 - (-1) = 2$$

Segmento BD : B y D tienen igual ordenada, por tanto:

$$BD = x_D - x_B = -5 - 3 = -8$$

Ejercicio 88

Dados los puntos $A(1,7)$; $B(-6,2)$; $C(-6,-1)$; $D(-5,-5)$; $E(-1,-5)$; $F(3,-5)$; $G(1,-1)$; $H(-1,-1)$; $I(1,2)$ y $J(3,2)$, determinar las distancias dirigidas entre los extremos de los siguientes segmentos:

1) AI

3) FD

5) CH

2) BJ

4) CB

6) EH

7) JF 10) IG 13) HG 8) GA 11) JI 14) ED 9) GC 12) BI 15) EF

Distancia entre dos puntos del plano

Sean dos puntos del plano, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, proyectados en ambos ejes coordenados, tal como se muestra en la figura.

Dos de los rayos proyectores se intersectan en el punto M , cuyas coordenadas son (x_2, y_1) ya que tiene la misma ordenada de A y la misma abscisa de B .

La medida del segmento AM es $x_2 - x_1$, dado que sus extremos tienen igual ordenada.

La del segmento MB es $y_2 - y_1$ por tener sus extremos la misma abscisa.

La distancia entre los puntos A y B , que en lo sucesivo llamaremos $d_{(A,B)}$, la podemos calcular utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$d_{(A,B)} = \sqrt{AM^2 + MB^2}$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2^G)$$

El doble signo de la raíz cuadrada nos da las dos distancias dirigidas AB y BA . En muchos problemas de Geometría analítica lo único que interesa es conocer la longitud del segmento AB ; en esos casos trabajaremos exclusivamente con el valor positivo de la raíz.

Ejemplo 2

Determinar la longitud del segmento cuyos extremos son $M(-3,1)$ y $N(5,13)$.

Utilizando la relación (2^G) tenemos:

$$\begin{aligned} d_{(M,N)} &= \sqrt{(5+3)^2 + (13-1)^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} \\ &= \boxed{4\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Ejercicio 89

Dados los puntos $A(-2,4)$; $B(3,8)$; $C(7,5)$; $D(11,-7)$; $E(-5,-2)$; $F(-3,0)$ y el origen $O(0,0)$ del sistema, calcular la longitud de los siguientes segmentos:

- 1) AB
- 2) AC
- 3) AD
- 4) AE
- 5) AF
- 6) AO
- 7) BC

- 8) BD
- 9) BE
- 10) BF
- 11) BO
- 12) CD
- 13) CE
- 14) CF

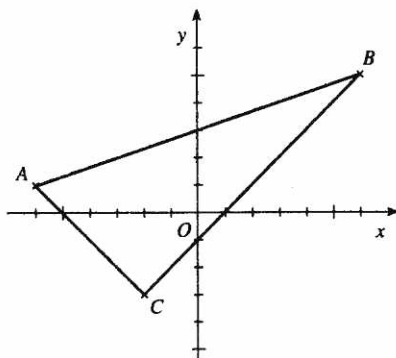
- 15) CO
- 16) DE
- 17) DF
- 18) DO
- 19) EF
- 20) EO
- 21) FO

Ejemplo 3

Demostrar que el triángulo cuyos vértices son $A(-6,1)$; $B(6,5)$ y $C(-2,-3)$ es rectángulo y calcular su área y su perímetro.

En la solución de problemas de Geometría analítica es muy conveniente, siempre que sea posible, hacer un gráfico con los datos que se dan.

Al lado aparece un gráfico con los datos de este ejemplo.



Para que un triángulo sea rectángulo debe satisfacer el Teorema de Pitágoras, es decir, el cuadrado del mayor de sus lados debe ser igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.

Calculamos, pues, la longitud de cada uno de los lados:

Cálculo de AB : la longitud del segmento AB es igual a la distancia que separa los puntos A y B :

$$\begin{aligned} AB &= d_{(A,B)} = \sqrt{(6+6)^2 + (5-1)^2} \\ &= \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

Cálculo de BC :

$$\begin{aligned} BC &= d_{(B,C)} = \sqrt{(-2-6)^2 + (-3-5)^2} \\ &= \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

Cálculo de CA :

$$\begin{aligned} CA &= d_{(C,A)} = \sqrt{(-6+2)^2 + (-3-1)^2} \\ &= \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

El lado mayor es AB . Su cuadrado es:

$$AB^2 = \sqrt{160}^2 = 160$$

La suma de los cuadrados de los otros dos lados es:

$$BC^2 + CA^2 = \sqrt{128}^2 + \sqrt{32}^2 = 128 + 32 = 160$$

Concluimos, por tanto:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 \Rightarrow \Delta_{ABC} \text{ es rectángulo}$$

El problema pide, además, el área y el perímetro.

El área del triángulo rectángulo es igual al semiproducto de los catetos:

$$A = \frac{BC \times CA}{2} = \frac{8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}}{2}$$

$$A = 32$$

El perímetro de cualquier polígono es la suma de sus lados:

$$P = AB + BC + CA = 4\sqrt{5} + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{2}$$

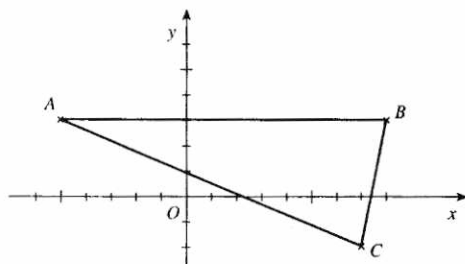
$$P = 4\sqrt{5} + 12\sqrt{2}$$

Ejemplo 4

Demostrar que el triángulo cuyos vértices son $A(-5,3)$; $B(8,3)$ y $C(7,-2)$ es un triángulo isósceles.

Hacemos un gráfico con los datos del problema.

Para que un triángulo sea isósceles basta con que dos de sus lados sean iguales. Por la figura, esos dos lados deben ser AB y CA .



Cálculo de AB : como A y B tienen igual ordenada, la distancia que los separa será igual a la diferencia de sus abscisas:

$$AB = d_{(A,B)} = x_B - x_A = 8 - (-5) = 13$$

Cálculo de CA :

$$\begin{aligned} CA &= d_{(C,A)} = \sqrt{(-5-7)^2 + (3+2)^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \end{aligned}$$

Conclusión:

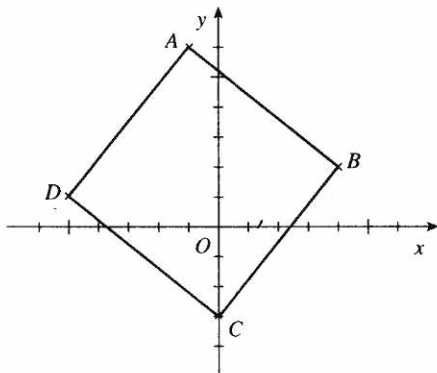
$$AB = CA \Rightarrow \Delta_{ABC} \text{ es isósceles}$$

Ejemplo 5

Mostrar que los puntos $A(-1,6)$; $B(4,2)$; $C(0,-3)$ y $D(-5,1)$ son los vértices de un cuadrado.

Hacemos un gráfico con los datos del problema.

Mostraremos primero que los cuatro lados tienen igual longitud. Esta condición es necesaria; sin embargo no es suficiente, pues todo rombo tiene los cuatro lados iguales. Para que nuestro polígono sea un cuadrado es necesario que sus diagonales también sean iguales entre sí. Tendremos que demostrar esto adicionalmente.



Cálculo de AB:

$$\begin{aligned} AB &= d_{(A,B)} \\ &= \sqrt{(4+1)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{25+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

Cálculo de BC:

$$\begin{aligned} BC &= d_{(B,C)} \\ &= \sqrt{(0-4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{16+25} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

Cálculo de CD:

$$\begin{aligned} CD &= d_{(C,D)} \\ &= \sqrt{(-5-0)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{25+16} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

Cálculo de DA:

$$\begin{aligned} DA &= d_{(D,A)} \\ &= \sqrt{(-1+5)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{16+25} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

Cálculo de AC:

$$\begin{aligned} AC &= d_{(A,C)} \\ &= \sqrt{(0+1)^2 + (-3-6)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82} \end{aligned}$$

Cálculo de BD:

$$\begin{aligned} BD &= d_{(B,D)} \\ &= \sqrt{(-5-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{81+1} = \sqrt{82} \end{aligned}$$

Conclusión:

$\left. \begin{aligned} AB &= BC = CD = DA; \\ AC &= BD \end{aligned} \right\} \Rightarrow ABCD \text{ es cuadrado}$
--

Ejemplo 6

Determinar la abscisa de un punto P de ordenada 4 sabiendo que equidista de los puntos $A(-6, -3)$ y $B(5, 0)$.

Sabemos que la ordenada de P es 4. Podemos, pues, tomar para P las coordenadas $(x, 4)$.

El enunciado del problema nos dice que P equidista de A y B , es decir, que:

$$d_{(P,A)} = d_{(P,B)}$$

Calculando las distancias:

$$\sqrt{(-6-x)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{(5-x)^2 + (0-4)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y resolviendo:

$$36 + 12x + x^2 + 49 = 25 - 10x + x^2 + 16$$

$$22x = -44$$

De donde la abscisa buscada es:

$$x = -2$$

Ejemplo 7

Determinar las coordenadas del punto P del eje de ordenadas que equidista de los puntos $M(2, 4)$ y $N(-7, -1)$.

Si el punto P está situado sobre el eje de ordenadas, su abscisa es cero y sus coordenadas son $P(0, y)$.

Sabemos, además, que P equidista de M y N . Por tanto:

$$d_{(P,M)} = d_{(P,N)}$$

Calculando las distancias y resolviendo:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(-7-0)^2 + (-1-y)^2}$$

$$4 + 16 - 8y + y^2 = 49 + 1 + 2y + y^2$$

$$-10y = 30$$

La ordenada de P es:

$$y = -3$$

y sus coordenadas:

$$P(0, -3)$$

Ejemplo 8

Determinar las coordenadas del punto P que equidista de los puntos $A(-4, 2)$; $B(3, 7)$ y $C(1, -5)$.

Llamaremos (x, y) las coordenadas de P .

Por el enunciado del problema sabemos que:

$$d_{(P,A)} = d_{(P,B)} = d_{(P,C)}$$

Calculando las distancias:

$$\sqrt{(-4-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (7-y)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (-5-y)^2}$$

Elevando al cuadrado cada miembro de la triple igualdad y desarrollando:

$$16 + 8x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = 9 - 6x + x^2 + 49 - 14y + y^2 = 1 - 2x + x^2 + 25 + 10y + y^2$$

Reduciendo términos semejantes en cada miembro:

$$x^2 + 8x + y^2 - 4y + 20 = x^2 - 6x + y^2 - 14y + 58 = x^2 - 2x + y^2 + 10y + 26$$

Comparando los dos primeros miembros de la igualdad y reduciendo términos:

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + y^2 - 4y + 20 &= x^2 - 6x + y^2 - 14y + 58 \\ 14x + 10y &= 38 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$7x + 5y = 19 \quad (1)$$

Comparando ahora el segundo y el tercer miembro de la igualdad:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 - 14y + 58 &= x^2 - 2x + y^2 + 10y + 26 \\ -4x - 24y &= -32 \end{aligned}$$

Simplificando:

$$-x - 6y = -8 \quad (2)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (1) y (2):

$$\begin{cases} 7x + 5y = 19 \\ -x - 6y = -8 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$x = 2 \quad y = 1$$

y las coordenadas de P:

$$P(2,1)$$

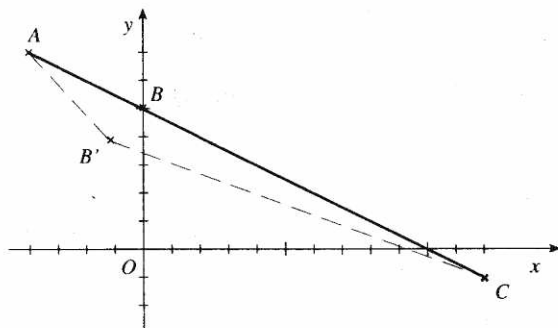
Ejemplo 9

Demostrar que los puntos $A(-4,7)$; $B(0,5)$ y $C(12,-1)$ son colineales.

Hacemos un gráfico con los datos del problema.

Demostraremos que los tres puntos son colineales si $AB + BC = AC$.

Obsérvese que si el punto B no está sobre la recta AC (para visualizarlo mejor hemos señalado en el gráfico el punto B') la igualdad anterior deja de ser cierta, pues $AB + B'C \neq AC$.



Procedemos:

Cálculo de AB :

$$\begin{aligned} AB &= d_{(A,B)} \\ &= \sqrt{(0+4)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Cálculo de BC :

$$\begin{aligned} BC &= d_{(B,C)} \\ &= \sqrt{(12-0)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{144+36} \\ &= \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

Cálculo de AC :

$$\begin{aligned} AC &= d_{(A,C)} \\ &= \sqrt{(12+4)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{256+64} \\ &= \sqrt{320} = 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

Conclusión:

$$AB + BC = AC \Rightarrow A, B \text{ y } C \text{ son colineales}$$

Ejemplo 10

Determinar las coordenadas de un punto P de abscisa -2 sabiendo que dista $3\sqrt{13}$ unidades del punto $M(4,6)$.

Por los datos del problema sabemos que:

$$d_{(P,M)} = 3\sqrt{13}$$

Calculando la distancia:

$$\sqrt{(4+2)^2 + (6-y)^2} = 3\sqrt{13}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros y resolviendo:

$$36 + 36 - 12y + y^2 = 117$$

$$y^2 - 12y - 45 = 0$$

$$(y-15)(y+3) = 0$$

De donde:

$$y_1 = 15$$

$$y_2 = -3$$

El ejercicio tiene dos soluciones y las coordenadas de los puntos que satisfacen las condiciones del problema:

$$P_1(-2, 15)$$

$$P_2(-2, -3)$$

Ejemplo 11

¿Qué condición algebraica debe satisfacer un punto $P(x,y)$ para que su distancia al punto $A(3,-4)$ no sea mayor de tres unidades?

La distancia entre los puntos P y A es:

$$d_{(P,A)} = \sqrt{(3-x)^2 + (-4-y)^2}$$

La condición que se impone es que esta distancia no debe ser mayor que 3:

$$d_{(P,A)} \leq 3$$

Sustituyendo:

$$\sqrt{(3-x)^2 + (-4-y)^2} \leq 3$$

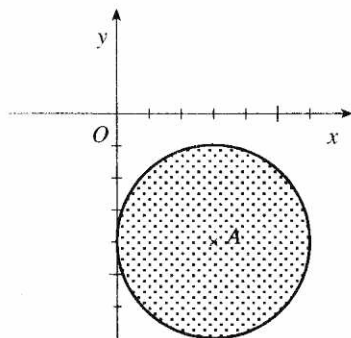
Siendo siempre positiva la cantidad subradical, podemos elevar:

$$(3-x)^2 + (-4-y)^2 \leq 9$$

Dado que $(b-a)^2$ y $(a-b)^2$ son equivalentes y que $(-a-b)^2$ es igual a $(a+b)^2$ tenemos que la condición que debe satisfacer el punto es:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 9$$

Si queremos tener una visión más clara de esos puntos, podemos señalar el punto $A(3, -4)$ en un gráfico. Los puntos que están, en cualquier dirección, a una distancia menor o igual que 3 son los que pertenecen a un círculo con centro en A y radio de 3 unidades.



Ejemplo 12

¿Cuál es la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto del plano que equidiste de los puntos $M(-3, 5)$ y $N(3, -7)$?

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de los que satisfacen la condición.

Para que este punto equidiste de M y N debe cumplirse que:

$$d_{(P,M)} = d_{(P,N)}$$

Es decir, que:

$$\sqrt{(-3-x)^2 + (5-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (-7-y)^2}$$

Elevando y reduciendo términos semejantes:

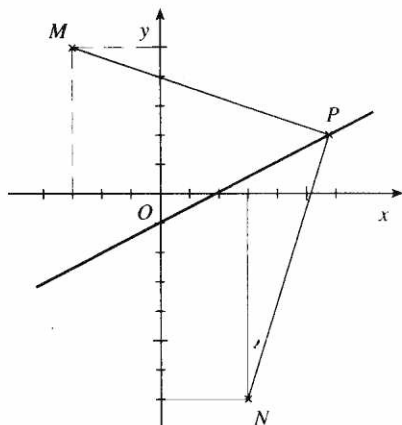
$$9 + 6x + x^2 + 25 - 10y + y^2 = 9 - 6x + x^2 + 49 + 14y + y^2$$

$$12x - 24y - 24 = 0$$

Simplificando:

$$x - 2y - 2 = 0$$

Gráficamente, los puntos que están a igual distancia de M y N pertenecen a la recta cuya ecuación obtuvimos antes y que es la mediatriz del segmento MN .



Ejercicio 90

Calcular el perímetro de los triángulos cuyos vértices son:

- 1) $A(-3,1)$; $B(1,4)$; $C(2,-6)$
- 2) $A(2,3)$; $B(\frac{5}{2}, -7)$; $C(-\frac{1}{2}, -3)$

Demostrar que son isósceles los triángulos cuyos vértices son:

- 3) $A(2,6)$; $B(5,10)$ y $C(1,7)$
- 4) $A(2,0)$; $B(6,0)$ y $C(4,4)$
- 5) $A(2,-8)$; $B(-4,-2)$ y $C(6,2)$
- 6) $A(6,7)$; $B(-8,-1)$ y $C(-2,-7)$
- 7) $A(-\frac{7}{2}, 2)$; $B(\frac{5}{2}, 6)$; $C(-\frac{3}{2}, 0)$
- 8) $A(-3, 1 + \sqrt{2})$; $B(3, 5 + \sqrt{2})$; $C(-1, -1 + \sqrt{2})$

Demostrar que los triángulos cuyos vértices se dan a continuación son rectángulos y calcular su área:

- 9) $A(10,5)$; $B(3,2)$; $C(6,-5)$
- 10) $A(3,-2)$; $B(-2,3)$; $C(0,4)$
- 11) $A(-2,8)$; $B(-6,1)$; $C(0,4)$
- 12) $A(7,5)$; $B(7,-3)$; $C(3,1)$
- 13) $A(3,-1)$; $B(2,2)$; $C(-7,-1)$
- 14) $A(-3,1)$; $B(7,-3)$; $C(-5,-4)$

Demostrar que son isósceles y rectángulos los triángulos cuyos vértices son:

- 15) $A(2,7)$; $B(3,-2)$; $C(-2,2)$
- 16) $A(3,1)$; $B(-3,-7)$; $C(-5,7)$

Demstrar que los cuadriláteros cuyos vértices se dan a continuación son paralelogramos:

- 17) $A(-1, -2); B(0,1); C(-3,2); D(-4, -1)$
- 18) $A(-1, -5); B(2,1); C(1,5); D(-2, -1)$
- 19) $A(2,4); B(6,2); C(8,6); D(4,8)$

Demstrar que los vértices que se dan a continuación pertenecen en cada caso a un rombo:

- 20) $A(-1, -3); B(0,0); C(3,1); D(2, -2)$
- 21) $A(1,1); B(2,-4); C(-3, -3); D(-4,2)$
- 22) $A(-10,6); B(-3,4); C(-1, -3); D(-8, -1)$

Demstrar que los vértices que se dan a continuación pertenecen en cada caso a un cuadrado:

- 23) $A(1,4); B(6,2); C(4, -3); D(-1, -1)$
- 24) $A(4,6); B(8,3); C(5, -1); D(1,2)$
- 25) $A(-7, -1); B(0,3); C(4, -4); D(-3, -8)$

Calcular en cada uno de los siguientes casos la distancia entre los puntos cuyas coordenadas se dan:

- 26) $A(2a, -b); B(5a,3b)$
- 27) $C(-m,n); D(3m,9n)$
- 28) $M(x,3); N(3x, -2)$
- 29) $P(m, -3); Q(2,m)$
- 30) $R(a, -3); S(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}a)$

- 31) Determinar las coordenadas del punto P de abscisa 2 que equidista de los puntos $A(-3,4)$ y $B(-1, -4)$.
- 32) Determinar las coordenadas del punto P de ordenada -1 que equidista de los puntos $M(-6,0)$ y $N(2, -8)$.
- 33) Determinar las coordenadas del punto P de abscisa -3 que equidista de los puntos $A(-1,3)$ y $B(2, -4)$.
- 34) Determinar las coordenadas del punto P de ordenada 7 que equidista de los puntos $K(-2, -1)$ y $L(5,8)$.
- 35) Determinar las coordenadas del punto P del eje de abscisas equidistante de los puntos $A(3,4)$ y $B(5,8)$.
- 36) Determinar las coordenadas del punto P del eje de ordenadas equidistante de los puntos $M(2,6)$ y $N(9, -5)$.

Determinar las coordenadas del punto C que equidista de los puntos

- 37) $M(-5,3); N(1,9)$ y $P(9,1)$
- 38) $P(3,3); Q(6,2)$ y $R(8, -2)$

39) $A(4,3)$; $B(2,7)$ y $D(-3, -8)$

Determinar las coordenadas del centro C de la circunferencia que pasa por los puntos

40) $K(2,3)$; $L(4, -1)$ y $M(5,2)$

41) $P(0, -6)$; $Q(1,1)$ y $R(7, -7)$

42) $A(4, -2)$; $B(5, -3)$ y $D(-4, -6)$

Un círculo tiene su centro en $C(3,1)$ y su radio mide 10 unidades. Determinar si los siguientes puntos pertenecen o no al círculo:

43) $A(8,9)$

44) $B(-7,4)$

45) $M(11,7)$

46) $N(7, -7)$

47) $P(-7,0)$

Demostrar en cada uno de los siguientes casos que los puntos cuyas coordenadas se dan son colineales:

48) $A(-2,8)$; $B(0,4)$; $C(3, -2)$

49) $M(-2,3)$; $N(-6,1)$; $P(-10, -1)$

50) $K(-4, -2)$; $L(-1, -\frac{1}{2})$; $M(5, \frac{5}{2})$

51) $R(-\frac{10}{3}, -3)$; $S(-\frac{20}{3}, 2)$; $T(-8,4)$

52) $E(7,4)$; $F(7 - 2\sqrt{5}, 10)$; $G(7 - 5\sqrt{5}, 19)$

53) Determinar la abscisa de un punto P de ordenada 4 que está a 10 unidades de distancia del punto $A(1,-2)$.

54) Determinar la ordenada de un punto P de abscisa 1 que dista 5 unidades del punto $B(-3,2)$.

55) Determinar la abscisa de un punto P de ordenada 8 que dista 13 unidades del punto $C(2,-4)$.

56) Determinar las coordenadas de un punto P sabiendo que su abscisa es 5 y que su distancia al punto $D(-1,3)$ es $2\sqrt{13}$

57) Determinar las coordenadas de un punto P de ordenada 1 sabiendo que la distancia que lo separa del punto $A(3,9)$ es el doble de la que lo separa del punto $B(-3,2)$.

58) Determinar las coordenadas de un punto P de abscisa -3 sabiendo que la distancia que lo separa del punto $A(-4, -1)$ es la mitad de la que lo separa del punto $B(7,6)$.

59) Determinar las coordenadas de un punto P de ordenada -4 sabiendo que la distancia entre P y $A(5,5)$ es tres veces mayor que la distancia entre P y $B(-1, -3)$.

- 60) Determinar las coordenadas de un punto P de ordenada 5 sabiendo que la distancia que lo separa del punto $A(3,3)$ es la mitad de la distancia que separa al punto A de otro punto $B(-1,-7)$.
- 61) Determinar la ordenada de un punto P de abscisa 5 sabiendo que la distancia entre $A(-2,-3)$ y $B(12,-1)$ es el doble de la distancia de A a P .
- 62) Dados los puntos $O(0,0)$; $A(9,-2)$ y $B(2,4)$, demostrar que el ángulo $\angle AOB$ es igual al ángulo $\angle ABO$.
- 63) Dados los puntos $A(2,1)$; $B(7,4)$ y $C(2,7)$ demostrar que el ángulo $\angle BAC$ es igual al ángulo $\angle BCA$.
- 64) Demostrar que en el triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2)$; $B(-1,5)$ y $C(6,-2)$ son iguales los ángulos $\angle ABC$ y $\angle ACB$.
- 65) Demostrar que en el triángulo cuyos vértices son $A(0,1)$; $B(3,7)$ y $C(3+2\sqrt{5}, 2)$ son iguales los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BCA$.
- 66) Demostrar que $K(6,2)$; $L(-2,-4)$; $M(5,-5)$ y $N(-1,3)$ son puntos de una circunferencia cuyo centro es $C(2,-1)$.
- 67) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que esté a 3 unidades de distancia del punto $A(5,-2)$?
- 68) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que su distancia al punto $A(-3,7)$ sea menor que 4?
- 69) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que su distancia al punto $A(3,-4)$ sea de 5 unidades o más?
- 70) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para pertenecer a un círculo que tiene su centro en $C(5,0)$ y cuyo radio mide 7 unidades?
- 71) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ para que no pertenezca al círculo de radio 6 y que tiene su centro en $C(-3,2)$?
- 72) Determinar la condición algebraica que debe satisfacer todo punto situado entre dos circunferencias de centro común $C(3,-2)$, una de ellas con radio de 5 unidades y la otra con radio de 8 unidades.
- 73) Determinar la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto que esté a igual distancia de los puntos $M(5,1)$ y $N(-1,-3)$.
- 74) Determinar la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto que equidiste del origen y del punto $M(4,-5)$.
- 75) Determinar la ecuación algebraica que debe satisfacer todo punto para ser el vértice de un triángulo isósceles cuya base sea el segmento que determinan los puntos $M(7,-1)$ y $N(-3,5)$.
- 76) Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son $A(4,7)$ y $B(-2,-3)$.
- 77) La base de un triángulo isósceles es el segmento determinado por los puntos $M(-3,-8)$ y $N(4,9)$. Determinar las coordenadas del vértice P del triángulo sabiendo que su ordenada es 4.

Coordenadas del punto medio de un segmento

Sean los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ y el punto medio $M(x_M, y_M)$ del segmento P_1P_2 , tal como se muestra en la figura.

Llamaremos A_1, A_M y A_2 a las proyecciones ortogonales de los puntos P_1, M y P_2 sobre el eje de abscisas y B_1, B_M y B_2 a sus proyecciones sobre el eje de ordenadas. Dado que M es el punto medio del segmento P_1P_2 , es cierta la igualdad

$$P_1M = MP_2$$

Entonces es cierta también, por el Teorema de Tales, la igualdad

$$A_1A_M = A_MA_2$$

Como A_1, A_M y A_2 tienen la misma ordenada, la longitud de esos segmentos será igual a la diferencia de sus abscisas. Por tanto

$$x_M - x_1 = x_2 - x_M$$

De donde

$$2x_M = x_1 + x_2$$

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

En forma análoga, trabajando sobre el eje de ordenadas, hallamos que la ordenada del punto medio es

$$y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

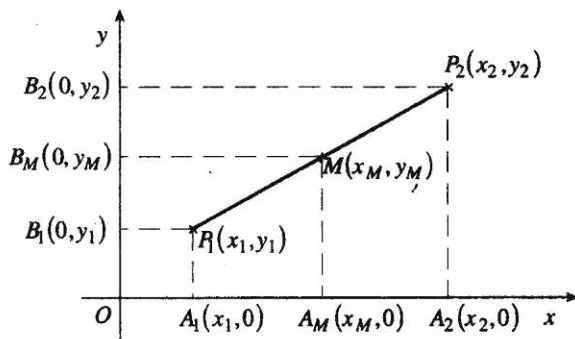
En resumen, las coordenadas del punto medio M del segmento P_1P_2 son:

$$M(x_M, y_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) \quad (3^a)$$

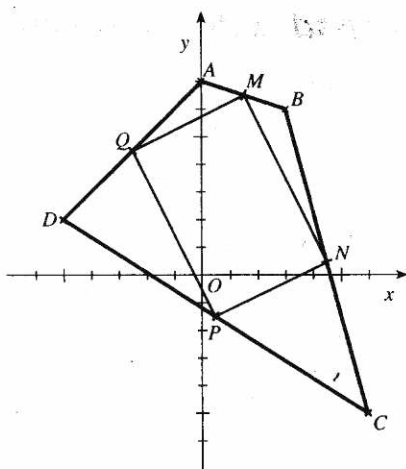
Ejemplo 13

Dados los vértices $A(0,7)$; $B(3,6)$; $C(6,-5)$ y $D(-5,2)$ de un cuadrilátero, demostrar que la figura que se obtiene uniendo los puntos medios de sus lados consecutivos es un paralelogramo.

Construimos un gráfico con los datos.



Designamos por M , N , P y Q los puntos medios de los lados del cuadrilátero y calculamos mediante (3⁶) sus coordenadas:



Coordenadas de M (punto medio de AB):

$$\begin{aligned}x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} & y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \\x_M &= \frac{0 + 3}{2} = \frac{3}{2} & y_M &= \frac{7 + 6}{2} = \frac{13}{2} \\& & & M\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{2}\right)\end{aligned}$$

Coordenadas de N (punto medio de BC):

$$\begin{aligned}x_N &= \frac{3 + 6}{2} = \frac{9}{2} & y_N &= \frac{6 - 5}{2} = \frac{1}{2} \\& & & N\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Coordenadas de P (punto medio de CD):

$$\begin{aligned}x_P &= \frac{6 - 5}{2} = \frac{1}{2} & y_P &= \frac{-5 + 2}{2} = -\frac{3}{2} \\& & & P\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Coordenadas de Q (punto medio de DA):

$$\begin{aligned}x_Q &= \frac{-5 + 0}{2} = -\frac{5}{2} & y_Q &= \frac{2 + 7}{2} = \frac{9}{2} \\& & & Q\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)\end{aligned}$$

Demostraremos ahora que $MNPQ$ es un paralelogramo comprobando que sus lados opuestos tienen igual longitud.

Cálculo de MN :

$$\begin{aligned}MN &= d_{(M, N)} \\&= \sqrt{\left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{13}{2}\right)^2}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

Cálculo de NP:

$$NP = d_{(N,P)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

Cálculo de PQ:

$$PQ = d_{(P,Q)}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

Cálculo de QM:

$$QM = d_{(Q,M)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{13}{2} - \frac{9}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

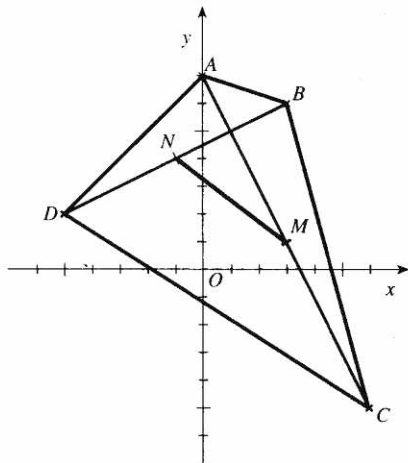
Conclusión:

$$MN = PQ; \quad NP = QM \quad \Rightarrow \quad MNPQ \text{ es paralelogramo}$$

Ejemplo 14

Determinar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero del ejercicio anterior.

Construimos un gráfico y designamos por M y N los puntos medios de las diagonales AC y BD , respectivamente.



Coordenadas de M: (punto medio de AC):

$$x_M = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$y_M = \frac{7-5}{2} = 1$$

$$M(3,1)$$

Coordenadas de N: (punto medio de BD):

$$x_N = \frac{3-5}{2} = -1$$

$$y_N = \frac{6+2}{2} = 4$$

$$N(-1,4)$$

Cálculo de la longitud del segmento MN:

$$MN = d_{(M,N)}$$

$$= \sqrt{(-1-3)^2 + (4-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

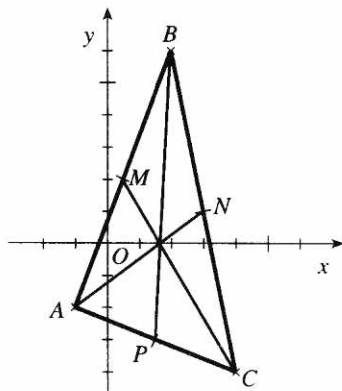
$MN = 5$

Ejemplo 15

Determinar la longitud de las medianas del triángulo cuyos vértices son $A(-1,-2)$; $B(2,6)$ y $C(4,-4)$.

Construimos un gráfico con los datos.

Designamos por M, N y P, respectivamente, los puntos medios de los lados AB, BC y CA.



Coordenadas de M:

$$x_M = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_M = \frac{-2+6}{2} = 2$$

$$M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$$

Coordenadas de N:

$$x_N = \frac{2+4}{2} = 3$$

$$y_N = \frac{6-4}{2} = 1$$

$$N(3,1)$$

Coordenadas de P:

$$x_P = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_P = \frac{-4-2}{2} = -3$$

$$P\left(\frac{3}{2}, -3\right)$$

Cálculo de la mediana AN:

$$\begin{aligned} AN &= d_{(A,N)} \\ &= \sqrt{(3+1)^2 + (1+2)^2} \\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \end{aligned}$$

$$AN = 5$$

Cálculo de la mediana BP:

$$\begin{aligned} BP &= d_{(B,P)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2 + (-3-6)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 81} = \sqrt{\frac{325}{4}} \end{aligned}$$

$$BP = \frac{5\sqrt{13}}{2}$$

Cálculo de la mediana CM:

$$\begin{aligned} CM &= d_{(C,M)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}-4\right)^2 + (2+4)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4} + 36} = \sqrt{\frac{193}{4}} \end{aligned}$$

$$CM = \frac{\sqrt{193}}{2}$$

Ejemplo 16

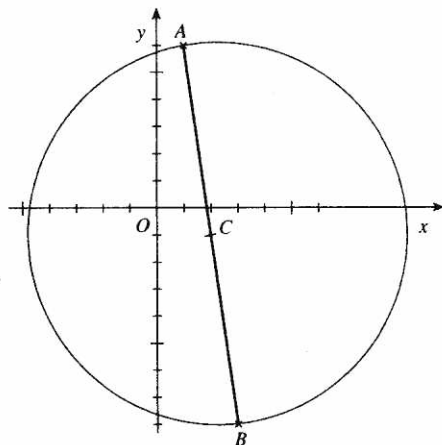
Determinar el centro, el radio, la longitud de la circunferencia y el área del círculo sabiendo que el segmento de extremos $A(1,6)$ y $B(3,-8)$ es un diámetro.

Construimos un gráfico con los datos:

Designamos por C el centro de la circunferencia. Sus coordenadas son las del punto medio del segmento AB :

$$x_C = \frac{1+3}{2} = 2 \quad y_C = \frac{6-8}{2} = -1$$

$$C(2, -1)$$



El radio es igual al segmento AC , al segmento BC o a la mitad del diámetro AB .
Calcularemos AC :

$$\begin{aligned} r &= AC = d_{(A,C)} \\ &= \sqrt{(2-1)^2 + (-1-6)^2} \\ &= \sqrt{1+49} = \sqrt{50} \end{aligned}$$

$$r = 5\sqrt{2}$$

La longitud de la circunferencia es:

$$\begin{aligned} C &= 2\pi r \\ C &= 2\pi \cdot 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$C = 10\sqrt{2}\pi$$

El área del círculo es:

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ A &= \pi \cdot (5\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

$$A = 50\pi$$

Ejemplo 17

$M(\frac{3}{2}, 2)$ es el punto medio del segmento AB . Determinar las coordenadas de A sabiendo que las de B son $B(6,5)$.

Construimos un gráfico con los datos.

Sabemos por la fórmula (3^G) que la abscisa del punto medio de un segmento es la semisuma de las abscisas de los extremos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

En nuestro caso:

$$\frac{3}{2} = \frac{x_A + 6}{2}$$

Despejando x_A :

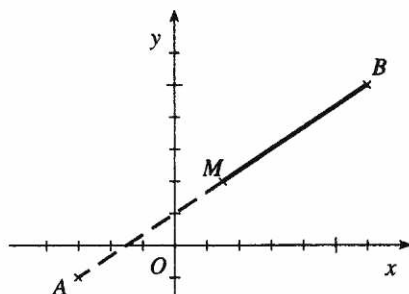
$$x_A = -3$$

En forma análoga determinamos la ordenada:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$2 = \frac{y_A + 5}{2}$$

$$y_A = -1$$



Las coordenadas de A son, pues:

$$A(-3, -1)$$

Ejemplo 18

$M(-2, 3)$ es el punto medio del segmento AB . Determinar la ordenada de A y la abscisa de B , sabiendo que la abscisa de A es -8 y la ordenada de B es 2 .

Del punto A conocemos la abscisa. Sean sus coordenadas:

$$A(-8, y_A)$$

Del punto B conocemos la ordenada. Sean sus coordenadas:

$$B(x_B, 2)$$

Cálculo de la ordenada de A :

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Sustituyendo valores conocidos:

$$3 = \frac{y_A + 2}{2}$$

De donde:

$$y_A = 4$$

En forma análoga calculamos la abscisa de B :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

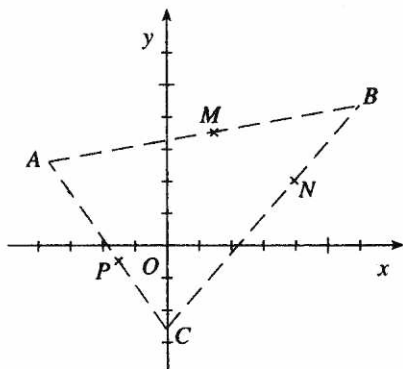
$$-2 = \frac{-8 + x_B}{2}$$

$$x_B = 4$$

Ejemplo 19

$M(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$, $N(4, 2)$ y $P(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ son los puntos medios de los lados de un triángulo. Determinar los vértices del triángulo.

Señalamos en un gráfico los puntos dados y construimos, aproximadamente, el triángulo cuyos vértices A , B y C debemos hallar.



Cálculo de las abscisas: la abscisa de cada punto medio es la semisuma de las abscisas de los extremos del respectivo segmento. Podemos hacer, pues, los siguientes planteamientos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$x_A + x_B = 3 \quad (a)$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2}$$

$$4 = \frac{x_B + x_C}{2}$$

$$x_B + x_C = 8 \quad (b)$$

$$x_P = \frac{x_C + x_A}{2}$$

$$-\frac{3}{2} = \frac{x_C + x_A}{2}$$

$$x_C + x_A = -3 \quad (c)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (a), (b) y (c):

$$\begin{cases} x_A + x_B = 3 & (a) \\ x_B + x_C = 8 & (b) \\ x_A + x_C = -3 & (c) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - (0 + 0 + 0) = 2$$

$$\Delta_{x_A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 3 + 0 - (0 + 0 + 8) = -8$$

$$x_A = \frac{\Delta_{x_A}}{\Delta} = \frac{-8}{2}$$

$$\boxed{x_A = -4}$$

Sustituyendo en (a):

$$-4 + x_B = 3$$

$$\boxed{x_B = 7}$$

Sustituyendo en (b):

$$7 + x_C = 8$$

$$\boxed{x_C = 1}$$

En forma totalmente análoga hacemos el

Cálculo de las ordenadas:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$\frac{7}{2} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$2 = \frac{y_B + y_C}{2}$$

$$y_P = \frac{y_C + y_A}{2}$$

$$2 = \frac{y_C + y_A}{2}$$

$$y_A + y_B = 7 \quad (d) \quad y_B + y_C = 4 \quad (e) \quad y_C + y_A = -1 \quad (f)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (d), (e) y (f):

$$\begin{cases} y_A + y_B = 7 & (d) \\ y_B + y_C = 4 & (e) \\ y_A + y_C = -1 & (f) \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$y_A = 1$$

$$y_B = 6$$

$$y_C = -2$$

Las coordenadas de los tres vértices del triángulo son:

$$A(-4, 1)$$

$$B(7, 6)$$

$$C(1, -2)$$

Ejercicio 91

Determinar las coordenadas del centro de los segmentos cuyos extremos se dan:

- 1) $A(2, 5); B(7, 1)$
- 2) $C(-4, 2); D(6, 5)$
- 3) $E(\frac{1}{2}, -3); F(\frac{11}{2}, 2)$
- 4) $G(3 + \sqrt{5}, -3 + \sqrt{3}); H(5 - 3\sqrt{5}, -5 - \sqrt{3})$
- 5) $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}); L(\frac{1}{3}, -\frac{1}{10})$
- 6) $M(-\frac{3}{4}, 5); N(7, -\frac{5}{2})$
- 7) $P(3a, 7b); Q(5a, -10b)$
- 8) $R(\sqrt{a}, -\sqrt{b}); S(-3\sqrt{a}, -5\sqrt{b})$
- 9) $T(a - b, a); U(b, b - a)$
- 10) $V(3a - b, 2a + b); W(b - 3a, 8a - 5b)$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los cuatro vértices de un cuadrilátero. Demostrar para cada uno de ellos que al unir los puntos medios de los lados consecutivos se obtiene un paralelogramo:

- 11) $A(-2, 5); B(6, 7); C(4, -1); D(2, -3)$
- 12) $A(1, 6); B(7, 2); C(5, -2); D(-5, -4)$
- 13) $A(-1, 5); B(4, 3); C(5, -3); D(-6, 1)$
- 14) $A(-3, -6); B(-4, 2); C(4, 5); D(7, 0)$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los cuatro vértices de un cuadrilátero. Determinar para cada uno de ellos la longitud del segmento que une los puntos medios de sus diagonales:

- 15) $A(-3, -1); B(-1, 5); C(5, 3); D(7, -5)$

- 16) $A(-2, 7)$; $B(3, 4)$; $C(0, -5)$; $D(-7, 2)$
 17) $A(-5, 3)$; $B(-3, 5)$; $C(8, 2)$; $D(-4, -2)$
 18) $A(5, 7)$; $B(7, 1)$; $C(-1, -5)$; $D(-6, 7)$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los cuatro vértices de un paralelogramo. Determinar para cada uno de ellos los puntos medios de las diagonales y comprobar que son el mismo punto:

- 19) $A(2, 3)$; $B(6, 2)$; $C(-1, -5)$; $D(-5, -4)$
 20) $A(-6, -2)$; $B(-3, 3)$; $C(6, 4)$; $D(3, -1)$
 21) $A(-1, 8)$; $B(2, 7)$; $C(1, -2)$; $D(4, -3)$
 22) $A(7, 7)$; $B(2, 0)$; $C(-3, -1)$; $D(2, 6)$

Determinar en cada uno de los siguientes casos a qué distancia del punto $P(8, -2)$ se encuentra el punto medio de los segmentos cuyos extremos se dan:

- 23) $A(-2, 0)$; $B(10, 2)$
 24) $C(-5, -2)$; $D(-3, 8)$
 25) $M(-2, 9)$; $N(6, -5)$
 26) $M(-5, 8)$; $N(1, 9)$

En cada uno de los siguientes ejercicios, calcular la longitud de las tres medianas de los triángulos cuyos vértices se dan:

- 27) $A(-6, 0)$; $B(-2, 10)$; $C(4, -1)$
 28) $A(4, 6)$; $B(1, -1)$; $C(-1, 7)$

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los vértices de un triángulo. Hallar en cada caso el punto medio de los lados AB y BC y comprobar que la longitud del segmento que los une es igual a la mitad del lado CA :

- 29) $A(-1, 5)$; $B(7, 1)$; $C(3, -3)$
 30) $A(3, 4)$; $B(1, -5)$; $C(-4, 1)$
 31) $A(1 - \sqrt{5}, 3)$; $B(2 + 2\sqrt{5}, 5)$; $C(3 - \sqrt{5}, -7)$

Demostrar en los siguientes ejercicios que el perímetro de los triángulos cuyos vértices se dan es el doble del perímetro del triángulo que forman los puntos medios de los lados:

- 32) $A(-2, 6)$; $B(8, 4)$; $C(2, -10)$
 33) $A(-\frac{1}{2}, 4)$; $B(-\frac{5}{2}, 3)$; $C(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$

Determinar en los siguientes ejercicios las coordenadas del centro, el área del círculo y la longitud de la circunferencia, sabiendo que los puntos que se dan son los extremos de un diámetro:

- 34) $A(-5, 1); B(5, -3)$
- 35) $A(2, 5); B(-4, -3)$
- 36) $A(-2, 5); B(4, 2)$
- 37) $A(\sqrt{3}, -4); B(3\sqrt{2}, 7)$

En los siguientes ejercicios M es el punto medio del segmento AB . Se dan en cada caso las coordenadas de M y las de uno de los extremos. Hallar las del otro:

- 38) $A(-3, -3); M(-1, 2)$
- 39) $B(2, -1); M(-2, \frac{3}{2})$
- 40) $A(5, 9); M(8, \frac{7}{2})$
- 41) $B(3 + 7\sqrt{5}, 2 - \sqrt{3}); M(\frac{-1+8\sqrt{5}}{2}, 6)$
- 42) $A(3a - b, a - 5b); M(4a, \frac{5a}{2})$
- 43) $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}); M(\frac{1}{12}, \frac{1}{3})$

En los siguientes ejercicios M es el punto medio del segmento AB . Calcular la coordenada faltante de cada uno de los extremos con los datos que se dan:

- 44) $M(5, 2)$; la abscisa de A es 3 y la ordenada de B es -1
- 45) $M(-\frac{5}{2}, -2)$; la ordenada de A es 2 y la abscisa de B es 2
- 46) $M(\frac{b}{2}, 2a)$; la abscisa de A es $3a$ y la ordenada de B es $3a + b$
- 47) $M(2\sqrt{2}, \sqrt{3})$; la ordenada de A es $2\sqrt{3}$ y la abscisa de B es $4\sqrt{2}$

M , N y P son, en los ejercicios que siguen, los puntos medios de los lados de un triángulo. Determinar los vértices del triángulo:

- 48) $M(3, -1); N(-1, 2); P(1, 5)$
- 49) $M(3, 2); N(-1, -2); P(5, -4)$
- 50) $M(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}); N(-\frac{3}{2}, -2); P(2, \frac{3}{2})$

En los ejercicios que siguen, A y B son dos vértices consecutivos de un paralelogramo y M el punto de intersección de sus diagonales. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices:

- 51) $A(-1, -4); B(-3, 4); M(1, 1)$
- 52) $A(4, 2); B(5, 7); M(\frac{1}{2}, 3)$
- 53) $A(-3, 5); B(1, 7); M(1, 1)$

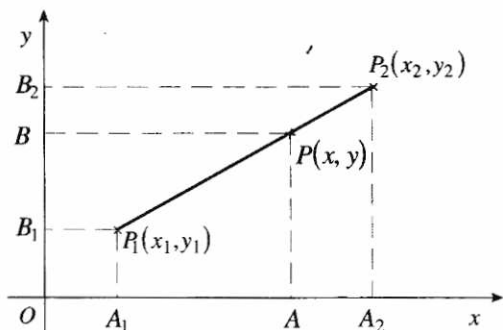
- 54) Del punto $A(-1, 4)$ se ha trazado un segmento al punto $B(3, -\frac{3}{2})$. ¿Hasta qué punto es necesario prolongarlo en la misma dirección para que se duplique su longitud?
- 55) Demostrar que el triángulo que resulta de unir los puntos medios del triángulo de vértices $A(-5, -2)$; $B(3, 6)$ y $C(7, 2)$ es rectángulo.

Punto que divide un segmento en una razón dada

En la figura se muestra un segmento P_1P_2 y un punto P que lo divide en dos porciones. Se muestran también las proyecciones ortogonales de los tres puntos sobre cada uno de los ejes coordenados.

La relación o razón entre las dos porciones que determina P sobre el segmento P_1P_2 es

$$\frac{P_1P}{PP_2}$$



Por el Teorema de Tales sabemos que esa relación es igual a la de las porciones que las proyecciones determinan sobre los ejes coordenados, es decir que

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{A_1A}{AA_2} = \frac{B_1B}{BB_2}$$

Si llamamos $\lambda^\dagger$ a la relación, es decir, al número que resulta de la división, tendremos que

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{A_1A}{AA_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \lambda$$

Las longitudes de los segmentos de la expresión anterior son:

$$A_1A = x - x_1$$

$$B_1B = y - y_1$$

$$AA_2 = x_2 - x$$

$$BB_2 = y_2 - y$$

Sustituyendo tenemos:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$$

Tomando el segundo y el último miembro de la igualdad anterior y despejando x tenemos que

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$$

Repetiendo el mismo proceso con los dos últimos miembros de la igualdad, obtenemos que

[†] λ es la letra griega correspondiente a nuestra ele. Se lee "lambda".

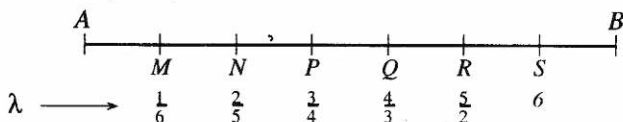
$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

En resumen, las coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada son

$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \right) \quad (4^G)$$

La determinación de la razón λ en los casos en que se desea dividir un segmento en partes iguales se hace siempre dividiendo la porción que va desde el origen del segmento hasta el punto de división entre la que va desde ese punto al extremo del segmento.

Por ejemplo, si queremos dividir un segmento AB en siete partes iguales, λ tomará un valor distinto para cada uno de los seis puntos de división. En la siguiente figura se muestra el segmento AB , los seis puntos de división ($M, N, \dots, S$) y, debajo de cada uno de ellos, el valor de λ para ese punto:

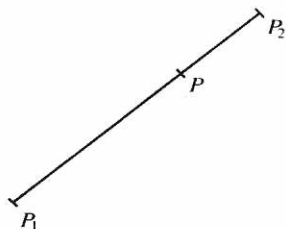


La razón λ puede ser negativa si el punto P es externo al segmento P_1P_2 .

En la figura, por ejemplo, la relación

$$\lambda = \frac{P_1P}{PP_2}$$

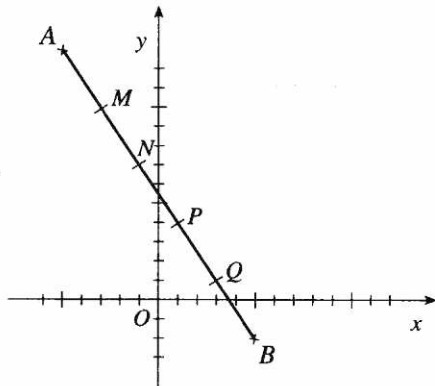
es negativa, pues P_1P y PP_2 tienen sentido opuesto.



Ejemplo 20

Determinar las coordenadas de los cuatro puntos que dividen el segmento AB en cinco partes iguales, siendo $A(-5, 13)$ y $B(5, -2)$.

Construimos un gráfico con los datos que se dan y designamos por M, N, P y Q los puntos que dividen el segmento en cinco partes.



Coordenadas de M:

$$(\lambda = \frac{1}{4})$$

Aplicando (4^o):

$$x = \frac{-5 + \frac{1}{4} \cdot 5}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$y = \frac{13 + \frac{1}{4} \cdot (-2)}{1 + \frac{1}{4}}$$

Multiplicando numerador y denominador por 4:

$$x = \frac{-20 + 5}{4 + 1}$$

$$y = \frac{52 - 2}{4 + 1}$$

$$x = -3$$

$$y = 10$$

$$M(-3, 10)$$

Coordenadas de N:

$$(\lambda = \frac{2}{3})$$

$$x = \frac{-5 + \frac{2}{3} \cdot 5}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$y = \frac{13 + \frac{2}{3} \cdot (-2)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{-15 + 10}{3 + 2}$$

$$y = \frac{39 - 4}{3 + 2}$$

$$x = -1$$

$$y = 7$$

$$N(-1, 7)$$

Coordenadas de P:

$$(\lambda = \frac{3}{2})$$

$$x = \frac{-5 + \frac{3}{2} \cdot 5}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{13 + \frac{3}{2} \cdot (-2)}{1 + \frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{-10 + 15}{2 + 3}$$

$$y = \frac{26 - 6}{2 + 3}$$

$$x = 1$$

$$y = 4$$

$$P(1, 4)$$

Coordenadas de Q:

$$(\lambda = 4)$$

$$x = \frac{-5 + 4 \cdot 5}{1 + 4}$$

$$y = \frac{13 + 4 \cdot (-2)}{1 + 4}$$

$$x = 3$$

$$y = 1$$

$$Q(3, 1)$$

Nota: Si colocamos en columna las coordenadas de los extremos y de los puntos que dividen el segmento del ejemplo anterior, resulta evidente que las abscisas se incrementan en 2 unidades de un punto al siguiente y las ordenadas se incrementan en -3 unidades.

$$A(-5, 13)$$

$$M(-3, 10)$$

$$N(-1, 7)$$

$$P(1, 4)$$

$$Q(3, 1)$$

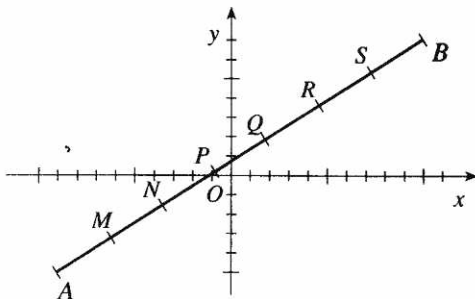
$$B(5, -2)$$

Esta propiedad puede ahorrarnos trabajo al momento de hallar todos los puntos de sección de un segmento (Véase el ejemplo que sigue).

Ejemplo 21

Dados los puntos $A(-9, -5)$ y $B(10, 7)$, determinar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en 7 partes iguales.

Construimos un gráfico con los datos y señalamos los seis puntos que dividen el segmento en siete partes iguales.



Coordenadas de M :

$$\left(\lambda = \frac{1}{6}\right)$$

$$x = \frac{-9 + \frac{1}{6} \cdot 10}{1 + \frac{1}{6}}$$

$$y = \frac{-5 + \frac{1}{6} \cdot 7}{1 + \frac{1}{6}}$$

$$x = \frac{-54 + 10}{6 + 1}$$

$$y = \frac{-30 + 7}{6 + 1}$$

$$x = -\frac{44}{7}$$

$$y = -\frac{23}{7}$$

$$M\left(-\frac{44}{7}, -\frac{23}{7}\right)$$

Calculamos los incrementos en cada una de las coordenadas.

En las abscisas:

$$\Delta_x = -\frac{44}{7} - (-9) = \frac{19}{7}$$

En las ordenadas:

$$\Delta_y = -\frac{23}{7} - (-5) = \frac{12}{7}$$

Podemos, a partir de las coordenadas de M , conocer la de los otros puntos incrementando las abscisas en $\frac{19}{7}$ y las ordenadas en $\frac{12}{7}$:

Coordenadas de N:

$$x_N = x_M + \Delta_x = -\frac{44}{7} + \frac{19}{7} = -\frac{25}{7}$$

$$y_N = y_M + \Delta_y = -\frac{23}{7} + \frac{12}{7} = -\frac{11}{7}$$

$$N\left(-\frac{25}{7}, -\frac{11}{7}\right)$$

Coordenadas de P:

$$x_P = -\frac{25}{7} + \frac{19}{7} = -\frac{6}{7}$$

$$y_P = -\frac{11}{7} + \frac{12}{7} = \frac{1}{7}$$

$$P\left(-\frac{6}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

Coordenadas de Q:

$$x_Q = -\frac{6}{7} + \frac{19}{7} = \frac{13}{7}$$

$$y_Q = \frac{1}{7} + \frac{12}{7} = \frac{13}{7}$$

$$Q\left(\frac{13}{7}, \frac{13}{7}\right)$$

Coordenadas de R:

$$x_R = \frac{13}{7} + \frac{19}{7} = \frac{32}{7}$$

$$y_R = \frac{13}{7} + \frac{12}{7} = \frac{25}{7}$$

$$R\left(\frac{32}{7}, \frac{25}{7}\right)$$

Coordenadas de S:

$$x_S = \frac{32}{7} + \frac{19}{7} = \frac{51}{7}$$

$$y_S = \frac{25}{7} + \frac{12}{7} = \frac{37}{7}$$

$$S\left(\frac{51}{7}, \frac{37}{7}\right)$$

Al incrementar las coordenadas de S deben resultar las del extremo B. Las recalculamos para verificar la exactitud del proceso:

$$x_B = \frac{51}{7} + \frac{19}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

$$y_B = \frac{37}{7} + \frac{12}{7} = \frac{49}{7} = 7$$

$$B(10, 7)$$

Ejemplo 22

Hallar las coordenadas de un punto P que divida el segmento determinado por A(2,6) y B(7,-4) en la relación $\lambda = \frac{2}{3}$.

Utilizando (4^o):

$$x = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 7}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$y = \frac{6 + \frac{2}{3} \cdot (-4)}{1 + \frac{2}{3}}$$

$$x = \frac{6+14}{3+2}$$

$$y = \frac{18-8}{3+2}$$

$$x = 4$$

$$y = 2$$

El punto pedido es:

$$P(4, 2)$$

Ejemplo 23

Hallar las coordenadas del punto P que divide el segmento cuyos extremos son A(0,-1) y B(5,-6) en la relación $\lambda = -\frac{8}{3}$.

Utilizando (4^o):

$$x = \frac{0 - \frac{8}{3} \cdot 5}{1 - \frac{8}{3}}$$

$$y = \frac{-1 - \frac{8}{3} \cdot (-6)}{1 - \frac{8}{3}}$$

$$x = \frac{-40}{3-8}$$

$$x = 8$$

$$y = \frac{-3+48}{3-8}$$

$$y = -9$$

El punto pedido es:

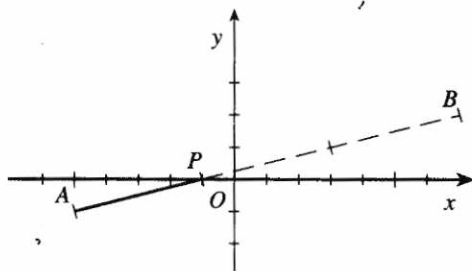
$$P(8, -9)$$

Ejemplo 24

En el segmento AB , P es el punto de trisección más cercano a A . Determinar las coordenadas de B sabiendo que las de los otros puntos son $A(-5, -1)$ y $P(-1, 0)$.

Si P es el primer punto de trisección la razón en la que divide al segmento AB es

$$\lambda = \frac{1}{2}.$$



Utilizando (4⁶):

$$-1 = \frac{-5 + \frac{1}{2}x_B}{1 + \frac{1}{2}}$$

$$0 = \frac{-1 + \frac{1}{2}y_B}{1 + \frac{1}{2}}$$

Despejando las incógnitas:

$$-1 = \frac{-10 + x_B}{2 + 1}$$

$$0 = -2 + y_B$$

$$x_B = 7$$

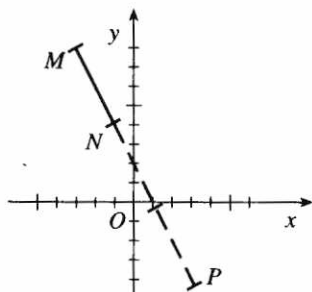
$$y_B = 2$$

$$B(7, 2)$$

Ejemplo 25

Se traza un segmento desde el punto $M(-3, 8)$ hasta el punto $N(-1, 4)$. ¿Hasta qué punto debe moverse el extremo en esa misma dirección para que el segmento a) se triplique? b) se reduzca en un 25%? c) aumente en un 60%?

a) Llamaremos P al extremo del segmento prolongado. El problema es idéntico al del ejemplo 24, pero en esta oportunidad lo plantearemos de otra forma.



Sabemos que

$$\lambda = \frac{MP}{PN}$$

En nuestro caso será:

$$\lambda = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

(Obsérvese que MP y PN tienen distinto signo por ser segmentos orientados con sentidos opuestos).

Utilizando (4^c):

$$x = \frac{-3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$y = \frac{8 - \frac{3}{2} \cdot 4}{1 - \frac{3}{2}}$$

$$x = \frac{-6 + 3}{2 - 3}$$

$$y = \frac{16 - 12}{2 - 3}$$

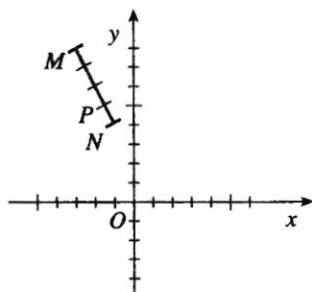
$$x = 3$$

$$y = -4$$

El extremo debe moverse hasta el punto

$$P(3, -4)$$

b) En esta ocasión el segmento debe reducirse en un 25%, es decir, en una cuarta parte. En la figura se muestra el punto P que ocupará el extremo del segmento.



La relación λ para el punto P es:

$$\lambda = \frac{3}{1} = 3$$

Utilizando (4^c):

$$x = \frac{-3 + 3 \cdot (-1)}{1 + 3}$$

$$y = \frac{8 + 3 \cdot 4}{1 + 3}$$

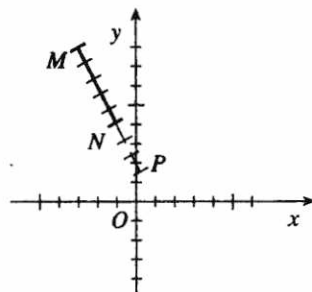
$$x = -\frac{3}{2}$$

$$y = 5$$

El extremo debe moverse hasta el punto

$$P(-\frac{3}{2}, 5)$$

c) El segmento debe aumentar en un 60%, es decir, en tres quintas partes.



La relación para P será:

$$\lambda = \frac{MP}{PN} = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$$

Utilizando (4⁶):

$$x = \frac{-3 - \frac{8}{3} \cdot (-1)}{1 - \frac{8}{3}}$$

$$y = \frac{8 - \frac{8}{3} \cdot 4}{1 - \frac{8}{3}}$$

$$x = \frac{-9 + 8}{3 - 8}$$

$$y = \frac{24 - 32}{3 - 8}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

$$y = \frac{8}{5}$$

El extremo debe moverse hasta el punto:

$$P\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Ejercicio 92

- 1) Determinar las coordenadas de los puntos de trisección del segmento de origen $A(-7,8)$ y extremo $B(2,5)$.
- 2) Determinar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(-4,-6)$ y $B(2,3)$ en seis partes iguales.
- 3) Determinar las coordenadas de los puntos que dividen el segmento de extremos $A(-3,3)$ y $B(5,6)$ en cinco partes iguales.
- 4) Determinar las coordenadas del punto M que divide el segmento de extremos $A(2,-3)$ y $B(7,6)$ en dos porciones cuya relación es 2 a 3.
- 5) Determinar las coordenadas del punto M que divide el segmento de extremos $A(-8,-2)$ y $B(2,3)$ en la razón $-\frac{7}{2}$.
- 6) Determinar las coordenadas del punto M que divide el segmento de extremos $A(-1,-1)$ y $B(3,1)$ en la razón $-\frac{2}{3}$.
- 7) $M(-2, \frac{1}{2})$ es el tercero de los seis puntos que dividen el segmento AB en siete partes iguales. Determinar las coordenadas de B , sabiendo que las de A son $(-5,5)$.
- 8) $M(-2,0)$ es el cuarto de los puntos que dividen el segmento AB en cinco partes iguales. Determinar las coordenadas de A , sabiendo que las de B son $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
- 9) $M(-\frac{9}{2}, \frac{15}{2})$ es el primero de los puntos que dividen el segmento AB en seis partes iguales. Determinar las coordenadas de B , sabiendo que las de A son $(-6,10)$.

Se traza un segmento desde el punto $A(-5,-2)$ hasta el punto $B(5,5)$. ¿Hasta qué punto debe moverse el extremo en esa misma dirección para que el segmento...

- 10) ... aumente en $\frac{2}{3}$?
- 11) ... se reduzca al 75%?
- 12) ... se reduzca en el 75%?

Se traza un segmento desde el punto $M(1,8)$ hasta el punto $N(-1,3)$. ¿Hasta qué punto debe moverse el extremo en esa misma dirección para que el segmento...

- 13) ... se cuadruplique?
- 14) ... se reduzca al 80%?
- 15) ... aumente en un 40%?

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan los puntos A y B (origen y extremo, respectivamente, de un segmento) y el punto M que divide el segmento AB . Determinar en cada caso la razón en que M divide al segmento:

- 16) $A(-3,2)$; $B(5,6)$; $M(-1,3)$
- 17) $A(4,3)$; $B(2,-1)$; $M(-1,-7)$
- 18) $A(-5,1)$; $B(7,-4)$; $M(-\frac{7}{3}, -\frac{1}{9})$
- 19) $A(3,-7)$; $B(1,-1)$; $M(-2,8)$
- 20) $A(7,4)$; $B(-1,0)$; $M(1,1)$
- 21) Hallar las coordenadas del punto M del segmento que une este punto con $A(2,-2)$, sabiendo que el punto $B(-4,1)$ está situado sobre el segmento a una distancia de A igual a las tres quintas partes de la longitud total del segmento.
- 22) Los extremos de un segmento son $A(2,-5)$ y B . Un punto $M(-1,4)$ del segmento dista de A una cuarta parte de la distancia que lo separa del otro extremo B . Determinar las coordenadas de B .
- 23) En el triángulo cuyos vértices son $A(1,1)$; $B(4,7)$ y $C(10,-2)$ búsquese, para cada una de las tres medianas, el punto de trisección más cercano al lado correspondiente. Comprobar que ese punto es común para las tres medianas y que éstas, por tanto, concurren. (El punto en que concurren las tres medianas se llama *baricentro* del triángulo).
- 24) Hágase la misma comprobación del ejercicio anterior para el triángulo cuyos vértices son $A(2,6)$; $B(5,0)$ y $C(-7,-6)$.
- 25) Demostrar que $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ es el baricentro de un triángulo cualquiera de vértices $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$.

Utilizar la fórmula demostrada en el ejercicio 25 para determinar el baricentro G de los triángulos cuyos vértices se dan en los ejercicios que siguen:

- 26) $A(4,-1)$; $B(-3,4)$; $C(2,6)$
- 27) $A(\frac{5}{2}, 7)$; $B(6, \frac{1}{2})$; $C(-7,0)$
- 28) $A(2+3\sqrt{5}, 7)$; $B(10-\sqrt{5}, 1)$; $C(-6-2\sqrt{5}, -4)$
- 29) $A(-7,9)$; $B(3,5)$; $C(0,-4)$

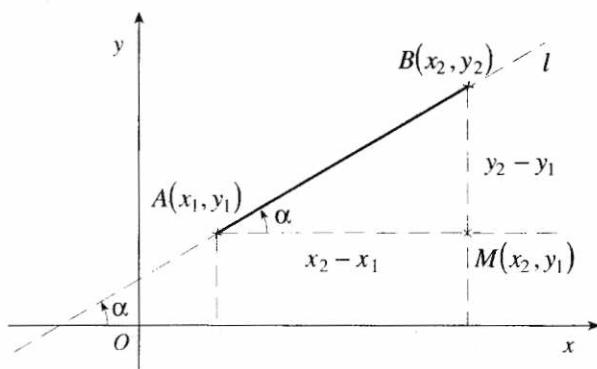
- 30) El baricentro de un triángulo coincide con el origen de un sistema cartesiano. Uno de los vértices está en el eje de abscisas a una distancia de 5 unidades del origen; el otro vértice, sobre el eje de ordenadas a 10 unidades de distancia desde el origen. Hallar las coordenadas del tercer vértice.
- 31) Se conocen los vértices $A(0,5)$ y $B(5,3)$ de un triángulo. Calcular el tercer vértice sabiendo que las coordenadas del baricentro son $G(1,3)$.
- 32) Del triángulo ABC se conocen: el vértice $A(7,1)$, el baricentro $G(3,3)$ y el punto medio del lado AC de coordenadas $M(5,6)$. Hallar las coordenadas de los vértices B y C .
- 33) Del triángulo ABC se conocen: el vértice $B(6, -1)$, el baricentro $G(2,3)$ y el punto medio del lado BC de coordenadas $M(\frac{5}{2}, 0)$. Hallar las coordenadas de los vértices A y C .
- 34) En el triángulo ABC de baricentro en el origen, se conocen los puntos medios de los lados AB y BC . Las coordenadas de estos puntos medios son, respectivamente, $M(3,2)$ y $N(2, -2)$. Determinar las coordenadas de los tres vértices.
- 35) El segmento que une a $A(-2, -1)$ con $B(3,3)$ se prolonga hasta C . Determinar las coordenadas de C sabiendo que $BC = 3AB$.

Pendiente de un segmento

Definiremos como *pendiente* o *coeficiente angular* de un segmento a la tangente del ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas la recta a la que pertenece el segmento.

A la pendiente la designaremos siempre con la letra m .

En la figura, el segmento AB pertenece a la recta l . Ésta forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo α .



De acuerdo con la definición tendremos que

$$m_{(A,B)} = \operatorname{tg} \alpha$$

El ángulo BAM de la figura es igual al que forma la recta l con el eje horizontal (por ser AM paralela al eje de abscisas y por ser BAM y α ángulos correspondientes); $AM = x_2 - x_1$ (distancia entre puntos de igual ordenada) y $MB = y_2 - y_1$ (distancia entre puntos de igual abscisa).

Tendremos, entonces, que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y, en definitiva, que

$$m_{(A,B)} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (5^G)$$

Ejemplo 26

Determinar la pendiente y el ángulo que forma con el eje de abscisas el segmento de extremos $A(3, 7)$ y $B(-1, -2)$.

Utilizando (5^G):

$$m = \frac{-2 - 7}{-1 - 3} = \boxed{\frac{9}{4}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\boxed{\alpha = 66^\circ 2'}$$

Ejemplo 27

Determinar la pendiente y el ángulo que forma con el eje de abscisas el segmento de extremos $A(-2, 6)$ y $B(5, 2)$.

Utilizando (5^G):

$$m = \frac{2 - 6}{5 + 2} = \boxed{-\frac{4}{7}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = m = -\frac{4}{7} = -0,5714$$

La tangente del ángulo es negativa; eso significa que el segmento forma con el semi-eje positivo de abscisas un ángulo obtuso:

$$\alpha = 180^\circ - 29^\circ 44'$$

$$\boxed{\alpha = 150^\circ 16'}$$

Ejemplo 28

Los extremos de un segmento son un punto M de abscisa -1 y el punto $N(4, -3)$. Determinar la ordenada de M sabiendo que el segmento MN forma con el eje de abscisas un ángulo de $157^\circ 30'$.

El punto M tiene coordenadas $(-1, y)$.

El valor de la pendiente del segmento es:

$$\begin{aligned} m &= \operatorname{tg} 157^\circ 30' \\ &= \operatorname{tg}(180^\circ - 22^\circ 30') \\ &= -\operatorname{tg} 22^\circ 30' \\ &= -\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

Utilizando (5^o):

$$\frac{y+3}{-1-4} = -\sqrt{2} + 1$$

Despejando y :

$$y+3 = 5\sqrt{2} - 5$$

$$\boxed{y = 5\sqrt{2} - 8}$$

Ejemplo 29

Demostrar que los puntos $A(-6, 8)$; $B(-3, \frac{7}{2})$ y $C(2, -4)$ son colineales.

Si los puntos dados son colineales, deben pertenecer a la misma recta. La pendiente de esta recta debe ser la misma cualesquiera sean los dos puntos que se tomen para calcularla:

$$m_{(A,B)} = m_{(B,C)} = m_{(A,C)}$$

Basta que calculemos dos de los miembros de la triple igualdad anterior y verifiquemos que son iguales:

$$m_{(A,B)} = \frac{\frac{7}{2} - 8}{-3 - 6} = \frac{-\frac{9}{2}}{3} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{(A,C)} = \frac{-4 - 8}{2 + 6} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

Conclusión:

$$\boxed{m_{(A,B)} = m_{(A,C)} \Rightarrow A, B \text{ y } C \text{ son colineales}}$$

Ejemplo 30

Hallar las coordenadas del punto P que dista $2\sqrt{10}$ unidades de $A(-1, -4)$ y determina con $M(3, -2)$ un segmento de pendiente -2 .

Sean $P(x, y)$ las coordenadas del punto buscado.

Sabemos que

$$d_{(A,P)} = 2\sqrt{10}$$

Calculando la distancia:

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+4)^2} = 2\sqrt{10}$$

Elevando al cuadrado:

$$(x+1)^2 + (y+4)^2 = 40 \quad (\text{a})$$

Sabemos, además, que:

$$m_{(P,M)} = -2$$

$$\frac{-2 - y}{3 - x} = -2$$

$$-2 - y = -6 + 2x$$

$$2x + y - 4 = 0 \quad (\text{b})$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (a) y (b):

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+4)^2 = 40 & (a) \\ 2x + y - 4 = 0 & (b) \end{cases}$$

Despejamos y en la ecuación (b):

$$y = -2x + 4 \quad (c)$$

Sustituimos en (a):

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (-2x+4+4)^2 &= 40 \\ (x+1)^2 + (8-2x)^2 &= 40 \end{aligned}$$

Desarrollando y resolviendo:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + 64 - 32x + 4x^2 &= 40 \\ 5x^2 - 30x + 25 &= 0 \\ x^2 - 6x + 5 &= 0 \\ (x-5)(x-1) &= 0 \\ x_1 = 5 & \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (c) hallamos los correspondientes de y:

$$\begin{aligned} y_1 &= -2 \cdot 5 + 4 = -6 \\ y_2 &= -2 \cdot 1 + 4 = 2 \end{aligned}$$

El problema tiene, pues, dos soluciones:

$$P_1(5, -6)$$

$$P_2(1, 2)$$

Ejemplo 31

El punto P equidista de los puntos $A(-7, 4)$ y $B(2, -1)$. Hallar sus coordenadas sabiendo que el segmento que determina con el punto $Q\left(0, \frac{5\sqrt{3}-9}{3}\right)$ forma un ángulo de 30° con el eje de abscisas.

Por la primera parte del enunciado del problema sabemos que:

$$d_{(P,A)} = d_{(P,B)}$$

Dándole a P las coordenadas (x, y) , calculamos las distancias:

$$\sqrt{(-7-x)^2 + (4-y)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2}$$

Desarrollando y reduciendo a la mínima expresión:

$$\begin{aligned} 49 + 14x + x^2 + 16 - 8y + y^2 &= 4 - 4x + x^2 + 1 + 2y + y^2 \\ 18x - 10y + 60 &= 0 \\ 9x - 5y + 30 &= 0 & (a) \end{aligned}$$

Por otra parte, la pendiente de PQ es:

$$m_{(P,Q)} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Desarrollando:

$$\frac{\frac{5\sqrt{3}-9}{3}-y}{0-x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$-\frac{5\sqrt{3}-9}{3} + y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

Multiplicando la ecuación por 3:

$$-5\sqrt{3} + 9 + 3y = \sqrt{3}x$$

$$\sqrt{3}x - 3y + 5\sqrt{3} - 9 = 0 \quad (b)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (a) y (b):

$$\begin{cases} 9x - 5y + 30 = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y + 5\sqrt{3} - 9 = 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por -5 y sumando miembro a miembro:

$$\begin{cases} 27x - 15y = -90 \\ -5\sqrt{3}x + 15y = 25\sqrt{3} - 45 \end{cases}$$
$$\hline (27 - 5\sqrt{3})x = 25\sqrt{3} - 135$$

$$x = \frac{25\sqrt{3} - 135}{27 - 5\sqrt{3}}$$

Sacando factor común en el numerador:

$$x = \frac{5(5\sqrt{3} - 27)}{27 - 5\sqrt{3}}$$

$$x = -5$$

Sustituyendo en la ecuación (a):

$$9(-5) - 5y + 30 = 0$$

$$-5y = 15$$

$$y = -3$$

Las coordenadas del punto buscado son, pues,

$$P(-5, -3)$$

Ejercicio 93

Determinar la pendiente y el ángulo que forman con el eje de abscisas los segmentos cuyos extremos son:

- 1) $A(4, 1); B(7, 5)$
- 2) $M(-3, 5); N(2, -2)$
- 3) $P(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{3}); Q(\frac{3}{4}, \frac{11}{6})$

4) $R(1, \frac{11}{5})$; $S(\frac{17}{5}, -3)$

5) $A(2, \sqrt{3})$; $B(1, 0)$

6) $C(-1, 4)$; $D(6, -3)$

Determinar la pendiente de cada uno de los tres lados de los triángulos cuyos vértices son:

7) $A(7, 3)$; $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$; $C(0, 8)$

8) $D(-1, 5)$; $E(4, -1)$; $F(-1, 1)$

9) $M(-3, -2)$; $N(6, 3)$; $P(3, -2)$

10) Un extremo del segmento AB es $A(-4, -3)$. Determinar la ordenada de B sabiendo que su abscisa es 2 y que la pendiente de AB es $\frac{9}{5}$.

11) Un extremo del segmento MN es $N(4, -1)$. Determinar la abscisa de M sabiendo que su ordenada es 5 y que la pendiente de MN es $-\frac{12}{5}$.

12) El segmento AB forma con el eje de abscisas un ángulo de 45° . Determinar la ordenada de A si su abscisa es -3 y el otro extremo es $B(4, 11)$.

13) ¿Cuál debe ser la abscisa de un punto B de ordenada 7, si determina con $A(3, -7)$ un segmento que forma un ángulo de 135° con el eje horizontal?

Un segmento tiene como extremos un punto $A(-4, 1)$ y un punto B de ordenada 5. ¿Cuál debe ser la abscisa de B para que el segmento forme con el eje de abscisas un ángulo...

14) ... de 60° ?

15) ... de 120° ?

16) ... de $22^\circ 30'$?

17) ... de 150° ?

18) ... de 15° ?

19) ... de $67^\circ 30'$?

20) ... de 105° ?

Demostrar que los cuadriláteros cuyos vértices se dan en los siguientes ejercicios son paralelogramos:

21) $A(-1, 1)$; $B(-3, -2)$; $C(4, 1)$; $D(6, 4)$

22) $M(0, \frac{3}{2})$; $N(-2, -\frac{3}{2})$; $P(5, \frac{3}{2})$; $Q(7, \frac{9}{2})$

23) $R(0, 0)$; $S(a, 0)$; $T(a + b, c)$; $V(b, c)$

24) Demostrar que la recta que pasa por los puntos $A(-1, 3)$ y $B(5, 6)$ forma con el eje de abscisas un ángulo igual a la mitad del que forma la recta que pasa por $M(-3, -2)$ y $N(0, 2)$.

Demostrar, utilizando el concepto de pendiente, que los tres puntos cuyas coordenadas se dan son colineales:

25) $A(1,1); B(3,2); C(9,5)$

26) $M(-3,8); N(0,-2); P\left(\frac{3}{2}, -7\right)$

27) $R(-5,-4); S\left(-\frac{5}{2}, -3\right); T\left(\frac{15}{2}, 1\right)$

28) $A(-3,-1); B(-3+\sqrt{2}, -1+\sqrt{3}); C(-1, -1+\sqrt{6})$

29) $M(4,5); N(4+2\sqrt{3}, 5-2\sqrt{6}); P(4+12\sqrt{2}, -19)$

En cada uno de los siguientes casos se dan cuatro puntos. Uno de ellos es chimbo: no pertenece a la recta a la que pertenecen los otros tres. Descúbralo, utilizando el concepto de pendiente.

30) $A(-5,1); B(-3,4); C(1,10); D(3,12)$

31) $M(-8,10); N(-4,-4); P(-2,-2); Q(2,-10)$

32) $R(-7\sqrt{2}, 9\sqrt{3}); S(-6\sqrt{2}, 7\sqrt{3}); T(2-7\sqrt{2}, 9\sqrt{3}-3\sqrt{6});$
 $V(2\sqrt{6}-7\sqrt{2}, -12+9\sqrt{3})$

Determinar el valor de k para que los tres puntos que se dan sean colineales:

33) $A(0,1); B(2,7); C(6,k)$

34) $D(-1,5); E(k,9); F(5,11)$

35) $K(0,k); L(1,1); M(3,-1)$

36) $P(-1, -2+2\sqrt{6}); Q(k, -2+2\sqrt{3}); R(5,-2)$

37) Un punto P dista 5 unidades del origen de coordenadas y la pendiente de la recta que lo une a $A(6,1)$ es -1 . Determinar sus coordenadas.

38) Un punto P está a una distancia de $2\sqrt{13}$ del punto $A(-3,1)$ y la recta que lo une a $B(-2,4)$ forma con el eje de abscisas un ángulo de 45° . Determinar las coordenadas de P .

39) Hallar las coordenadas del punto P sabiendo que dista 7 unidades del origen y que determina un segmento de pendiente $\frac{1}{2}$ con el punto $A(3,4)$.

40) Hallar las coordenadas de un punto P , equidistante de los puntos $A(2,1)$ y $B(-4,3)$, que con el punto $Q(1,-1)$ determina un segmento de pendiente $\frac{2}{3}$.

41) Hallar las coordenadas de un punto P sobre la mediatriz del segmento de extremos $A(0,1)$ y $B(3,8)$ que determina con el punto $Q(4,3)$ un segmento de pendiente $-\frac{1}{2}$.

42) El punto P equidista de los puntos $A(2,1)$ y $B(3,2)$ y la recta que lo une al punto $Q(4, 8-8\sqrt{3})$ forma con el eje de abscisas un ángulo de 120° . Hallar las coordenadas de P .

- 43) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por los puntos $A(-2,1)$ y $B(3,7)$?
- 44) ¿Qué condición algebraica debe satisfacer todo punto perteneciente a la recta que pasa por $P(-1,-2)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 75° ?
- 45) Determinar la condición algebraica que debe satisfacer todo punto de la recta de pendiente $-\frac{5}{4}$ que pasa por $A(3,-2)$.

Angulo que forman dos rectas entre sí

Cuando dos rectas l_1 y l_2 se cortan en el plano se forman cuatro ángulos iguales dos a dos. Llamaremos θ_1 al que proviene de la rotación con centro en M que transforma l_1 en l_2 y llamaremos θ_2 al que proviene de la rotación con centro en M que transforma l_2 en l_1 .

Estas rotaciones siempre las tomaremos en sentido contrario al de las agujas del reloj, y al decir, por ejemplo, "el ángulo que forman el segmento AB y el segmento MN " nos estaremos refiriendo a la rotación que parte de AB (recta inicial) y llega a MN (recta final).

Deduciremos a continuación una fórmula que nos permita determinar el ángulo que forman las rectas l_1 y l_2 .

En el triángulo ABM , α_2 es un ángulo externo. Por geometría elemental sabemos que todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes a él:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \angle AMB$$

El ángulo AMB y θ_1 son iguales por ser opuestos por el vértice. Por lo tanto

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \theta_1$$

y
$$\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$$

Tomando tangentes en ambos miembros, tendremos que

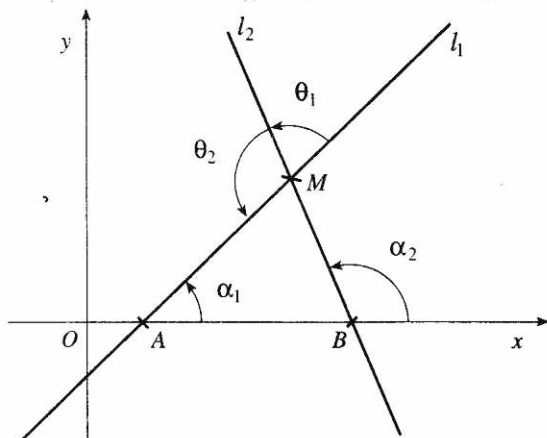
$$\operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Desarrollando el miembro de la derecha

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{tg} \alpha_1}$$

Pero $\operatorname{tg} \alpha_1$ es la pendiente de la recta inicial l_1 :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = m_1 \quad (\text{pendiente inicial})$$



y α_2 es la pendiente de la recta final l_2 :

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = m_2 \quad (\text{pendiente final})$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos, en definitiva, que

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \quad (m_2 m_1 \neq -1) \quad (6^G)$$

Como θ_1 y θ_2 son suplementarios, por ser adyacentes, se cumple que

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \operatorname{tg}(\pi - \theta_1) = -\operatorname{tg} \theta_1$$

$$\operatorname{tg} \theta_2 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

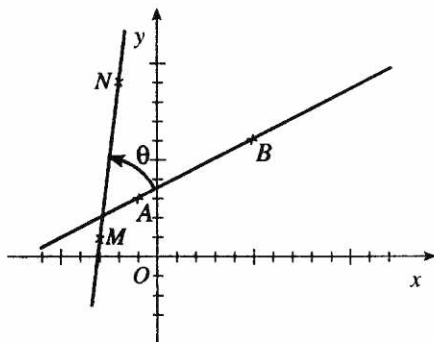
Sin embargo, en lugar de utilizar dos fórmulas, es preferible utilizar sólo la (6^G) teniendo el cuidado de identificar bien las rectas inicial y final y sus respectivas pendientes.

Ejemplo 32

Determinar el ángulo que forman la recta que pasa por $A(-1,3)$ y $B(5,6)$ y la recta que pasa por $M(-3,1)$ y $N(-2,9)$.

Hacemos un gráfico con los datos.

El ángulo θ que forman las rectas del problema es el que tiene a la recta AB como recta inicial y a la recta MN como recta final.



Calculamos la pendiente inicial:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{(A,B)} \\ &= \frac{6-3}{5-1} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Calculamos la pendiente final:

$$\begin{aligned} m_2 &= m_{(M,N)} \\ &= \frac{9-1}{-2+3} = 8 \end{aligned}$$

Utilizando (6^o) calculamos el ángulo:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \\ &= \frac{8 - \frac{1}{2}}{1 + 8 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} = 1,5\end{aligned}$$

De donde

$$\theta = 56^{\circ} 18'$$

Ejemplo 33

Determinar el ángulo que forman la recta que pasa por $A(3,2)$ y $B(1,7)$ y una recta de pendiente $\frac{1}{2}$.

La pendiente inicial es la de la recta que pasa por A y B :

$$\begin{aligned}m_1 &= m_{(A,B)} \\ &= \frac{7-2}{1-3} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

La pendiente final es la de la otra recta:

$$m_2 = \frac{1}{2}$$

Utilizando (6^o):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{2}\right)} = -12$$

Siendo negativa la tangente del ángulo, éste debe ser obtuso:

$$\theta = 180^{\circ} - 85^{\circ} 14'$$

$$\theta = 94^{\circ} 46'$$

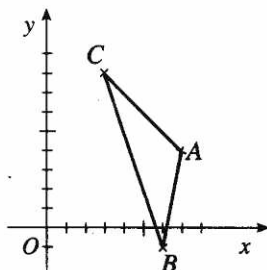
Ejemplo 34

Calcular los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son $A(7,4)$; $B(6,-1)$ y $C(3,8)$.

Hacemos un gráfico.

Cálculo del ángulo α que tiene su vértice en A :

El ángulo α es el que forma el lado AC (recta inicial) con el lado AB (recta final).



Calculamos las pendientes:

$$m_1 = m_{(A,C)} = \frac{8-4}{3-7} = -1$$

$$m_2 = m_{(A,B)} = \frac{-1-4}{6-7} = 5$$

Utilizando (6^c):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5+1}{1+5(-1)} = -1,5$$

$$\alpha = 180^\circ - 56^\circ 18'$$

$$\boxed{\alpha = 123^\circ 42'}$$

Cálculo del ángulo β con vértice en B:

β es el ángulo que forma el lado AB (inicial) con el lado BC (final).

Calculamos las pendientes:

$$m_1 = m_{(A,B)} = 5$$

$$m_2 = m_{(B,C)} = \frac{8+1}{3-6} = -3$$

Utilizando (6^c):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-3-5}{1+(-3) \cdot 5} = 0,5714$$

$$\boxed{\beta = 29^\circ 45'}$$

Cálculo del ángulo γ con vértice en C:

Como los ángulos internos del triángulo suman 180° , podemos hallar γ por una simple diferencia:

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180^\circ - (123^\circ 42' + 29^\circ 45')$$

$$\boxed{\gamma = 26^\circ 33'}$$

Ejemplo 35

Una recta l_1 de pendiente $\frac{1}{3}$ forma con otra recta l_2 un ángulo de $85^\circ 36'$. Determinar la pendiente de la recta l_2 .

Utilizando (6^c):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Sustituyendo en la expresión anterior los datos conocidos:

$$\operatorname{tg} 85^\circ 36' = \frac{m_2 - \frac{1}{3}}{1 + m_2 \cdot \frac{1}{3}}$$

Multiplicando por 3 ambos términos de la fracción de la derecha:

$$13 = \frac{3m_2 - 1}{3 + m_2}$$

Resolviendo:

$$39 + 13m_2 = 3m_2 - 1$$

$$10m_2 = -40$$

$$m_2 = -4$$

Ejemplo 36

La recta que pasa por $A(-2, 1)$ y $B(1, 4)$ forma un ángulo de $16^\circ 42'$ con la que pasa por $M(\frac{3}{2}, \frac{15}{2})$ y un punto N de abscisa 5. Hallar la ordenada de N

La pendiente de la recta inicial es:

$$m_1 = m_{(A,B)} = \frac{4-1}{1+2} = 1$$

Si damos a N las coordenadas $(5, y)$, la pendiente de la recta final es:

$$m_2 = m_{(M,N)} = \frac{y - \frac{15}{2}}{5 - \frac{3}{2}}$$

$$m_2 = \frac{2y - 15}{7}$$

Sustituyendo en (6') los datos conocidos:

$$\operatorname{tg} 16^\circ 42' = \frac{\frac{2y-15}{7} - 1}{1 + \frac{2y-15}{7}(1)}$$

Resolviendo la ecuación:

$$0,3 = \frac{2y - 15 - 7}{7 + 2y - 15}$$

$$0,3 = \frac{2y - 22}{2y - 8}$$

$$0,3 = \frac{y - 11}{y - 4}$$

$$0,3y - 1,2 = y - 11$$

$$0,7y = 9,8$$

La ordenada buscada es:

$$y = 14$$

Ejercicio 94

Determinar en cada caso el ángulo que forman las rectas l_1 y l_2 :

1) l_1 pasa por $A(-2, 1)$ y $B(3, -1)$; l_2 por $M(-5, 2)$ y $N(2, 5)$

2) l_1 pasa por $A(2, -1)$ y $B(4, 5)$; l_2 por $M(-2, 1)$ y $N(-3, 5)$

- 3) l_1 pasa por $A(1, -3)$ y $B(3, -2)$; l_2 por $M(2, 3)$ y $N(-2, 5)$
 4) l_1 pasa por $A(1, \frac{5}{2})$ y $B(5, \frac{10}{3})$; l_2 por $M(\frac{3}{2}, -2)$ y $N(\frac{8}{3}, \frac{9}{2})$

Calcular los ángulos internos del triángulo cuyos vértices son:

- 5) $A(-4, -3)$; $B(-2, 6)$; $C(3, 2)$
 6) $A(7, 1)$; $B(3, -5)$; $C(-2, 9)$
 7) $A(-1, 4)$; $B(7, 1)$; $C(-6, 2)$
 8) $A(\frac{7}{3}, -\frac{3}{2})$; $B(-\frac{9}{2}, \frac{4}{5})$; $C(8, \frac{8}{3})$

En los ejercicios que siguen se da el ángulo que forman dos rectas y la pendiente de una de ellas. Hallar la pendiente de la otra.

- 9) $\theta = 45^\circ$; $m_1 = 7$
 10) $\theta = 60^\circ$; $m_2 = \frac{5}{2}$
 11) $\theta = 150^\circ$; $m_1 = \frac{3}{2}$
 12) $\theta = 165^\circ$; $m_2 = -3$
 13) $\theta = 63^\circ 26'$; $m_1 = 5$
 14) Una recta pasa por los puntos $A(3, 1)$ y $B(9, 2)$. Otra pasa por $M(2, 7)$ y por un punto N de abscisa 6. Determinar la ordenada de N sabiendo que las rectas AB y MN forman un ángulo de 45° .
 15) La recta que pasa por los puntos $A(-1, 2)$ y $B(-2, 8)$ forma un ángulo de 45° con la que pasa por $M(1, -1)$ y un punto N de ordenada -6 . Determinar la abscisa de N .
 16) La recta que pasa por los puntos $A(-3, -2)$ y $B(5, -4)$ forma un ángulo de 135° con la que pasa por $M(0, 1)$ y un punto N de abscisa -3 . Hallar la ordenada de N .
 17) La recta que pasa por los puntos $A(-2, 6)$ y $B(-5, 1)$ forma un ángulo de $71^\circ 34'$ con la que pasa por $M(3, 8)$ y un punto N de ordenada 1. Determinar la abscisa de N .
 18) Calcular el ángulo agudo del rombo de vértices $A(-4, -2)$; $B(-1, 5)$; $C(6, 8)$ y $D(3, 1)$ y demostrar que la diagonal AC es bisectriz de ese ángulo.
 19) Calcular el ángulo obtuso del rombo de vértices $A(-2, 4)$; $B(3, 1)$; $C(6, -4)$ y $D(1, -1)$ y demostrar que la diagonal BD es bisectriz de ese ángulo.
 20) Las pendientes de los lados de un triángulo son $\frac{1}{2}$, 1 y 2. Demostrar que el triángulo es isósceles.
 21) El punto $P(-2, 2)$ está unido por rectas a los puntos $A(2, 6)$; $B(4, 2)$ y $C(1, -1)$. Demostrar que una de estas rectas es bisectriz del ángulo formado por las otras dos.
 22) El punto $P(2, 5)$ está unido por rectas a los puntos $A(-1, -1)$; $B(4, 1)$ y $C(13, 3)$. Demostrar que una de estas rectas es bisectriz del ángulo formado por las otras dos.

- 23) Determinar el ángulo formado por las rectas que unen el punto $P(-4,-2)$ con los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son $A(-2,5)$ y $B(7,2)$.
- 24) Hallar el ángulo que forman las rectas que unen al punto $P(10,5)$ con los puntos medios de las diagonales del cuadrilátero de vértices $A(-2,4)$; $B(5,7)$; $C(6,-4)$ y $D(-5,-3)$.
- 25) Determinar el ángulo formado por las rectas que unen el punto $P(4,-2)$ con los dos puntos que dividen el segmento de extremos $A(-1,-3)$ y $B(3,-5)$ en razones de -3 y $-\frac{1}{2}$ respectivamente.

Demostrar, hallando los ángulos de la base, que los triángulos cuyos vértices se dan son isósceles:

- 26) $A(-3,2)$; $B(4,6)$; $C(1,-5)$
- 27) $A(-2,-2)$; $B(1,6)$; $C(9,3)$
- 28) $A(-3,7)$; $B(6,-2)$; $C(-5,-4)$

Calcular el ángulo que forma cada una de las medianas con el lado sobre el que incide en el triángulo de vértices

- 29) $A(0,0)$; $B(6,8)$; $C(8,2)$
- 30) $A(-3,3)$; $B(5,1)$; $C(3,-5)$

Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad

A) Si dos rectas l_1 y l_2 son paralelas, el ángulo que forman entre sí es de 0° o 180° . En tal caso

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} 0^\circ = \operatorname{tg} 180^\circ = 0$$

y la relación (6^G) queda así:

$$0 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Una fracción se anula si es nulo su numerador. Por tanto

$$m_2 - m_1 = 0$$

$$m_2 = m_1$$

En definitiva, dos rectas son paralelas si tienen igual pendiente y, recíprocamente, si tienen igual pendiente, son paralelas. En efecto, si $m_2 - m_1$ es cero, tendremos que

$$\operatorname{tg} \theta = 0$$

$$\theta = k \cdot 180^\circ$$

y las rectas son paralelas.

$$\boxed{l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow m_2 = m_1} \quad (7^G)$$

(Esta conclusión es tan obvia que ya fue utilizada intuitivamente en el

B) Si dos rectas l_1 y l_2 son perpendiculares, el ángulo que forman entre sí es de 90° . Como la relación (6^G) no está definida para $\theta = 90^\circ$, la escribiremos así:

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}$$

Ahora, si hacemos $\theta = 90^\circ$, la expresión anterior queda así:

$$0 = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}$$

Nuevamente, el numerador debe anularse para que la fracción sea cero:

$$1 + m_2 m_1 = 0$$

y
$$m_2 m_1 = -1$$

o también

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

En definitiva, dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es -1 , o también, si sus pendientes son negativamente recíprocas. (Fácilmente se comprueba que el recíproco también es cierto).

$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_2 m_1 = -1$$

(8^G)

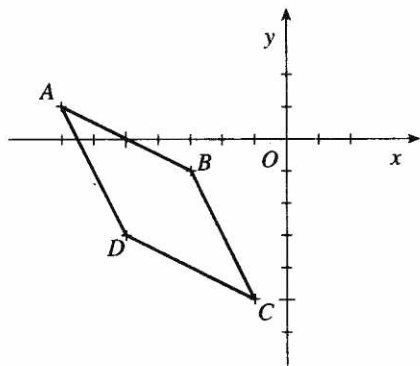
$$l_1 \perp l_2 \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Ejemplo 37

Demostrar que $A(-7,1)$; $B(-3,-1)$; $C(-1,-5)$ y $D(-5,-3)$ son vértices de un rombo. Demostrar, además, que sus diagonales son perpendiculares entre sí y se bisecan.

Hacemos un gráfico con los datos.

a) Calcularemos la longitud de los cuatro lados para demostrar que la figura es un rombo.



Cálculo de AB :

$$\begin{aligned} AB &= d_{(A,B)} \\ &= \sqrt{(-3+7)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Cálculo de BC :

$$\begin{aligned} BC &= d_{(B,C)} \\ &= \sqrt{(-1+3)^2 + (-5+1)^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Cálculo de CD :

$$\begin{aligned} CD &= d_{(C,D)} \\ &= \sqrt{(-5+1)^2 + (-3+5)^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

Cálculo de DA :

$$\begin{aligned} DA &= d_{(D,A)} \\ &= \sqrt{(-7+5)^2 + (1+3)^2} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

b) Para que las diagonales sean perpendiculares entre sí basta que el producto de sus pendientes sea -1 .

Pendiente de AC :

$$m_{(A,C)} = \frac{-5-1}{-1+7} = -1$$

Pendiente de BD :

$$m_{(B,D)} = \frac{-3+1}{-5+3} = 1$$

Efectuamos el producto de las pendientes:

$$m_{(A,C)} \cdot m_{(B,D)} = (-1) \cdot 1 = -1$$

c) Si el punto medio de AC coincide con el punto medio de BD , las diagonales se bisecan.

Llamemos M al punto medio de AC :

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{-7-1}{2} = -4 \\ y_M &= \frac{1-5}{2} = -2 \\ M &(-4, -2) \end{aligned}$$

Llamemos N al punto medio de BD :

$$\begin{aligned} x_N &= \frac{-3-5}{2} = -4 \\ y_N &= \frac{-1-3}{2} = -2 \\ N &(-4, -2) \end{aligned}$$

d) Conclusiones:

$$AB = BC = CD = DA \Rightarrow ABCD \text{ es rombo}$$

$$m_{(A,C)} \cdot m_{(B,D)} = -1 \Rightarrow AC \perp BD$$

$$M = N \Rightarrow AC \text{ y } BD \text{ se bisecan}$$

Ejemplo 38

La recta que pasa por $A\left(\frac{3}{2}, \frac{17}{3}\right)$ y $B\left(\frac{15}{2}, \frac{11}{3}\right)$ es paralela a la que pasa por $M\left(-\frac{7}{2}, \frac{8}{3}\right)$ y por un punto N de abscisa $\frac{17}{2}$. Hallar la ordenada de N .

Calculamos la pendiente de la recta que pasa por A y B :

$$m_{(A,B)} = \frac{\frac{11}{3} - \frac{17}{3}}{\frac{15}{2} - \frac{3}{2}} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Pendiente de la recta que pasa por M y por $N\left(\frac{17}{2}, y\right)$:

$$m_{(M,N)} = \frac{y - \frac{8}{3}}{\frac{17}{2} - \frac{7}{2}} = \frac{y - \frac{8}{3}}{12} = \frac{3y - 8}{36}$$

Si, como dice el problema, las rectas son paralelas, sus pendientes deben ser iguales.

Por tanto:

$$m_{(A,B)} = m_{(M,N)}$$

$$-\frac{1}{3} = \frac{3y - 8}{36}$$

Resolviendo:

$$-12 = 3y - 8$$

$$3y = -4$$

La ordenada buscada es:

$$y = -\frac{4}{3}$$

Ejemplo 39

La recta que pasa por $A(10, 25)$ y $B(11, 5\sqrt{26})$ y la que pasa por un punto M de ordenada 5 y por $N(-2, -\sqrt{26})$ son perpendiculares. Hallar la abscisa de M .

La pendiente de la recta que pasa por A y B es:

$$m_{(A,B)} = \frac{5\sqrt{26} - 25}{11 - 10} = 5\sqrt{26} - 25$$

La pendiente de la que pasa por $M(x, 5)$ y N es:

$$m_{(M,N)} = \frac{-\sqrt{26} - 5}{-2 - x} = \frac{\sqrt{26} + 5}{2 + x}$$

Siendo perpendiculares las rectas, sus pendientes deben ser negativamente recíprocas. Por tanto:

$$m_{(A,B)} = -\frac{1}{m_{(M,N)}}$$

$$5\sqrt{26} - 25 = -\frac{2 + x}{\sqrt{26} + 5}$$

Resolviendo:

$$(5\sqrt{26} - 25)(\sqrt{26} + 5) = -(2 + x)$$

$$5(\sqrt{26} - 5)(\sqrt{26} + 5) = -2 - x$$

$$5(26 - 25) = -2 - x$$

$$5 = -2 - x$$

La abscisa buscada es:

$$x = -7$$

Ejercicio 95

Demostrar en cada caso que el segmento de extremos A y B es paralelo al segmento de extremos M y N :

- 1) $A(-2, 3)$; $B(1, 5)$; $M(1, -2)$; $N(7, 2)$
- 2) $A(3, 2)$; $B(-1, -6)$; $M(-2, 7)$; $N(-5, 1)$
- 3) $A(\sqrt{2}, 3)$; $B(3, 8)$; $M(10, -5\sqrt{2})$; $N(17, 15)$
- 4) $A(2, \frac{3}{2})$; $B(\sqrt{5}, \frac{17}{2})$; $M(\frac{1}{3}, 7\sqrt{5})$; $N(-\frac{2}{3}, -14)$
- 5) $A(a, 8)$; $B(b, 7)$; $M(a^2, a)$; $N(b^2, -b)$

Demostrar en cada caso que el segmento de extremos A y B es perpendicular al segmento de extremos M y N :

- 6) $A(2, -5)$; $B(7, -3)$; $M(9, 6)$; $N(7, 11)$
- 7) $A(-\frac{6}{7}, \frac{3}{4})$; $B(\frac{15}{7}, -\frac{1}{4})$; $M(-\frac{3}{7}, \frac{8}{3})$; $N(\frac{4}{7}, \frac{17}{3})$
- 8) $A(\sqrt{10}, 7)$; $B(3, 6)$; $M(-\frac{1}{5}, \frac{1+\sqrt{10}}{2})$; $N(\frac{4}{5}, \frac{7-\sqrt{10}}{2})$
- 9) $A(-4, 4)$; $B(-3, \sqrt{17})$; $M(5, -\sqrt{17})$; $N(4, 4)$
- 10) $A(-4a, a+2)$; $B(a^2+3, a^2)$; $M(a^2+2, 3)$; $N(3a, a^2+2a)$

Hallar en cada caso la coordenada que falta sabiendo que el segmento AB y el segmento MN son paralelos:

- 11) $A(-5, 1)$; $B(6, 8)$; $M(10, 4)$; la abscisa de N es -1
- 12) $A(5, -\frac{5}{4})$; $B(-4, \frac{11}{4})$; $N(\frac{11}{2}, 2)$; la ordenada de M es 6
- 13) $A(2, 9)$; $M(4, -2)$; $N(7, \sqrt{7})$; la abscisa de B es $\sqrt{7}$
- 14) $B(1, -2)$; $M(3, -10)$; $N(3\sqrt{5}, 11)$; la ordenada de A es 5

Hallar en cada en cada caso la coordenada que falta sabiendo que el segmento AB y el segmento MN son perpendiculares:

- 15) $A(-5, -4)$; $B(3, -1)$; $M(8, 1)$; la ordenada de N es -7
- 16) $A(\sqrt{3}, -\frac{3}{7})$; $B(\sqrt{11}, \frac{11}{7})$; $N(\frac{20}{3}, 3\sqrt{3})$; la abscisa de M es $\frac{2}{3}$
- 17) $A(-\frac{3}{5}, -5\sqrt{3})$; $M(1, \sqrt{7})$; $N(6, \sqrt{3})$; la ordenada de B es $5\sqrt{7}$
- 18) $B(\frac{6}{5}, 2\sqrt{3})$; $M(\frac{2}{5}, 2\sqrt{3})$; $N(\frac{17}{5}, 3)$; la abscisa de A es $\frac{1}{5}$

Demostrar que los triángulos cuyos vértices se dan son rectángulos:

- 19) $A(1, 2)$; $B(5, 8)$; $C(10, -4)$
- 20) $D(-4, 1)$; $E(3, 5)$; $F(11, -9)$
- 21) $K(-6, 1)$; $L(10, 3)$; $M(-2, -5)$
- 22) $P(-\frac{5}{3}, \frac{5}{2})$; $Q(\frac{28}{3}, \frac{9}{2})$; $R(\frac{4}{3}, -\frac{3}{2})$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un paralelogramo y que ese paralelogramo es rectángulo:

- 23) $A(5, 6)$; $B(1, -2)$; $C(-5, 1)$; $D(-1, 9)$
- 24) $E(-6, -1)$; $F(-7, 3)$; $G(5, 6)$; $H(6, 2)$
- 25) $K(\frac{3}{2}, \frac{14}{3})$; $L(\frac{7}{2}, -\frac{4}{3})$; $M(\frac{1}{2}, -\frac{7}{3})$; $N(-\frac{3}{2}, \frac{11}{3})$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un rombo. Comprobar, además, que sus diagonales son perpendiculares entre sí y se bisecan:

- 26) $A(2, 5)$; $B(-1, 0)$; $C(-6, -3)$; $D(-3, 2)$
- 27) $K(-\frac{8}{3}, \frac{27}{4})$; $L(\frac{13}{3}, \frac{23}{4})$; $M(\frac{16}{3}, -\frac{5}{4})$; $N(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{4})$
- 28) $P(1, 0)$; $Q(-3, 7)$; $R(4, 3)$; $S(8, -4)$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un cuadrado. Comprobar, además, que sus diagonales son perpendiculares entre sí y se bisecan:

- 29) $A(3, 6)$; $B(7, -1)$; $C(0, -5)$; $D(-4, 2)$
- 30) $K(-\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$; $L(\frac{11}{2}, \frac{11}{4})$; $M(\frac{9}{2}, -\frac{13}{4})$; $N(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{4})$

Demostrar que los puntos que se dan son vértices de un cuadrilátero cuyas diagonales son perpendiculares entre sí:

- 31) $A(2, -5)$; $B(7, -3)$; $C(6, 1)$; $D(-2, 3)$
- 32) $L(-5, 5)$; $M(3, 9)$; $N(13, -1)$; $O(0, 0)$

Demostración analítica de teoremas geométricos

La Geometría Analítica es una poderosa herramienta para demostrar, con ayuda del álgebra, muchos teoremas de la Geometría elemental.

Para la demostración analítica de teoremas geométricos ténganse en cuenta las siguientes indicaciones:

1) Las demostraciones analíticas se hacen utilizando coordenadas. Estas deben ser literales y no numéricas, siendo las letras que se utilizan cantidades que pueden tomar cualquier valor real.

2) La figura a la que se refiere el teorema objeto de la demostración debe colocarse en la posición más simple para facilitar el proceso, pero tomando la precaución de no excederse en esta simplificación cayendo en casos particulares.

Veámoslo con un ejemplo práctico: supóngase que debemos demostrar un teorema relativo a un cuadrilátero cualquiera.

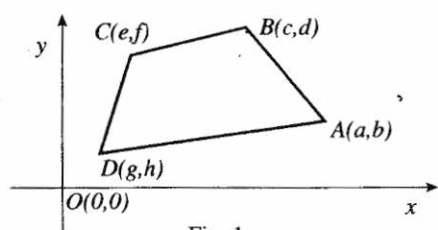


Fig. 1

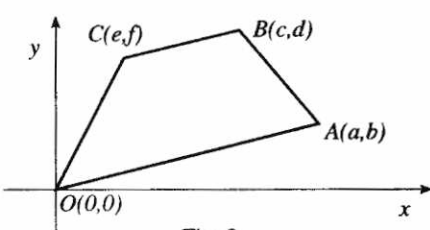


Fig. 2

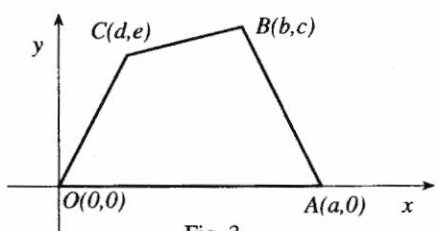


Fig. 3

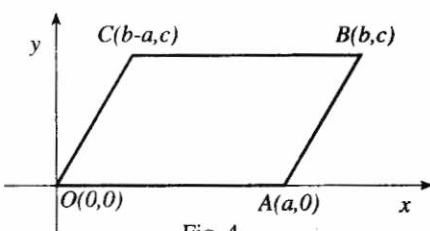


Fig. 4

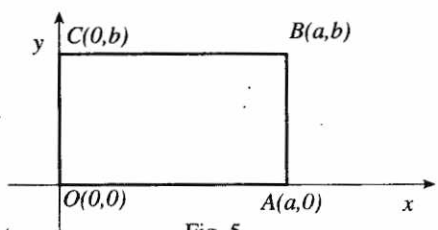


Fig. 5

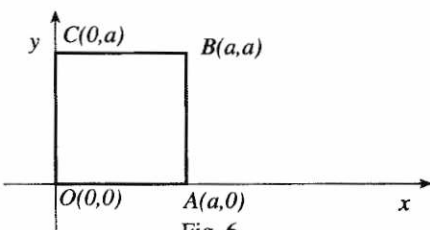


Fig. 6

La disposición del cuadrilátero en la Fig. 1 implica la utilización de ocho letras distintas para las coordenadas de los cuatro vértices.

En la Fig. 2 se reduce la cantidad de letras a seis haciendo coincidir uno de los vértices con el origen del sistema.

En la Fig. 3 se logra eliminar otra letra haciendo coincidir un vértice con el origen del sistema y uno de los lados del cuadrilátero con uno de los ejes.

En la Fig. 4 se logra reducir a tres las letras utilizadas, pero el exceso de simplificación hace que la figura no sea ya un cuadrilátero cualquiera sino un caso particular de cuadrilátero, el paralelogramo.

En la Fig. 5 se exagera todavía más en la simplificación: la figura no es un cuadrilátero cualquiera, sino un caso particular, el paralelogramo, y ni siquiera un paralelogramo cualquiera, sino un caso particular de éste: el rectángulo.

En la Fig. 6 se llega, simplificando al extremo, a un caso particular del rectángulo, el cuadrado.

Las figuras 4, 5 y 6 no sirven, por tanto, para la demostración de un teorema relativo a un cuadrilátero cualquiera.

Entre las primeras, la que alcanza su expresión más sencilla es la Fig. 3.

3) Al momento de hacer una demostración es conveniente recordar que en toda argumentación hay condiciones *necesarias*, condiciones *suficientes* y que no siempre una condición necesaria es suficiente.

Por ejemplo, para que un cierto paralelogramo sea un cuadrado, es condición necesaria que todos los lados sean iguales, pero esa condición no es suficiente ya que un paralelogramo con los cuatro lados iguales puede no ser un cuadrado sino un rombo cualquiera.

En cambio, para demostrar que un cierto paralelogramo es un rombo, es condición necesaria y suficiente que los lados sean de igual longitud.

4) En todo teorema a demostrar se pueden distinguir dos partes: una conocida y supuesta, llamada **hipótesis** y otra que es la que debe ser demostrada, llamada **tesis**.

Ejemplo: *Si un triángulo es isósceles, entonces dos de sus medianas son iguales.*

En el enunciado anterior la hipótesis es *un triángulo es isósceles*; la tesis es *dos de sus medianas son iguales*.

No siempre el enunciado de un teorema adopta la forma "*Si... , entonces...*". El teorema anterior puede estar también enunciado en esta forma: *Las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales entre sí.* La hipótesis y la tesis en este segundo enunciado son las mismas del enunciado anterior.

Demostración de teoremas directos

Ejemplo 40

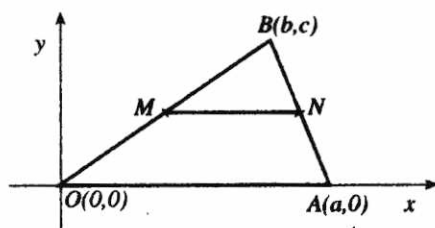
Demostrar analíticamente que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

Construimos un sistema de ejes coordenados y situamos en él un triángulo cualquiera aprovechando el origen

como uno, de los vértices y el eje de abscisas como uno de los lados.

Señalamos también en la figura los puntos medios de los lados AB y BO y los unimos con un segmento.

La tesis es doble: tenemos que demostrar, por una parte, que el segmento MN es paralelo al lado OA y, por otra, que la longitud de MN es la mitad de la longitud de OA .



Comencemos determinando las coordenadas de M y N (puntos medios de sus respectivos lados):

$$x_M = \frac{0+b}{2} = \frac{b}{2}$$

$$y_M = \frac{0+c}{2} = \frac{c}{2}$$

$$M\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

$$x_N = \frac{a+b}{2}$$

$$y_N = \frac{c}{2}$$

$$N\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$$

a) Si MN y OA son paralelos, deben tener igual pendiente.

Calculamos ambas pendientes:

$$m_{(M,N)} = \frac{\frac{c}{2} - \frac{c}{2}}{\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}} = 0$$

$$m_{(O,A)} = \frac{0-0}{a-0} = 0$$

b) Si la segunda parte de la tesis es cierta, entonces

$$MN = \frac{1}{2} OA$$

Calculamos MN :

$$MN = d_{(M,N)} = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a}{2}$$

Calculamos $\frac{1}{2} OA$:

$$\frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} d_{(O,A)} = \frac{1}{2} (a-0) = \frac{a}{2}$$

Conclusión:

$\left. \begin{aligned} m_{(M,N)} &= m_{(O,A)} \\ d_{(M,N)} &= \frac{1}{2} d_{(O,A)} \end{aligned} \right\}$	$\Rightarrow$	Se cumple el teorema
--	---------------	-----------------------------

Demostración de teoremas recíprocos

La proposición recíproca de otra es la que se obtiene intercambiando la hipótesis y la tesis de ésta última.

Veamos algunos ejemplos de proposiciones y de sus recíprocos:

Proposición	Recíproco
a) Un triángulo equilátero tiene los tres lados iguales	Un triángulo que tiene los tres lados iguales es equilátero
b) Si tú eres mi alumno, yo soy tu maestro	Si tú eres mi maestro, yo soy tu alumno
c) Si yo soy más joven que tú, nuestras edades son distintas	Si nuestras edades son distintas, yo soy más joven que tú
d) Todos los maracuchos son venezolanos	Todos los venezolanos son maracuchos

Como puede observarse, no siempre la proposición recíproca es verdadera. En los ejemplo a) y b) las proposiciones recíprocas son ciertas, no así en los ejemplos c) y d).

Al enunciar el recíproco de teoremas relativos a casos particulares se parte de figuras más generales. Véase, por ejemplo, los enunciados del Teorema de Pitágoras y de su recíproco:

Teorema de Pitágoras: *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

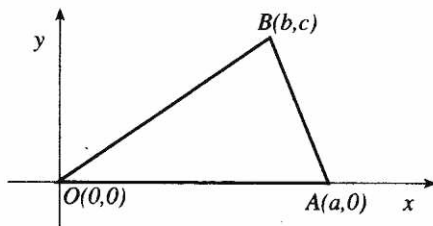
Recíproco: *Si en un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.*

Las demostraciones de teoremas recíprocos reciben un tratamiento distinto del de los teoremas directos: se parte de un afirmación traducida en una ecuación que, al ser resuelta, nos da las condiciones que deben cumplirse para que la afirmación inicial sea cierta.

Ejemplo 41

Demostremos el recíproco del Teorema de Pitágoras.

Situamos convenientemente en un sistema de ejes coordenados un triángulo cualquiera.



Traducimos en una ecuación la afirmación del enunciado:

$$AB^2 = BO^2 + OA^2$$

Utilizando las relaciones de distancia entre puntos:

$$\left[\sqrt{(b-a)^2 + (c-0)^2} \right]^2 = \left[\sqrt{(b-0)^2 + (c-0)^2} \right]^2 + (a-0)^2$$

Desarrollando:

$$b^2 - 2ab + a^2 + c^2 = b^2 + c^2 + a^2$$

Después de reducir términos semejantes y simplificar, tenemos:

$$ab = 0$$

Para que el producto anterior sea nulo se dan dos posibilidades:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Conclusión: Si a es cero, el vértice A se desplaza hasta coincidir con el origen del sistema y en ese caso la figura deja de ser un triángulo.

Si b es cero, el vértice B se desplaza horizontalmente hasta situarse sobre el eje de ordenadas y , en tal caso, el triángulo OAB es rectángulo. Queda, por tanto, demostrada la proposición.

Nota: Para nuestra demostración tomamos AB como el lado mayor al hacer nuestro planteamiento inicial. Podíamos haber tomado cualquiera de los otros dos. Algunos planteamientos pueden dar lugar a ecuaciones más o menos complicadas, pero en cualquiera la resolución proporcionará las condiciones para que el teorema sea cierto.

Ejercicio 96

Demostrar analíticamente los siguientes teoremas geométricos:

- 1) Las rectas que unen los puntos medios de los lados sucesivos de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.
- 2) Las diagonales de un paralelogramo se bisecan.
- 3) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 4) Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí.
- 5) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 6) El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.
- 7) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 8) Los ángulos opuestos a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.
- 9) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 10) Las diagonales de un rectángulo son iguales.
- 11) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 12) Las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

- 13) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 14) Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.
- 15) Dos ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
- 16) Los dos segmentos que se obtienen uniendo dos vértices opuestos de un paralelogramo con los puntos medios de dos lados opuestos son paralelos y de igual longitud.
- 17) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un trapecio isósceles forman un rombo.
- 18) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un rectángulo forman un rombo.
- 19) El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio (mediana del trapecio) es paralelo a las bases e igual a su semisuma.
- 20) El segmento que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es igual a la mitad de la diferencia de las longitudes de las bases.
- 21) La suma de los cuadrados de los lados de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus diagonales.
- 22) Los segmentos que unen los puntos medios de cada dos lados opuestos de un cuadrilátero cualquiera se bisecan entre sí.
- 23) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados consecutivos de un rombo forman un rectángulo.
- 24) Los ángulos de la base de un trapecio isósceles son iguales.
- 25) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 26) Los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero y los puntos medios de las diagonales son los vértices de un paralelogramo.
- 27) El segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadrilátero y el que une los puntos medios de las diagonales se bisecan entre sí.
- 28) El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio biseca ambas diagonales.
- 29) La suma de los cuadrados de las distancias de cualquier punto del plano a dos vértices opuestos de un rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de sus distancias a los otros dos vértices.
- 30) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 31) Si O , A , B y C son los vértices sucesivos de un paralelogramo y D y E los puntos medios de los lados OA y BC , respectivamente, los segmentos DB y OE trisecan a la diagonal AC .
- 32) En un triángulo cualquiera, el cuádruplo de la suma de los cuadrados de las longitudes de las medianas es igual al triplo de la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados.
- 33) Las diagonales de un rombo son bisectrices de sus ángulos internos.
- 34) Los segmentos que unen los puntos medios de los lados sucesivos de un cuadrilátero forman otro cuadrilátero cuyo perímetro es igual a la suma de las diagonales del primero.

- 35) En un trapecio, los ángulos que tienen sus vértices sobre un mismo lado son suplementarios.
- 36) Si las diagonales de un cuadrilátero son perpendiculares entre sí, entonces la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.
- 37) Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo cuyos lados son paralelos a las diagonales del cuadrilátero.
- 38) En un triángulo isósceles, la paralela a la base trazada por el vértice es bisectriz del ángulo externo del vértice.
- 39) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 40) Si en un trapecio $OABC$ de base mayor OA se cumple que $OC = CB$, entonces la diagonal OB es la bisectriz del ángulo que tiene su vértice en O .
- 41) En un cuadrilátero cualquiera la suma de dos de los ángulos externos es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a ellos.
- 42) Si la altura de un trapecio isósceles es igual a la semisuma de las bases, entonces los puntos medios de los lados del trapecio forman un cuadrado.
- 43) Si las diagonales de un trapecio isósceles son perpendiculares, entonces los puntos medios de los lados forman un cuadrado.
- 44) La suma de los cuadrados de las diagonales de un trapecio es igual a la suma de los cuadrados de los laterales más el doble producto de las bases.
- 45) Si el segmento que une los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los otros dos lados, el cuadrilátero es un trapecio.
- 46) La suma de los cuadrados de las diagonales de un cuadrilátero cualquiera es dos veces la suma de los cuadrados de los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos.

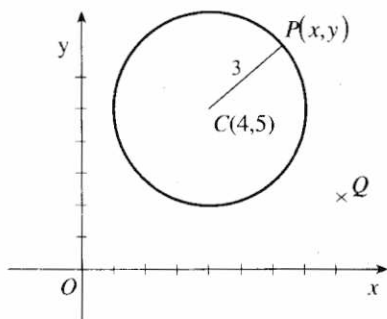
Lugares geométricos

Dada una cierta propiedad o condición relativa a los puntos del plano, llamaremos **lugar geométrico** a la figura constituida por **todos** los puntos y **sólo** aquellos puntos que satisfacen esa propiedad o condición.

En consecuencia, un punto $P(x, y)$ pertenece al lugar geométrico si y sólo si satisface la propiedad en cuestión.

Por ejemplo, *el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a tres unidades de distancia del punto $C(4,5)$* es una circunferencia que tiene su centro en C y un radio de tres unidades.

Todos los puntos de la figura y sólo ellos satisfacen la condición puesta. Un punto Q que no esté sobre la circunferencia no satisface la condición dada y no pertenece por tanto al lugar geométrico.



A veces, un lugar geométrico se define en términos de la noción física del movimiento. El ejemplo anterior podría haberse descrito así: *el lugar geométrico de un punto del plano que se mueve de tal forma que siempre se encuentra a una distancia de tres unidades del punto C(4,5).*

La condición algebraica que debe satisfacer todo punto $P(x, y)$ del plano para pertenecer a un lugar geométrico se expresa mediante una ecuación que todo punto del lugar geométrico debe satisfacer y ningún otro. Esta ecuación recibe el nombre de **ecuación del lugar geométrico**.

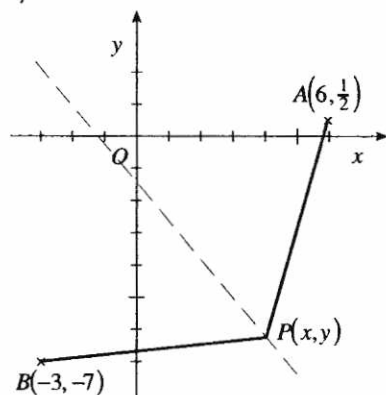
Para obtener la ecuación de un lugar geométrico se aplica a un punto cualquiera $P(x, y)$ la condición dada.

En realidad, aquí estamos formalizando un proceso que ya fue efectuado en ejemplos de páginas anteriores (Ver ejemplos 11 y 12, págs. 316 y 317) y en algunos ejercicios (Ver Ejercicio 90, 67-76 y Ejercicio 93, 43-45).

Ejemplo 42

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de los puntos $A(6, \frac{1}{2})$ y $B(-3, -7)$.

Hacemos un gráfico.



La condición que debe satisfacer el punto P para pertenecer al lugar geométrico es la de que su distancia al punto A debe ser igual a su distancia al punto B :

$$d_{(P,A)} = d_{(P,B)}$$

Utilizando la fórmula (2^a) de distancia entre puntos:

$$\sqrt{(6-x)^2 + (\frac{1}{2}-y)^2} = \sqrt{(-3-x)^2 + (-7-y)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(6-x)^2 + (\frac{1}{2}-y)^2 = (-3-x)^2 + (-7-y)^2$$

Desarrollando:

$$36 - 12x + x^2 + \frac{1}{4} - y + y^2 = 9 + 6x + x^2 + 49 + 14y + y^2$$

Reduciendo términos:

$$-18x - 15y - \frac{87}{4} = 0$$

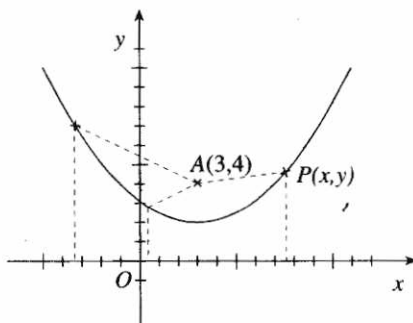
Eliminando denominadores, simplificando y cambiando signos, obtenemos la ecuación del lugar geométrico:

$$24x + 20y + 29 = 0$$

Ejemplo 43

Un punto se mueve de tal forma que su distancia al eje de abscisas es siempre igual a su distancia al punto $A(3,4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico. Verificar si el punto en su recorrido pasa por $M(4,2)$ y $N(7,4)$.

a) Determinemos primero la ecuación del lugar geométrico.



La distancia de un punto al eje de abscisas es igual a su ordenada.

La condición que debe satisfacer el punto P en su movimiento es, pues, la siguiente:

$$\text{Ordenada de } P = d_{(P,A)}$$

Es decir:

$$y = \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2}$$

Elevando:

$$y^2 = (3-x)^2 + (4-y)^2$$

Desarrollando y llevando a la mínima expresión:

$$y^2 = 9 - 6x + x^2 + 16 - 8y + y^2$$

$$x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

(a)

b) Verifiquemos si el punto pasa en su recorrido por M y N .

Si el punto pasa por M , éste pertenece al lugar geométrico y debe satisfacer la ecuación (a).

Veamos si es así sustituyendo las variables por las coordenadas de M :

$$\begin{aligned} &4^2 - 6 \cdot 4 - 8 \cdot 2 + 25 \\ &= 16 - 24 - 16 + 25 \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Las coordenadas de M no satisfacen la ecuación del lugar geométrico, por lo que concluimos que M no pertenece a él.

Verificamos en forma análoga para N :

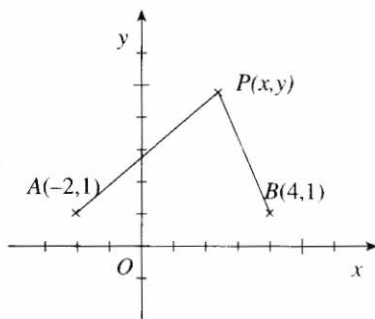
$$\begin{aligned} &7^2 - 6 \cdot 7 - 8 \cdot 4 + 25 \\ &= 49 - 42 - 32 + 25 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como las coordenadas de N satisfacen la ecuación del lugar geométrico, concluimos que N sí pertenece a él.

Ejemplo 44

Un punto se mueve de tal forma que la suma de sus distancias a los puntos $A(-2,1)$ y $B(4,1)$ es siempre igual a 10. Hallar la ecuación de su lugar geométrico y verificar si los puntos $M(1,5)$ y $N(5,4)$ pertenecen a él

a) Ecuación del lugar geométrico.



La propiedad que satisfacen los puntos de ese lugar geométrico es la siguiente:

$$d_{(P,A)} + d_{(P,B)} = 10$$

Utilizando la relación (2⁶):

$$\sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2} = 10$$

Aislando una de las raíces:

$$\sqrt{(-2-x)^2 + (1-y)^2} = 10 - \sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(-2-x)^2 + (1-y)^2 = 100 - 20\sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2} + (4-x)^2 + (1-y)^2$$

Desarrollando:

$$4 + 4x + x^2 = 100 - 20\sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2} + 16 - 8x + x^2$$

Reduciendo términos:

$$12x - 112 = -20\sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2}$$

Simplificando:

$$3x - 28 = -5\sqrt{(4-x)^2 + (1-y)^2}$$

Volviendo a elevar:

$$9x^2 - 168x + 784 = 25(16 - 8x + x^2 + 1 - 2y + y^2)$$

$$9x^2 - 168x + 784 = 400 - 200x + 25x^2 + 25 - 50y + 25y^2$$

La ecuación es:

$$16x^2 - 32x + 25y^2 - 50y - 359 = 0$$

b) Verificamos si $M(1,5)$ pertenece al lugar geométrico:

$$\begin{aligned} & 16 \cdot 1^2 - 32 \cdot 1 + 25 \cdot 5^2 - 50 \cdot 5 - 359 \\ &= 16 - 32 + 625 - 250 - 359 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las coordenadas satisfacen la ecuación. Por tanto, M pertenece al lugar geométrico.

Verificamos para $N(5,4)$:

$$\begin{aligned} & 16 \cdot 5^2 - 32 \cdot 5 + 25 \cdot 4^2 - 50 \cdot 4 - 359 \\ &= 400 - 160 + 400 - 200 - 359 \\ &= 81 \neq 0 \end{aligned}$$

N no pertenece al lugar geométrico, pues sus coordenadas no satisfacen la ecuación.

Ejercicio 97

Hallar la ecuación del lugar geométrico...

- 1) ... de los puntos del plano cuya abscisa es 3.
- 2) ... de un punto que se mueve de tal manera que siempre está 4 unidades por encima del eje de abscisas.
- 3) ... de un punto que se mueve de tal manera que siempre está 5 unidades a la izquierda del eje de ordenadas.
- 4) ... de los puntos del plano de ordenada -2 .
- 5) ... de los puntos del plano que están por debajo del eje de abscisas a una distancia de 10 unidades de él.
- 6) ... de un punto que se mueve sobre el eje de ordenadas.
- 7) ... de los puntos del plano que están en el eje de abscisas.
- 8) ... de un punto que se mueve conservando siempre la misma distancia a los ejes de abscisas y ordenadas.
- 9) ... de los puntos del plano cuya ordenada es el triplo de su abscisa.
- 10) ... de los puntos del plano cuya abscisa es igual a la ordenada disminuida en 7 unidades.
- 11) ... de un punto que se mueve de tal manera que la suma del triplo de su abscisa y el cuádruplo de su ordenada es siempre igual a 3.
- 12) ... de los puntos del plano cuya abscisa aumentada en 2 unidades es igual al inverso de su ordenada.

- 13) ... de un punto que se mueve de tal manera que su ordenada disminuida en $\frac{2}{3}$ es siempre igual al doble de su abscisa aumentada en $\frac{5}{3}$.
- 14) ... de los puntos del plano cuya abscisa es igual al cuadrado de la ordenada.
- 15) ... de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje de ordenadas es siempre igual a su distancia al punto $P(4,3)$.
- 16) ... de los puntos del plano cuya distancia al eje de abscisas es igual a su distancia al punto $P(-5,2)$.
- 17) ... de los puntos del plano cuya distancia al eje de abscisas disminuida en 5 es igual a su distancia al punto $P(4,-3)$.
- 18) ... de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje de ordenadas aumentada en 4 es siempre igual a su distancia al punto $P(-\frac{7}{2}, 2)$. Verificar si el punto $M(-\frac{11}{4}, 1)$ pertenece al lugar geométrico.
- 19) ... de los puntos del plano cuya distancia al eje de abscisas es igual al cuadrado de la distancia al origen. Verificar si $M(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$ pertenece al lugar geométrico.
- 20) ... de un punto que se mueve estando siempre a igual distancia de los puntos $A(1,5)$ y $B(5,2)$. Verificar si $M(-2,1)$ pertenece al lugar geométrico.
- 21) ... de los puntos del plano que equidistan de los puntos $A(-2,3)$ y $B(4,-1)$.
- 22) ... de la mediatriz del segmento de extremos $A(\sqrt{3}, 7)$ y $B(-2\sqrt{3}, -5)$.
Determinar si $M(-\frac{9\sqrt{3}}{2}, 4)$ pertenece a esa mediatriz.
- 23) ... de un punto que, pasando por el punto $P(4,7)$, se mueve siempre en una dirección paralela al segmento de extremos $A(-3,1)$ y $B(5,-4)$. Verificar si el punto pasa en su movimiento por $M(7,5)$.
- 24) ... de un punto que, pasando por el origen, se mueve en una dirección perpendicular al segmento de extremos $A(-2,5)$ y $B(8,3)$.
- 25) ... de los puntos del plano que están a una distancia de 5 unidades del punto $P(-2,0)$. Verificar si $M(1,4)$ es uno de esos puntos.
- 26) ... de un punto que se mueve conservando siempre una distancia de 7 unidades del punto $P(-5,-4)$. Determinar si ese punto pasa por $M(-2,2)$ en su recorrido.
- 27) ... de los puntos del plano que pertenecen a la recta que pasa por $A(2,5)$ y $B(-3,1)$.
- 28) ... de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-5,2)$ y $B(4,3)$ es siempre igual a 60. Un punto de abscisa 2 pertenece a ese lugar geométrico; determinar su ordenada.
- 29) ... de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(4,5)$ y $B(7,-2)$ es siempre igual a 2. Un punto M de ordenada $\frac{5}{7}$ pertenece a ese lugar geométrico; hallar su abscisa.
- 30) ... de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(-3,3)$ es 2 unidades mayor que su distancia al punto $B(5,3)$.

- 31) ... de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(3,0)$ es 3 unidades menor que su distancia al origen.
- 32) ... de un punto que se mueve de tal manera que la suma de su distancia al punto $F(-1,1)$ y de su distancia al punto $F'(5,1)$ es siempre igual a 8.
- 33) ... de los puntos del plano cuya suma de distancias a los puntos $F(3,4)$ y $F'(3,-2)$ es siempre igual a 10.
- 34) ... de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos $F(-2,-4)$ y $F'(4,-4)$ es siempre igual a 4.
- 35) ... de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $F(2,-1-2\sqrt{3})$ y $F'(2,-1+2\sqrt{3})$ es siempre $2\sqrt{5}$.
- 36) ... de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje de abscisas es siempre el doble de su distancia al punto $M(7,-2)$.
- 37) ... de los puntos del plano cuya distancia al eje de ordenadas es igual a la mitad de la distancia al punto $A(3,-1)$.
- 38) ... de los puntos del plano cuya distancia al punto $A(-2,3)$ es igual a la tercera parte de su distancia al eje de abscisas.
- 39) ... del vértice C de un triángulo cuyos otros dos vértices son $A(4,5)$ y $B(9,-2)$, si se mueve de tal forma que la pendiente del lado AC es siempre la mitad de la del lado BC .
- 40) ... del vértice C de un triángulo cuyos otros dos vértices son $A(-5,3)$ y $B(7,-4)$, si se mueve de tal forma que la pendiente del lado AB es siempre el doble de la del lado BC .
- 41) ... de los puntos del plano desde los que los puntos $A(-1,4)$ y $B(3,-2)$ se ven con un ángulo de 45° .

ECUACION DE LA RECTA

Definiremos la recta como el lugar geométrico de los puntos de plano tales que, tomados dos puntos cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente del segmento que forman es constante.

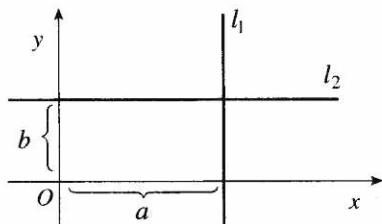
Ecuación de una recta paralela a uno de los ejes coordenados

Sea l_1 una recta paralela al eje de ordenadas y que determina sobre el eje de abscisas un segmento de longitud a . Todos los puntos de esa recta poseen la característica común de tener una misma abscisa a .

La ecuación de su lugar geométrico es

$x = a$

Sea l_2 una recta paralela al eje de abscisas y que determina sobre el eje de ordenadas un segmento de longitud b . Los puntos de esa recta poseen la caracterís-



tica común de tener todos la misma ordenada b .

La ecuación de su lugar geométrico es

$$y = b$$

El *eje de ordenadas* tiene por ecuación

$$x = 0$$

por ser el lugar geométrico de los puntos de abscisa cero.

El *eje de abscisas* tiene por ecuación

$$y = 0$$

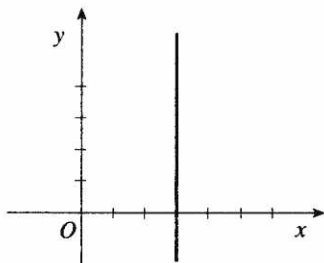
por ser el lugar geométrico de los puntos de ordenada cero.

Ejemplo 45

Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas que corta el de abscisas en el punto $P(3,0)$.

Los puntos de la recta cuya ecuación buscamos tienen, por ser paralela al eje de ordenadas, la misma abscisa del punto $P(3,0)$, es decir, 3 y su ecuación es:

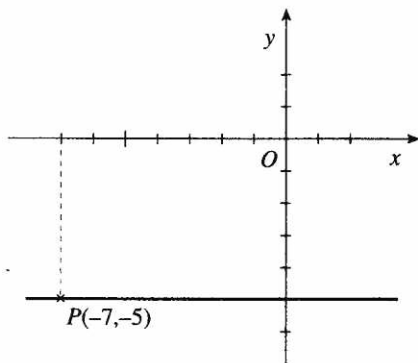
$$x = 3$$



Ejemplo 46

Hallar la ecuación de la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $P(-7,-5)$.

Todos los puntos de la recta tienen, por ser paralela al eje de abscisas, la misma ordenada del punto P , es decir, -5 .



La ecuación de la recta es:

$$y = -5$$

Ejercicio 98

- 1) Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas que determina sobre el eje de abscisas un segmento de 5 unidades.
- 2) Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de abscisas que determina sobre el eje de ordenadas un segmento de -7 unidades.
- 3) Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de abscisas que pasa por $P(0,4)$.
- 4) Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por $P(-9,0)$.
- 5) Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por $M(-5,-2)$.
- 6) Determinar la ecuación de la recta paralela al eje de abscisas que pasa por $N(3\sqrt{5}, 2\sqrt{3})$.
- 7) Un cuadrado de lado 6 está en el primer cuadrante de un sistema de ejes cartesianos y dos de sus lados coinciden con los ejes. Escribir las ecuaciones de las rectas a las que pertenecen sus lados.
- 8) Un rectángulo de largo 10 y de ancho 8 está en el primer cuadrante coincidiendo el largo con el eje de abscisas y el ancho con el de ordenadas. Determinar las ecuaciones de sus lados.
- 9) Un cuadrado de lado 7 está situado sobre un sistema de ejes coordenados de tal forma que sus lados son paralelos a los ejes y su centro coincide con el origen del sistema. Determinar las ecuaciones de los lados.
- 10) Un cuadrado de diagonal 6 está situado en el tercer cuadrante de un sistema de ejes coordenados y dos de sus lados coinciden con los ejes. Hallar las ecuaciones de sus lados.
- 11) El ancho y el largo de un rectángulo coinciden, respectivamente, con los ejes de abscisas y de ordenadas de un sistema cartesiano. Hallar las ecuaciones de los lados del rectángulo sabiendo que éste está en el segundo cuadrante, que su ancho es 28 y su diagonal 53.
- 12) Determinar las ecuaciones de los lados del rectángulo de la Fig. 1.
- 13) Determinar las ecuaciones de los lados del rectángulo de la Fig. 2.
- 14) Determinar las ecuaciones de los lados del rectángulo de la Fig. 3.

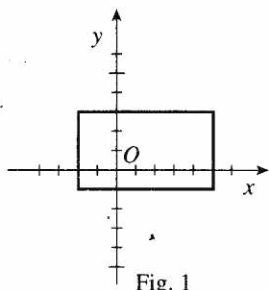


Fig. 1

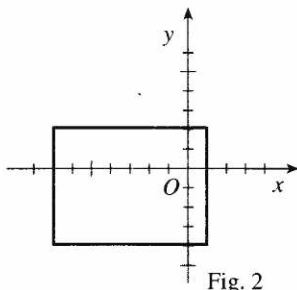


Fig. 2

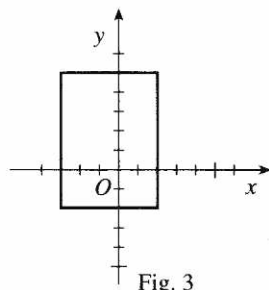


Fig. 3

Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente conocida

Sea una recta l de pendiente conocida m y que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$. Por la definición que hemos dado de línea recta, cualquier par de puntos diferentes de ella forman un segmento que tiene la misma pendiente m . En consecuencia, la pendiente del segmento que determinan un punto cualquiera $P(x, y)$ y el punto $P_1(x_1, y_1)$ es m .

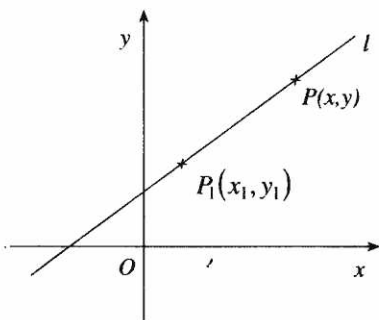
Utilizando la relación (5^G):

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

expresión de la que se obtiene la que sigue:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)} \quad (9^G)$$

que es la relación que utilizaremos para hallar la ecuación de la recta cuando conozcamos su pendiente y un punto de ella.



Ecuación general de la recta

Cuando la ecuación de la recta está en la forma

$$\boxed{Ax + By + C = 0} \quad (10^G)$$

se dice que está escrita en *forma general*. A menos que se pida otra forma (como veremos más adelante), las ecuaciones que obtengamos las llevaremos siempre a la forma general.

Ejemplo 47

Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(4, -5)$ y $B(-1, 9)$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 150° .

Para poder utilizar la relación (9^G) necesitamos conocer la pendiente de la recta y un punto por el que pasa.

La pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con el eje de abscisas:

$$m = \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

El punto por el que pasa la recta es el punto medio del segmento AB . Calculamos sus coordenadas:

$$x = \frac{4-1}{2} \qquad y = \frac{-5+9}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad y = 2$$

Las coordenadas del punto son, por tanto:

$$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

Utilizamos (9⁶) para hallar la ecuación de la recta y la llevamos a su forma general:

$$y - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y - 2 = -\frac{\sqrt{3}x}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{6}$$

$$6y - 12 = -2\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3}x + 6y - 12 - 3\sqrt{3} = 0$$

Ejemplo 48

Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $P\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y es perpendicular al segmento de extremos $A(-5, 3)$ y $B(4, 7)$.

Para poder utilizar la relación (9⁶) necesitamos conocer la pendiente de la recta. Dado que es perpendicular al segmento AB su pendiente y la del segmento AB serán negativamente recíprocas:

$$m = -\frac{1}{m_{(A,B)}}$$

Calculamos la pendiente del segmento AB :

$$m_{(A,B)} = \frac{7-3}{4+5} = \frac{4}{9}$$

Sustituyendo en la expresión anterior tendremos:

$$m = -\frac{9}{4}$$

Utilizando ahora (9⁶) y llevando la ecuación a la forma general:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{9x}{4} - \frac{3}{2}$$

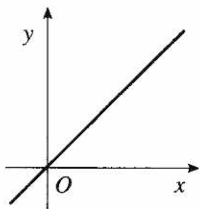
$$4y - 2 = -9x - 6$$

$$9x + 4y + 4 = 0$$

Ejemplo 49

Hallar la ecuación general de la bisectriz del primer cuadrante.

La bisectriz del primer cuadrante pasa por el origen $O(0,0)$ del sistema y forma con el eje de abscisas un ángulo de 45° .



Su pendiente es entonces:

$$m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Utilizando (9⁶):

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$y = x$$

$$x - y = 0$$

Ejercicio 99

Hallar la ecuación general de la recta ...

- 1) ... de pendiente 3 y que pasa por $A(-3,5)$.
- 2) ... de pendiente -4 y que pasa por $B(8,-3)$.
- 3) ... que pasa por $M(4, \sqrt{3})$ y forma con el eje de abscisas un ángulo de 60° .
- 4) ... de pendiente -7 y que pasa por el origen.
- 5) ... de pendiente $-\frac{3}{5}$ y que pasa por $P(-2,0)$.
- 6) ... paralela al segmento de extremos $A(4,5)$ y $B(-7,3)$ y que pasa por el punto $M(-9,-6)$.
- 7) ... de pendiente $\frac{7}{3}$ que pasa por el punto $R(\frac{5}{2}, -\frac{3}{5})$.
- 8) ... que pasa por $S(\frac{3}{4}, \frac{2}{3})$ y tiene pendiente $\frac{5}{2}$.
- 9) ... que pasa por $T(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4})$ y forma con el eje x un ángulo de 120° .
- 10) ... de pendiente $-\frac{3}{2}$ y que pasa por el punto medio del segmento de extremos $M(4,-5)$ y $N(8,10)$.
- 11) ... que pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(\frac{5}{2}, \frac{2}{3})$ y $B(-\frac{17}{3}, \frac{15}{4})$ sabiendo que su pendiente es $\frac{5}{2}$.
- 12) ... de pendiente $\frac{1}{4}$ que pasa por el primer punto de trisección del segmento de extremos $P(-4,9)$ y $Q(17,-6)$.
- 13) ... que pasa por el segundo de los puntos que dividen en siete partes iguales al segmento de extremos $M(-10,18)$ y $N(4,-3)$, sabiendo que el ángulo que forma con el eje de abscisas es de 45° .

- 14) ... que forma con el eje de abscisas un ángulo de 135° y pasa por el bari-centro del triángulo cuyos vértices son $A(4,7)$; $B(1,-8)$ y $C(-9,3)$.
- 15) ... que es perpendicular al segmento de extremos $M(5,4)$ y $N(-4,11)$ y pasa por el punto $P(-1,2)$.
- 16) Hallar la ecuación general de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.
- 17) Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento de extremos $A(5,6)$ y $B(-1,2)$.
- 18) Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $M(7,-3)$ y $N(9,4)$.

En los siguientes ejercicios se dan los vértices de un triángulo. Hallar en cada caso las ecuaciones generales de las tres mediatrices, de las tres alturas y de las tres medianas y las longitudes de las medianas:

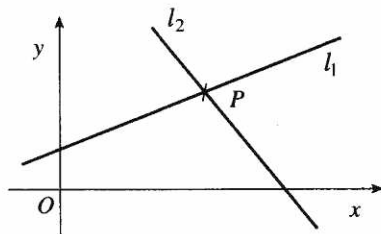
- 19) $A(-1,4)$; $B(7,1)$; $C(2,-3)$.
- 20) $A(1,6)$; $B(3,-1)$; $C(-2,-6)$.
- 21) $A(-2,-5)$; $B(2,8)$; $C(6,-3)$.

Intersección de rectas

Sea P el punto de intersección de dos rectas l_1 y l_2 no paralelas y de ecuaciones conocidas.

Como P pertenece a ambas rectas, sus coordenadas deben satisfacer ambas ecuaciones.

Para hallar las coordenadas de P basta, entonces, resolver el sistema que forman las ecuaciones de l_1 y l_2 .



Ejemplo 50

Determinar el punto de intersección de las rectas $l_1 \equiv 3x - 2y + 7 = 0$ y $l_2 \equiv x + y - 5 = 0$.

Formamos un sistema con las ecuaciones de l_1 y l_2 :

$$\begin{cases} 3x - 2y = -7 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Multiplicando por 2 la segunda ecuación y aplicando el método de reducción:

$$\begin{array}{rcl} \begin{cases} 3x - 2y = -7 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases} \\ \hline 5x \qquad \quad = 3 \end{array}$$

$$x = \frac{3}{5}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\frac{3}{5} + y = 5$$

$$y = \frac{22}{5}$$

El punto de intersección es:

$$\left(\frac{3}{5}, \frac{22}{5}\right)$$

Ejemplo 51

Determinar si las rectas $l_1 \equiv 2x + y - 3 = 0$, $l_2 \equiv x + 3y + 1 = 0$ y $l_3 \equiv 7x - 7y - 1 = 0$ se intersectan en un mismo punto.

Hallamos el punto de intersección de l_1 y l_2 formando un sistema con sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$$

La solución del sistema nos da el punto de intersección:

$$\left(\frac{8}{7}, \frac{5}{7}\right)$$

Si la recta l_3 se intersecta con las otras dos en el punto que acabamos de hallar, este punto pertenece también a l_3 y debe, por tanto, satisfacer su ecuación.

Comprobamos si es así sustituyendo las variables por las coordenadas del punto:

$$7\left(\frac{8}{7}\right) - 7\left(\frac{5}{7}\right) - 1 = 0$$

$$8 - 5 - 1 = 0$$

$$2 = 0 \quad (\text{Falso})$$

Las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación de l_3 . Concluimos que l_3 no pasa por el punto de intersección de l_1 y l_2 y, por tanto, las rectas no se intersectan en el mismo punto.

Ejercicio 100

Determinar, en cada uno de los siguientes ejercicios, el punto de intersección de las rectas l_1 y l_2 :

$$1) \quad l_1 \equiv 3x - 2y + 8 = 0; \quad l_2 \equiv 4x - 7y + 15 = 0$$

$$2) \quad l_1 \equiv 5x + 2y - 6 = 0; \quad l_2 \equiv 4x - 7y + 21 = 0$$

$$3) \quad l_1 \equiv 5x - 7y - 29 = 0; \quad l_2 \equiv 8x + 3y - 18 = 0$$

- 4) $l_1 \equiv 5x - 3y - 50 = 0$; $l_2 \equiv 7x - 4y - 68 = 0$
 5) $l_1 \equiv 3x - 4y + 5 = 0$; $l_2 \equiv 5x + 6y + 40 = 0$
 6) $l_1 \equiv 5x + 3y - 7 = 0$; $l_2 \equiv 4x + 5y - 3 = 0$
 7) $l_1 \equiv 4x - 3y + 1 = 0$; $l_2 \equiv 6x + 5y - 46 = 0$
 8) $l_1 \equiv 6x - 4y - 13 = 0$; $l_2 \equiv 3x + 8y + 1 = 0$
 9) $l_1 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 5 = 0$; $l_2 \equiv \sqrt{6}x + y - 4\sqrt{2} = 0$
 10) $l_1 \equiv 3\sqrt{5}x + 2\sqrt{7}y - 1 = 0$; $l_2 \equiv 11x + 3\sqrt{35}y + 10\sqrt{5} = 0$

Determinar en los siguientes casos si las rectas l_1 , l_2 y l_3 se intersectan en el mismo punto. De ser afirmativa la respuesta, señalar el punto de intersección:

- 11) $l_1 \equiv x + 2y - 4 = 0$; $l_2 \equiv 5x - 6y - 12 = 0$; $l_3 \equiv 3x + 4y - 11 = 0$
 12) $l_1 \equiv x + 2y + 2 = 0$; $l_2 \equiv 3x + 5y + 3 = 0$; $l_3 \equiv x - y - 11 = 0$
 13) $l_1 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{5}y - 8 = 0$; $l_2 \equiv 2\sqrt{5}x - 3\sqrt{3}y + \sqrt{15} = 0$; $l_3 \equiv \sqrt{15}x - 2y - \sqrt{5} = 0$
 14) $l_1 \equiv x + y - 3 = 0$; $l_2 \equiv 2x + 3y + 1 = 0$; $l_3 \equiv x - y - 10 = 0$

Hallar en los siguientes casos la ecuación general de la recta sabiendo que...

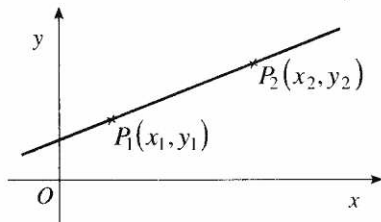
- 15) ... su pendiente es 3 y pasa por la intersección de $l_1 \equiv x + 3y + 1 = 0$ y $l_2 \equiv 7x - 6y + 16 = 0$.
 16) ... forma con el eje de abscisas un ángulo de tangente -4 y pasa por la intersección de $l_1 \equiv 3x + 7y - 15 = 0$ y $l_2 \equiv 7x - 11y - 35 = 0$.
 17) ... forma con el eje de abscisas un ángulo de 60° y concurre en un punto con las rectas $l_1 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv 5\sqrt{6}x + 7y - 8\sqrt{2} = 0$.
 18) ... es paralela al segmento de extremos $M(4, -3)$ y $N(-4, 5)$ y pasa por la intersección de $l_1 \equiv 2x + 5y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv 4x - 15y - 12 = 0$.
 19) ... es perpendicular a la recta que pasa por $A(7, 0)$ y $B(-2, 3)$ y pasa por un punto que pertenece al mismo tiempo a las rectas $l_1 \equiv 3x + 4y + 3 = 0$ y $l_2 \equiv x - y - 13 = 0$.
 20) ... es paralela al eje x y pasa por la intersección de $l_1 \equiv 7x - 3y + 1 = 0$ y $l_2 \equiv 14x + 3y - 13 = 0$.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos

Si se conocen dos puntos de una recta, puede calcularse su pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Conociendo la pendiente y tomando uno cualquiera de los puntos conocidos, por ejemplo P_1 , podemos utilizar la relación (9⁶):



$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

expresión de la que se obtiene esta otra:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}} \quad (11^G)$$

Trasponiendo denominadores y multiplicando tenemos:

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1) \quad (a)$$

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$$

Esta expresión es el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (12^G)$$

Si, por otra parte, desarrollamos la ecuación (a), tendremos:

$$x_2 y - x_2 y_1 - x_1 y + x_1 y_1 = x y_2 - x y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1$$

$$x y_1 + x_2 y + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x y_2 - x_1 y = 0$$

$$(x y_1 + x_2 y + x_1 y_2) - (x_2 y_1 + x y_2 + x_1 y) = 0$$

Esta última expresión es el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (13^G)$$

Cualquiera de las tres relaciones (11^G), (12^G) y (13^G), nos permite calcular la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Sin embargo, se puede hacer caso omiso de ellas y, determinando previamente la pendiente, utilizar la relación (9^G) para calcular la ecuación, tal como se muestra en el ejemplo 52.

Ejemplo 52

Hallar la ecuación general de la recta que pasa por los puntos A(-3,7) y B(4,-6).

Conociendo dos puntos de la recta, podemos calcular su pendiente:

$$m = \frac{-6-7}{4+3} = -\frac{13}{7}$$

Tomando el punto A y utilizando (9^G):

$$y - 7 = -\frac{13}{7}(x + 3)$$

$$7y - 49 = -13x - 39$$

$$\boxed{13x + 7y - 10 = 0}$$

Ejemplo 53

Resolver el ejercicio anterior utilizando la relación (12^G).

Sustituimos en la relación (12^G) los valores dados:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 \\ 4+3 & -6-7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-7 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$-13(x+3) - 7(y-7) = 0$$

$$-13x - 39 - 7y + 49 = 0$$

$$13x + 7y - 10 = 0$$

Ejercicio 101

En los siguientes ejercicios se dan dos puntos de una recta. Hallar en cada caso la ecuación general. Utilícense, alternadamente, las relaciones (9^G), (11^G), (12^G) y (13^G) para calcularlas:

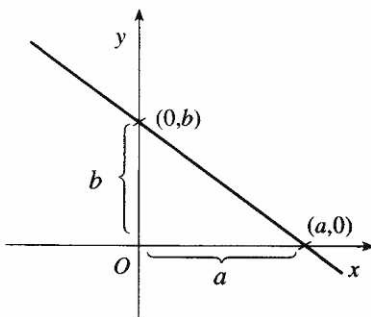
- 1) $A(4, -3)$; $B(5, 0)$
- 2) $C(-2, 7)$; $D(-3, -1)$
- 3) $E(0, -5)$; $F(4, 1)$
- 4) $G(9, -1)$; $H(-7, 9)$
- 5) $K(\frac{1}{2}, 4)$; $L(-3, 5)$
- 6) $M(8, 0)$; $N(0, -4)$
- 7) $P(-3, -7)$; $Q(-1, -2)$
- 8) $R(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2})$; $S(3\sqrt{3}, -\frac{5\sqrt{2}}{2})$

Ordenada en el origen y abscisa en el origen

Se llama *ordenada en el origen* el valor que toma la ordenada en la ecuación de una recta cuando la abscisa es cero. La ordenada en el origen se designa con la letra b .

Se llama *abscisa en el origen* el valor que toma la abscisa en la ecuación cuando la ordenada es cero. La abscisa en el origen se designa con la letra a .

Es obvio que a y b son las longitudes de los segmentos que una recta determina, respectivamente, sobre los ejes de abscisas y ordenadas.



Ecuación de la recta conocidas su pendiente y su ordenada en el origen (ecuación reducida)

Sea l una recta de pendiente conocida m y ordenada en el origen, conocida también, b .

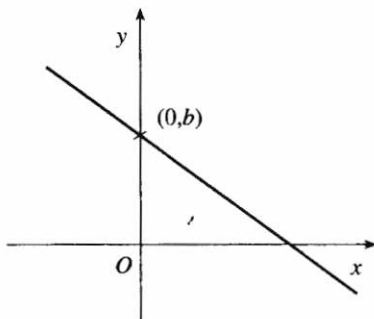
Conociendo su pendiente y un punto por el que pasa, el punto $(0, b)$, podemos utilizar la relación (9^G) para hallar la ecuación de la recta:

$$y - b = m(x - 0)$$

$$y - b = mx$$

$$\boxed{y = mx + b}$$

(14^G)



A esta forma de expresar la ecuación de una recta se le conoce como *ecuación reducida de la recta*.

Ecuación de la recta conocidas su ordenada y su abscisa en el origen (ecuación simétrica o canónica)

Sean a y b los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados. Los puntos en los que la recta intersecta a los ejes serán, en ese caso, los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$.

Hallaremos la ecuación de la recta partiendo de esos datos.

La pendiente de la recta será

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

Tomando ahora el punto $(0, b)$ y utilizando la relación (9^G) tendremos:

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - 0)$$

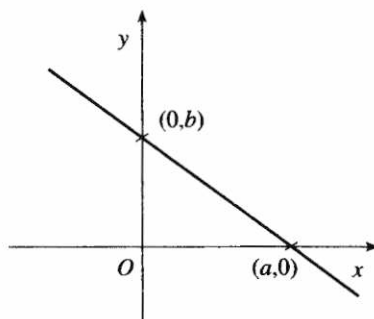
$$y - b = -\frac{b}{a}x$$

$$\frac{b}{a}x + y = b$$

Y, dividiendo todos los términos por b ,

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

(15^G)



Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación simétrica o canónica de la recta*.

Ejemplo 54

La ecuación general de una recta es $2x + 7y - 14 = 0$. Expresar la ecuación en

forma reducida y en forma simétrica.

Para expresar la ecuación en forma reducida basta despejar la variable y :

$$2x + 7y - 14 = 0$$

$$7y = -2x + 14$$

$$y = -\frac{2}{7}x + 2$$

Para expresarla en forma simétrica o canónica pasaremos primero el término independiente al miembro de la derecha:

$$2x + 7y = 14$$

En la forma simétrica, el miembro de la derecha debe ser la unidad. Para que así sea, dividimos cada término por 14:

$$\frac{2x}{14} + \frac{7y}{14} = \frac{14}{14}$$

Simplificando:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{2} = 1$$

Ejercicio 102

Expresar en forma reducida y en forma simétrica o canónica las siguientes ecuaciones de rectas dadas en forma general:

1) $9x + 5y - 45 = 0$

2) $2x - y - 12 = 0$

3) $4x - 3y + 12 = 0$

4) $2x + y + 10 = 0$

5) $8x + 3y - 6 = 0$

6) $5x + 3y - 5 = 0$

7) $6x + 3y + 4 = 0$

8) $2x - 3y + 36 = 0$

9) $2x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0$

10) $Ax + By + C = 0$

Ejemplo 55

Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por $A(7, -3)$ y $B(-2, 8)$.

Hallamos, en primer lugar, la pendiente:

$$m = \frac{8+3}{-2-7} = -\frac{11}{9}$$

Con la pendiente y uno cualquiera de los puntos hallamos la ecuación de la recta utilizando (9⁶):

$$\begin{aligned}y + 3 &= -\frac{11}{9}(x - 7) \\9y + 27 &= -11x + 77 \\11x + 9y &= 50\end{aligned}$$

Dividimos cada término por 50 para que el miembro de la derecha sea la unidad:

$$\frac{11x}{50} + \frac{9y}{50} = 1$$

Dividimos numerador y denominador de las dos fracciones del miembro de la izquierda por 11 y por 9, respectivamente, para obtener la ecuación en forma simétrica:

$$\boxed{\frac{x}{\frac{50}{11}} + \frac{y}{\frac{50}{9}} = 1}$$

Ejemplo 56

Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $M(7,4)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es -5 .

La ecuación simétrica o canónica de esa recta es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{I})$$

Si esa recta pasa por el punto M , las coordenadas de ese punto deben satisfacer la ecuación:

$$\frac{7}{a} + \frac{4}{b} = 1 \quad (\text{II})$$

Por otra parte sabemos que:

$$a + b = -5$$

Despejando b :

$$b = -a - 5 \quad (\text{III})$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (II):

$$\begin{aligned}\frac{7}{a} + \frac{4}{-a-5} &= 1 \\ \frac{7}{a} - \frac{4}{a+5} &= 1\end{aligned}$$

Multiplicando por $a(a+5)$ para eliminar denominadores

$$7(a+5) - 4a = a(a+5)$$

Resolviendo:

$$7a + 35 - 4a = a^2 + 5a$$

$$a^2 + 2a - 35 = 0$$

$$(a + 7)(a - 5) = 0$$

$$a_1 = -7$$

$$a_2 = 5$$

Sustituyendo en (III) obtenemos los valores correspondientes de b :

$$b_1 = 7 - 5$$

$$b_2 = -5 - 5$$

$$b_1 = 2$$

$$b_2 = -10$$

El problema tiene dos soluciones.

La primera solución la obtenemos sustituyendo a y b en la ecuación (I) por a_1 y b_1 , respectivamente, y llevando la ecuación a la forma general:

$$\frac{x}{-7} + \frac{y}{2} = 1$$

Multiplicando toda la ecuación por -14 :

$$2x - 7y = -14$$

$$2x - 7y + 14 = 0$$

Para obtener la segunda solución sustituimos esta vez por a_2 y b_2 :

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-10} = 1$$

$$2x - y = 10$$

$$2x - y - 10 = 0$$

Otra forma

de resolver el ejemplo 56:

Sabemos que la recta pasa por $M(7,4)$. Su ecuación es, por tanto:

$$y - 4 = m(x - 7) \quad (I)$$

Llevando a la forma reducida:

$$y - 4 = mx - 7m$$

$$y = mx - 7m + 4$$

En la ecuación reducida el término independiente es la ordenada en el origen b :

$$b = -7m + 4$$

La abscisa en el origen es el valor de la abscisa cuando la ordenada es cero. Haciendo $y = 0$ tenemos:

$$mx - 7m + 4 = 0$$

$$x = \frac{7m - 4}{m} = a$$

La suma de los segmentos que determina la recta sobre los ejes coordenados es -5:

$$a + b = -5$$

Sustituyendo los valores de a y b :

$$\frac{7m - 4}{m} - 7m + 4 = -5$$

Resolviendo:

$$\frac{7m - 4}{m} = 7m - 9$$

$$7m - 4 = 7m^2 - 9m$$

$$7m^2 - 16m + 4 = 0$$

$$(7m - 14)(m - 2) = 0$$

$$m_1 = 2, \quad m_2 = \frac{2}{7}$$

Sustituyendo m en (I) por el valor de m_1 , se obtiene la primera solución:

$$2x - y - 10 = 0$$

Sustituyendo por m_2 , la segunda:

$$2x - 7y + 14 = 0$$

Ejemplo 57

Una recta que pasa por $P(-4, 3)$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área 3. Hallar su ecuación general.

La ecuación simétrica de la recta es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (\text{I})$$

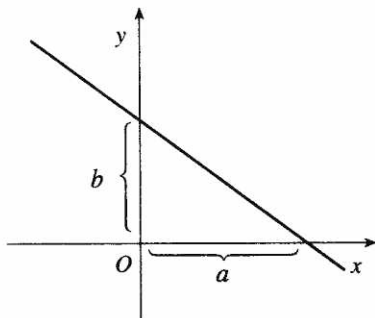
Las coordenadas de P deben satisfacer la ecuación, dado que pertenece a la recta:

$$\frac{-4}{a} + \frac{3}{b} = 1 \quad (\text{II})$$

Toda recta no paralela a uno de los ejes forma con ellos un triángulo rectángulo en el que los catetos son a y b , es decir, la abscisa y la ordenada en el origen. El área de ese triángulo es $\frac{ab}{2}$ y el problema nos dice que en nuestro caso es igual a 3.

Tenemos, por tanto, que:

$$\frac{ab}{2} = 3$$



Despejando a :

$$ab = 6$$

$$a = \frac{6}{b}$$

(III)

Sustituyendo este valor en (II):

$$\frac{-4}{\frac{6}{b}} + \frac{3}{b} = 1$$

Resolviendo:

$$\frac{-2b}{3} + \frac{3}{b} = 1$$

$$-2b^2 + 9 = 3b$$

$$2b^2 + 3b - 9 = 0$$

$$(2b + 6)(2b - 3) = 0$$

$$b_1 = -3 \qquad b_2 = \frac{3}{2}$$

Sustituyendo en (III) se obtienen los valores correspondientes de a :

$$a_1 = \frac{6}{-3}, \qquad a_2 = \frac{6}{\frac{3}{2}}$$

$$a_1 = -2 \qquad a_2 = 4$$

Sustituyendo en (I) y llevando la ecuación a la forma general:

Primera solución:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$$

$$3x + 2y = -6$$

$$\boxed{3x + 2y + 6 = 0}$$

Segunda solución:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 1$$

$$3x + 8y = 12$$

$$\boxed{3x + 8y - 12 = 0}$$

Otra forma

de resolver el ejemplo 57:

La recta pasa por $P(-4, 3)$. Su ecuación es:

$$y - 3 = m(x + 4)$$

(I)

En forma reducida:

$$y = mx + 4m + 3$$

La ecuación reducida nos da directamente el valor de b :

$$b = 4m + 3$$

Haciendo $y = 0$ obtenemos la abscisa en el origen:

$$mx + 4m + 3 = 0$$

$$x = -\frac{4m+3}{m} = a$$

El área del triángulo que forma la recta con los ejes es:

$$A = \frac{ab}{2} = 3$$

De donde:

$$ab = 6$$

Sustituyendo los valores obtenidos de a y de b y resolviendo:

$$-\frac{4m+3}{m}(4m+3) = 6$$

$$(4m+3)^2 = -6m$$

$$16m^2 + 24m + 9 = -6m$$

$$16m^2 + 30m + 9 = 0$$

$$(16m+24)(16m+6) = 0$$

$$m_1 = -\frac{3}{2}$$

$$m_2 = -\frac{3}{8}$$

Sustituyendo estos valores en (I) se obtienen las dos soluciones:

$$3x + 2y + 6 = 0$$

$$3x + 8y - 12 = 0$$

Ejemplo 58

La diferencia entre los segmentos que determina una recta sobre los ejes coordenados es 9. Hallar su ecuación general sabiendo que su pendiente es $\frac{1}{2}$.

No habiendo indicaciones en otro sentido, la diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados será siempre $a - b$. En nuestro caso:

$$a - b = 9$$

Despejando a :

$$a = b + 9$$

(I)

La ecuación reducida de la recta es:

$$y = mx + b$$

En este ejemplo conocemos la pendiente:

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

Llevamos la ecuación a la forma simétrica:

$$\frac{x}{2} - y = -b$$

Dividiendo por $-b$:

$$\frac{x}{-2b} + \frac{y}{b} = 1$$

En la ecuación simétrica, el denominador de la variable x es la abscisa en el origen. Tenemos, por tanto, que:

$$a = -2b \quad (\text{II})$$

Iguando (I) y (II):

$$b + 9 = -2b$$

$$3b = -9$$

$$b = -3$$

Sustituyendo en (II):

$$a = -2(-3)$$

$$a = 6$$

Conociendo los valores de a y b podemos construir la ecuación simétrica de la recta:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-3} = 1$$

Y, en forma general:

$$x - 2y - 6 = 0$$

Otra forma

de resolver el ejemplo 58.

La pendiente de la recta es $\frac{1}{2}$, por lo cual su ecuación reducida es:

$$y = \frac{1}{2}x + b \quad (\text{I})$$

Haciendo $y = 0$ obtenemos la abscisa en el origen:

$$\frac{1}{2}x + b = 0$$

$$x = -2b = a$$

La diferencia de los segmentos que la recta determina sobre los ejes es 9:

$$a - b = 9$$

Sustituyendo el valor de a :

$$-2b - b = 9$$

$$b = -3$$

Sustituyendo el valor de b en (I):

$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

De donde:

$$x - 2y - 6 = 0$$

Ejemplo 59

Una recta que pasa por $M(-12, \frac{21}{2})$ forma con los ejes coordenados un triángulo cuyo perímetro es 56. Hallar la ecuación general de la recta.

La ecuación simétrica de la recta es:

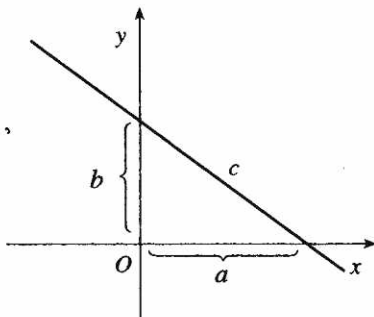
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (I)$$

Las coordenadas de M satisfacen esta ecuación porque es un punto de la recta:

$$\frac{-12}{a} + \frac{\frac{21}{2}}{b} = 1$$

$$\frac{-12}{a} + \frac{21}{2b} = 1 \quad (II)$$

Si llamamos c a la hipotenusa del triángulo que la recta forma con los ejes coordenados, dado que el perímetro es 56, tendremos que:



$$a + b + c = 56 \quad (III)$$

Por Pitágoras sabemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Sustituyendo este valor en (III):

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 56$$

Aislado el radical:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 56 - a - b$$

Elevando al cuadrado y reduciendo términos:

$$(\sqrt{a^2 + b^2})^2 = (56 - a - b)^2$$

$$a^2 + b^2 = 3136 + a^2 + b^2 - 112a - 112b + 2ab$$

$$112a - 2ab = 3136 - 112b$$

$$56a - ab = 1568 - 56b$$

Despejando a :

$$a(56 - b) = 56(28 - b)$$

$$a = \frac{56(28 - b)}{(56 - b)} \quad (IV)$$

Sustituyendo en (II) y resolviendo:

$$\frac{-12}{56(28-b)} + \frac{21}{2b} = 1$$

$$\frac{-3(56-b)}{14(28-b)} + \frac{21}{2b} = 1$$

$$-3(56-b)b + 21 \cdot 7(28-b) = 14(28-b)b$$

$$-168b + 3b^2 + 4116 - 147b = 392b - 14b^2$$

$$17b^2 - 707b + 4116 = 0$$

$$(17b - 588)(17b - 119) = 0$$

$$b_1 = \frac{588}{17} \quad b_2 = 7$$

El primer valor obtenido para b es inadmisibles (b es un cateto y mediría más que el otro cateto y la hipotenusa juntos).

Sustituyendo el otro valor en (IV):

$$a = \frac{56(28-7)}{(56-7)}$$

$$a = \frac{56 \cdot 21}{49}$$

$$a = 24$$

Sustituyendo, por último, el (I) los valores de a y b :

$$\frac{x}{24} + \frac{y}{7} = 1$$

En forma general:

$$7x + 24y - 168 = 0$$

Ejemplo 60

Una recta forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 90. Hallar su ecuación general sabiendo que es perpendicular al segmento de extremos $A(1, -21)$ y $B(10, 19)$.

Tomemos la ecuación simétrica de la recta y llevémosla a la forma reducida:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1$$

$$y = -\frac{bx}{a} + b$$

Sabemos que, en la forma reducida, el coeficiente de la variable x es la pendiente. Por tanto:

$$m = -\frac{b}{a} \quad (I)$$

Hallamos la pendiente del segmento $\overline{AB}$:

$$m_{(A,B)} = \frac{19-21}{10-1} = -\frac{40}{9}$$

La recta cuya ecuación tenemos que hallar es perpendicular al segmento $\overline{AB}$, por lo cual, su pendiente m será:

$$m = -\frac{1}{m_{(A,B)}} = -\frac{9}{40} \quad (II)$$

Igualando (I) y (II) y despejando b :

$$-\frac{b}{a} = -\frac{9}{40}$$

$$b = \frac{9a}{40} \quad (III)$$

El perímetro del triángulo que forma la recta con los ejes es 90. Por tanto:

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 90$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 90 - a - b$$

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = (90 - a - b)^2$$

$$a^2 + b^2 = 8100 + a^2 + b^2 - 180a - 180b + 2ab$$

Reduciendo términos y simplificando:

$$4050 - 90a - 90b + ab = 0 \quad (IV)$$

Sustituyendo en (IV) el valor de b obtenido en (III):

$$4050 - 90a - 90\left(\frac{9a}{40}\right) + a\left(\frac{9a}{40}\right) = 0$$

Simplificando por 9:

$$450 - 10a - \frac{90a}{40} + \frac{a^2}{40} = 0$$

Eliminando denominadores y resolviendo:

$$18000 - 400a - 90a + a^2 = 0$$

$$a^2 - 490a + 18000 = 0$$

$$(a - 450)(a - 40) = 0$$

$$a_1 = 450$$

$$a_2 = 40$$

El primer valor es inadmissible pues un lado del triángulo no puede ser mayor que su perímetro.

Sustituyendo en (III) el otro valor:

$$b = \frac{9 \cdot 40}{40}$$

$$b = 9$$

Conociendo a y b podemos construir la ecuación simétrica de la recta:

$$\frac{x}{40} + \frac{y}{9} = 1$$

En forma general:

$$9x + 40y - 360 = 0$$

Otra forma

de resolver el ejemplo 60:

Calculamos la pendiente del segmento AB :

$$m_{(A,B)} = \frac{19-21}{10-1} = -\frac{40}{9}$$

La recta cuya ecuación buscamos es perpendicular al segmento AB , por tanto su pendiente m es:

$$m = -\frac{1}{m_{(A,B)}} = -\frac{9}{40}$$

Y su ecuación reducida es:

$$y = -\frac{9}{40}x + b \quad (I)$$

Hacemos $y = 0$ para obtener a :

$$-\frac{9}{40}x + b = 0$$

De donde:

$$x = \frac{40b}{9} = a$$

Si llamamos c a la hipotenusa del triángulo que la recta forma con los ejes coordenados, tenemos, aplicando Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Sustituyendo a :

$$c^2 = \left(\frac{40b}{9}\right)^2 + b^2$$

$$c^2 = \frac{1600b^2}{81} + b^2$$

$$c^2 = \frac{1681b^2}{81}$$

$$c = \frac{41b}{9}$$

El perímetro del triángulo es 90:

$$a + b + c = 90$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{40b}{9} + b + \frac{41b}{9} = 90$$

$$10b = 90$$

$$b = 9$$

Sustituyendo en (I):

$$y = -\frac{9}{40}x + 9$$

$$40y = -9x + 360$$

$$9x + 40y - 360 = 0$$

Ejercicio 103

- 1) Hallar la ecuación reducida de la recta que pasa por los puntos $A(-3,2)$ y $B(5,-3)$.
- 2) Hallar la ecuación simétrica de la recta de pendiente 5 que pasa por el punto $M(-4,-5)$.
- 3) Hallar la ecuación simétrica de la recta que pasa por los puntos $M(3,2)$ y $N(7,-1)$.
- 4) Hallar la ecuación simétrica de la recta sabiendo que los segmentos que determina sobre los ejes de abscisas y ordenadas miden, respectivamente, 5 y 7 unidades.
- 5) Hallar la ecuación general de la recta que determina segmentos de -3 y 4 unidades, respectivamente, sobre los ejes coordenados.
- 6) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $M(3,-2)$ sabiendo que el segmento que determina sobre el eje de abscisas es el doble del que determina sobre el eje de ordenadas.
- 7) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(-5,8)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 9.
- 8) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(5,4)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es -3.
- 9) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $Q(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ sabiendo que la diferencia de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 8.
- 10) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $A(5,-6)$ si la diferencia de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es -2.
- 11) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $M(-3,3)$ sabiendo que el producto de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 12.
- 12) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $N(3, -\frac{3}{2})$ si el producto de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es -18.
- 13) Una recta que pasa por $A(-2,10)$ forma con los ejes coordenados un triángulo de área 5. Hallar su ecuación general.
- 14) Hallar la ecuación general de la recta que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8 y pasa por el punto $P(-1,-4)$.

- 15) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $M(2,2)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo isósceles.
- 16) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $N(4, -\frac{4}{3})$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 12.
- 17) Una recta que pasa por $P(4,3)$ forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 24. Hallar su ecuación general.
- 18) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{1}{3}$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 8.
- 19) Hallar la ecuación general de la recta paralela al segmento de extremos $A(4,7)$ y $B(6,-3)$ sabiendo que la suma de los segmentos que determina sobre los ejes coordenados es 6.
- 20) La suma de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es -1 . Hallar su ecuación general sabiendo que es perpendicular al segmento de extremos $M(4,6)$ y $N(7,2)$.
- 21) La diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es 9. Hallar su ecuación general sabiendo que su pendiente es $\frac{2}{7}$.
- 22) La diferencia de los segmentos que una recta de pendiente -3 determina sobre los ejes coordenados es 4. Hallar su ecuación general.
- 23) Una recta forma con los ejes un triángulo de área 4. Hallar su ecuación general sabiendo que es paralela al segmento de extremos $A(6,6)$ y $B(4,7)$.
- 24) Hallar la ecuación general de la recta perpendicular al segmento de extremos $A(-1,-4)$ y $B(5,-2)$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 6.
- 25) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{4}{3}$ que forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 12.
- 26) Una recta es perpendicular al segmento de extremos $A(-1,-4)$ y $B(4,8)$ y forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 30. Hallar su ecuación general.
- 27) Hallar la ecuación general de la recta que forma con los ejes coordenados un triángulo tal que su área es $\frac{15}{2}$ y la suma de sus catetos 8.
- 28) Una recta forma con los ejes coordenados un triángulo de área 14. La diferencia entre los catetos del triángulo es 3. Hallar la ecuación general de la recta.
- 29) Una recta forma con los ejes coordenados un triángulo de perímetro 40 y en el que la suma de los catetos es 23. Hallar la ecuación general de la recta.
- 30) El cuadrado de la diferencia de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es 36. Hallar su ecuación general sabiendo que es perpendicular a otra recta de pendiente -5 .
- 31) Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan sobre la recta $l_0 \equiv 2x + 3y - 12 = 0$.
- 32) Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan sobre la recta $l_0 \equiv 3x - 7y + 21 = 0$.

Pendiente y ordenada en el origen a partir de la ecuación general

Al llevar la ecuación general de una recta a la forma reducida, despejando la variable y , se obtiene cuanto sigue:

$$Ax + By + C = 0$$

$$By = -Ax - C$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

En la forma reducida, el coeficiente de la variable x es la pendiente y el término independiente es la ordenada en el origen. Por tanto

$$\boxed{m = -\frac{A}{B}} \quad (16^G)$$

$$y \quad \boxed{b = -\frac{C}{B}} \quad (17^G)$$

Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad en ecuaciones de rectas dadas en forma general

Sean las rectas $l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Las pendientes de esas rectas son, utilizando (16^G),

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \quad y \quad m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

Para que l_1 y l_2 sean rectas paralelas, deben tener igual pendiente, es decir, debe cumplirse que

$$-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$$
$$\boxed{\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}} \quad (18^G)$$

o también, trasponiendo denominadores, que

$$\boxed{A_1B_2 - A_2B_1 = 0} \quad (19^G)$$

Las anteriores son dos formas equivalentes de expresar la condición de paralelismo.

Para que l_1 y l_2 , en cambio, sean perpendiculares el producto de sus pendientes debe ser -1 :

$$\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$$

expresión de la que fácilmente se obtienen estas dos:

$$\frac{A_1}{B_1} = -\frac{B_2}{A_2} \quad (20^G)$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (21^G)$$

Las relaciones (18^G) y (20^G) carecen de sentido cuando los denominadores se anulan, lo que sucede en los casos de rectas paralelas a alguno de los ejes coordenados. Las relaciones (19^G) y (21^G), en cambio, son utilizables aún en esos casos.

Ejemplo 61

Determinar cuánto debe valer k para que las rectas $l_1 \equiv k^2 x + (k+3)y + 7 = 0$ y $l_2 \equiv x - 4y + 11 = 0$ sean perpendiculares.

Para que las rectas sean perpendiculares debe cumplirse que:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (21^G)$$

En nuestro caso:

$$k^2(1) + (k+3)(-4) = 0$$

Resolviendo:

$$k^2 - 4k - 12 = 0$$

$$(k-6)(k+2) = 0$$

$$k_1 = 6 \quad k_2 = -2$$

Ejemplo 62

Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $M(3, \frac{7}{2})$ y es perpendicular a la recta $l_1 \equiv 5x - 2y + 3 = 0$.

Hallamos la pendiente de la recta l_1 :

$$m_1 = -\frac{5}{-2} = \frac{5}{2}$$

La pendiente m de la recta que buscamos será, por ser ésta perpendicular a l_1 :

$$m = -\frac{1}{m_1} = -\frac{2}{5}$$

Teniendo la pendiente y un punto, podemos utilizar (9^G) para hallar la ecuación:

$$y - \frac{7}{2} = -\frac{2}{5}(x - 3)$$

$$10y - 35 = -4(x - 3)$$

$$10y - 35 = -4x + 12$$

$$4x + 10y - 47 = 0$$

Ejercicio 104

Determinar, utilizando (16^G) y (17^G), la pendiente y la ordenada en el origen

de las siguientes rectas:

- 1) $5x - 3y + 6 = 0$
- 2) $7x + y - 6 = 0$
- 3) $6x + 8y - 5 = 0$
- 4) $10x - 4y + 7 = 0$
- 5) $3x + 9y - 11 = 0$
- 6) $px + qy + r = 0$

Determinar en cada caso si las rectas l_1 y l_2 son paralelas utilizando las relaciones (18^o) o (19^o):

- 7) $l_1 \equiv 3x + 5y - 1 = 0$; $l_2 \equiv 6x + 10y - 3 = 0$
- 8) $l_1 \equiv \sqrt{2}x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{6} = 0$; $l_2 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 42 = 0$
- 9) $l_1 \equiv \sqrt{5}x + \sqrt{7}y + 1 = 0$; $l_2 \equiv 5x + \sqrt{35}y - 3 = 0$
- 10) $l_1 \equiv 2x - 3\sqrt{2}y + 7 = 0$; $l_2 \equiv 2\sqrt{2}x - 6y + 11 = 0$
- 11) $l_1 \equiv 10x + 14y + 9 = 0$; $l_2 \equiv 15x + 21y - 10 = 0$
- 12) $l_1 \equiv 12x - 18y - 7 = 0$; $l_2 \equiv 3x - 6y + 1 = 0$
- 13) $l_1 \equiv 4x + 5 = 0$; $l_2 \equiv x - 7 = 0$

Determinar en cada caso si las rectas l_1 y l_2 son perpendiculares utilizando las relaciones (20^o) o (21^o):

- 14) $l_1 \equiv 2x + 4y - 7 = 0$; $l_2 \equiv 6x - 3y + 4 = 0$
- 15) $l_1 \equiv 7x + 14y + 1 = 0$; $l_2 \equiv 4x + 2y - 9 = 0$
- 16) $l_1 \equiv 8x - 4y - 11 = 0$; $l_2 \equiv 3x - 6y + 17 = 0$
- 17) $l_1 \equiv 4x - 2y + 7 = 0$; $l_2 \equiv 3x + 5y - 9 = 0$
- 18) $l_1 \equiv \sqrt{6}x - 3y + 1 = 0$; $l_2 \equiv \sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 7 = 0$
- 19) $l_1 \equiv \sqrt{2}x + \sqrt{10}y + 9 = 0$; $l_2 \equiv 5x - \sqrt{5}y + 4 = 0$
- 20) $l_1 \equiv 5x - 2 = 0$; $l_2 \equiv 3y + 1 = 0$

- 21) Determinar el valor de k para que $l_1 \equiv kx + (k+5)y - 1 = 0$ sea paralela a $l_2 \equiv 4x + 3y - 9 = 0$.
- 22) Determinar el valor de k para que $l_1 \equiv (k+1)x + (k-2)y + 3 = 0$ sea perpendicular a $l_2 \equiv 7x - 3y + 1 = 0$.
- 23) Determinar el valor de k para que $l_1 \equiv k^2x + (5k-3)y + 3 = 0$ sea paralela a $l_2 \equiv 3x + 4y - 5 = 0$.
- 24) Determinar el valor de k para que $l_1 \equiv (k^2+1)x - (8k+6)y + 4 = 0$ sea perpendicular a $l_2 \equiv 6x + 2y + 7 = 0$.

- 25) Determinar k para que $l_1 \equiv (k^3 + 5k)x + (k^4 + 3k^2 + 24)y - 7 = 0$ sea paralela a $l_2 \equiv x - 10y + 5 = 0$.
- 26) Determinar k para que $l_1 \equiv (k^3 + 17k)x + (4k^2 + 5)y + 11 = 0$ sea perpendicular a $l_2 \equiv x + 2y - 1 = 0$.
- 27) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $A(3, -2)$ y es paralela a la recta $l_1 \equiv 6x - 2y + 7 = 0$.
- 28) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $B(-4, \frac{5}{2})$ y es perpendicular a $l_1 \equiv 3x - y - 4 = 0$.
- 29) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 9x - 6y + 7 = 0$ y que biseca el segmento de extremos $M(4, -3)$ y $N(8, 7)$.
- 30) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a $l_1 \equiv 10x - 15y + 6 = 0$.
- 31) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de las rectas $l_1 \equiv 2x - 3y - 17 = 0$ y $l_2 \equiv 5x + 4y - 8 = 0$ y es perpendicular a la recta $l_3 \equiv 5x - 4y + 10 = 0$.
- 32) Determinar el valor que deben tomar a y b para que las rectas de ecuaciones $l_1 \equiv (a - b)x + (6b - a)y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv 8x + (2a - 3b)y + 5 = 0$ sean paralelas y formen ambas con el eje de abscisas un ángulo de 135° .
- 33) Demostrar que las rectas $l_1 \equiv 5x - 2y + 23 = 0$; $l_2 \equiv 2x - 9y - 42 = 0$; $l_3 \equiv 5x - 2y - 18 = 0$ y $l_4 \equiv 2x - 9y + 1 = 0$ forman un paralelogramo y hallar las ecuaciones generales de sus diagonales.
- 34) Demostrar que las rectas $l_1 \equiv 3x - 2y + 11 = 0$; $l_2 \equiv 2x + 3y - 10 = 0$; $l_3 \equiv 3x - 2y - 2 = 0$ y $l_4 \equiv 2x + 3y + 3 = 0$ forman un cuadrado.

Angulo que forman dos rectas cuyas ecuaciones están dadas en forma general

Sean dos rectas $l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$ de pendientes $m_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ y $m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$

Hemos demostrado con anterioridad que el ángulo formado por dos rectas l_1 y l_2 (siendo l_1 la recta inicial y l_2 la final) se puede hallar utilizando la relación

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \quad (m_2 m_1 \neq -1) \quad (6^G)$$

Sustituyendo valores:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{A_2}{B_2} + \frac{A_1}{B_1}}{1 + \left(-\frac{A_2}{B_2}\right)\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}$$

Multiplicando numerador y denominador por $B_1 B_2$ y simplificando:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-A_2 B_1 + A_1 B_2}{B_1 B_2 + A_1 A_2}$$

Ordenando:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (22^G)$$

Ejemplo 63

Hallar qué ángulo forman las rectas $l_1 \equiv 8x - 3y + 9 = 0$ y $l_2 \equiv 2x + 5y - 4 = 0$.

Sustituyendo en (22^G) los valores correspondientes:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{8 \cdot 5 - 2(-3)}{8 \cdot 2 + (-3)5}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{40 + 6}{16 - 15}$$

$$\operatorname{tg} \theta = 47$$

$$\theta = 88^\circ 47'$$

Ejemplo 64

Determinar cuáles deben ser los valores de A y B para que las rectas $l_1 \equiv 7x + 8y - 2 = 0$ y $l_2 \equiv Ax + By - 13 = 0$ formen un ángulo de 135° sabiendo que l_2 pasa por el punto $P(1, -2)$.

Sustituimos en (22^G) los valores correspondientes:

$$\operatorname{tg} 135^\circ = \frac{7B - 8A}{7A + 8B}$$

$$\frac{7B - 8A}{7A + 8B} = -1$$

$$7B - 8A = -7A - 8B$$

$$A - 15B = 0 \quad (I)$$

Como l_2 pasa por P , las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de l_2 :

$$A(1) + B(-2) - 13 = 0$$

$$A - 2B = 13 \quad (II)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones (I) y (II):

$$\begin{cases} A - 15B = 0 \\ A - 2B = 13 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$A = 15$$

$$B = 1$$

Calcular en los siguientes casos el ángulo que forman las rectas l_1 y l_2 :

- 1) $l_1 \equiv 6x + 7y + 1 = 0$; $l_2 \equiv 4x + y - 2 = 0$
- 2) $l_1 \equiv 4x + 9y - 8 = 0$; $l_2 \equiv x - y + 2 = 0$
- 3) $l_1 \equiv 6x + 7y + 2 = 0$; $l_2 \equiv 7x - 2y + 1 = 0$
- 4) $l_1 \equiv 11x - 2y + 9 = 0$; $l_2 \equiv 4x - 9y - 4 = 0$
- 5) $l_1 \equiv 4x + 5y - 2 = 0$; $l_2 \equiv x - 4 = 0$
- 6) $l_1 \equiv 5x - 14y + 3 = 0$; $l_2 \equiv 2x + 3y - 11 = 0$
- 7) Calcular B para que las rectas $l_1 \equiv 3x + By + 1 = 0$ y $l_2 \equiv 5x + 2y - 2 = 0$ formen un ángulo de 135° .
- 8) Determinar el valor de A para que las rectas $l_1 \equiv 3x - 2y + 1 = 0$ y $l_2 \equiv Ax + y - 2 = 0$ formen un ángulo de 45° .
- 9) Determinar los valores de A y B sabiendo que las rectas $l_1 \equiv Ax + By - 3 = 0$ y $l_2 \equiv 3x + y + 2 = 0$ forman un ángulo de $78^\circ 42'$ y que l_1 pasa por el punto $P(-1, -1)$. (Tómese $\text{tg} 78^\circ 42' = 5$).
- 10) Determinar los valores de A y B sabiendo que las rectas $l_1 \equiv 2x + 5y - 3 = 0$ y $l_2 \equiv Ax + By - 1 = 0$ forman un ángulo de $63^\circ 26'$ y que l_2 pasa por el punto $P(\frac{1}{4}, \frac{1}{9})$. (Tómese $\text{tg} 63^\circ 26' = 2$).
- 11) Determinar los valores de A y B sabiendo que las rectas $l_1 \equiv 2x + y + 5 = 0$ y $l_2 \equiv Ax + By - 9 = 0$ forman un ángulo de $81^\circ 52'$ y que l_2 pasa por el punto $P(3, -2)$. (Tómese $\text{tg} 81^\circ 52' = 7$).

Distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta

$$l \equiv Ax + By + C = 0$$

La distancia d de un punto P a una recta l es la longitud del segmento perpendicular a l trazado desde P . La señalaremos así: $d_{(P,l)}$.

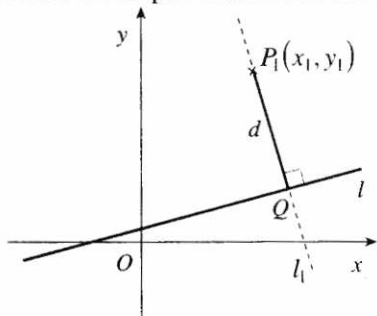
Hay varios métodos para deducir la fórmula que nos permite calcular la distancia de un punto a una recta. El que utilizaremos no es precisamente el más sencillo, pero es el que podemos seguir sin adentrarnos en la consideración previa de otros aspectos que no nos interesa tocar.

Seguiremos el siguiente camino:

1-. Hallaremos la ecuación de la recta l_1 que pasa por P y es perpendicular a l .

2-. Hallaremos las coordenadas de Q , punto de intersección de l y l_1 .

3-. Calcularemos la distancia entre los



puntos P y Q , que será también la distancia entre el punto P y la recta l .

1.- Ecuación de l_1 :

La pendiente de la recta es: $m = -\frac{A}{B}$

La pendiente de la recta l_1 (perpendicular a l) es: $m_1 = -\frac{1}{m} = \frac{B}{A}$

Utilizando (9^o) construimos la ecuación: $y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$

Llevándola a la forma ordinaria de una ecuación lineal: $Ay - Ay_1 = Bx - Bx_1$
 $Bx - Ay = Bx_1 - Ay_1$

2.- Cálculo de las coordenadas de Q :

Formamos un sistema con las ecuaciones de l y l_1 :

$$\begin{cases} Ax + By = -C & (l) \\ Bx - Ay = Bx_1 - Ay_1 & (l_1) \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por A y la segunda por B y sumando miembro a miembro tenemos la abscisa de Q :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A^2x + AB y = -AC \\ B^2x - AB y = B^2x_1 - AB y_1 \end{cases} \\ &\hline (A^2 + B^2)x &= B^2x_1 - AB y_1 - AC \\ x &= \frac{B^2x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Multiplicando, en cambio, la primera ecuación por B y la segunda por $-A$ y sumando obtenemos la ordenada:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} ABx + B^2y = -BC \\ -ABx + A^2y = -ABx_1 + A^2y_1 \end{cases} \\ &\hline (A^2 + B^2)y &= A^2y_1 - ABx_1 - BC \\ y &= \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

Las coordenadas de Q son:

$$Q\left(\frac{B^2x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2}, \frac{A^2y_1 - ABx_1 - BC}{A^2 + B^2}\right)$$

3.- Cálculo de la distancia entre P y Q :

Utilizando (2⁶):

$$d_{(P,Q)} = \sqrt{\left[x_1 - \frac{B^2 x_1 - AB y_1 - AC}{A^2 + B^2} \right]^2 + \left[y_1 - \frac{A^2 y_1 - AB x_1 - BC}{A^2 + B^2} \right]^2}$$

Sacando común denominador en ambos corchetes:

$$= \sqrt{\left[\frac{A^2 x_1 + B^2 x_1 - B^2 x_1 + AB y_1 + AC}{A^2 + B^2} \right]^2 + \left[\frac{A^2 y_1 + B^2 y_1 - A^2 y_1 + AB x_1 + BC}{A^2 + B^2} \right]^2}$$

Reduciendo términos y sacando factor común en ambos numeradores:

$$= \sqrt{\left[\frac{A(Ax_1 + By_1 + C)}{A^2 + B^2} \right]^2 + \left[\frac{B(By_1 + Ax_1 + C)}{A^2 + B^2} \right]^2}$$

Elevando:

$$= \sqrt{\frac{A^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2} + \frac{B^2(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

Sumando:

$$= \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)(Ax_1 + By_1 + C)^2}{(A^2 + B^2)^2}}$$

Simplificando:

$$= \sqrt{\frac{(Ax_1 + By_1 + C)^2}{A^2 + B^2}}$$

$$\boxed{d_{(P,l)} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}} \quad (23^G)$$

El signo del radical $\sqrt{A^2 + B^2}$ se determina de acuerdo a cuanto sigue:

a) Si $C \neq 0$, entonces C y el radical son opuestos:

$$C \neq 0 \Rightarrow \text{Sg}(\sqrt{A^2 + B^2}) = -\text{Sg}(C)$$

b) Si $C = 0$ y $B \neq 0$, entonces B y el radical tienen igual signo:

$$C = 0; B \neq 0 \Rightarrow \text{Sg}(\sqrt{A^2 + B^2}) = \text{Sg}(B)$$

c) Si $C = 0$ y $B = 0$, entonces A y el radical tienen igual signo:

$$C = 0; B = 0 \Rightarrow \text{Sg}(\sqrt{A^2 + B^2}) = \text{Sg}(A)$$

La posición relativa del punto y la recta, según el signo de la distancia

dirigida, será la siguiente:

a) Si la recta no pasa por el origen del sistema, la distancia d será positiva si el punto P y el origen se encuentran a lados opuestos de la recta y será negativa en caso contrario (Ver ejemplo 65).

b) Si la recta pasa por el origen, d será positiva o negativa según que el punto P esté por encima o por debajo de la recta.

Nota: En el caso en que sólo nos interese la longitud del segmento que une a P con la recta l , tomaremos positivo el valor de la distancia:

$$d_{(P,l)} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{+\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (23a^G)$$

Ejemplo 65

Hallar la distancia dirigida del punto $P(4, -3)$ a la recta $l \equiv 16x - 63y + 137 = 0$.

Utilizando la relación (23^G):

$$d_{(P,l)} = \frac{16 \cdot 4 - 63 \cdot (-3) + 137}{-\sqrt{16^2 + 63^2}}$$

Hemos tomado negativo el radical, pues éste y C deben tener distinto signo.

$$\begin{aligned} &= \frac{64 + 189 + 137}{-65} \\ &= \frac{390}{-65} \\ &= \boxed{-6} \end{aligned}$$

Representaremos en forma gráfica la recta y el punto para comprobar su posición relativa.

Llevamos la ecuación a la forma simétrica:

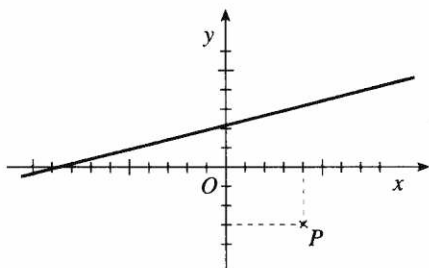
$$\begin{aligned} 16x - 63y &= -137 \\ \frac{16x}{-137} - \frac{63y}{-137} &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{137}{16}} + \frac{y}{\frac{137}{63}} &= 1 \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{137}{16} = -8,56 \\ b &= \frac{137}{63} = 2,17 \end{aligned}$$

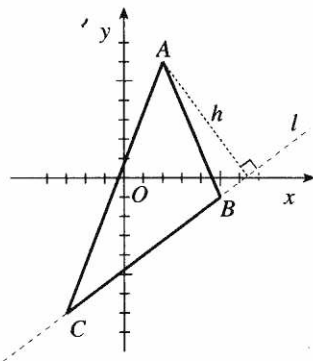
Conociendo a y b podemos fácilmente hacer el gráfico.

La distancia dirigida que obtuvimos resultó ser negativa. En el gráfico podemos observar que, en efecto, el punto P y el origen del sistema están de un mismo lado de la recta.



Ejemplo 66

Los vértices de un triángulo son $A(2,6)$; $B(5,-1)$ y $C(-3,-7)$. Hallar el área del triángulo tomando como base la longitud del segmento BC y como altura la distancia desde el vértice A a la recta que contiene los vértices B y C .



1) Cálculo de la base

$$b = d_{(B,C)} = \sqrt{(-3-5)^2 + (-7+1)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$$

$$b = 10$$

2) Cálculo de la altura

Determinamos la ecuación de la recta l que pasa por B y C :

$$m = \frac{-7+1}{-3-5} = \frac{-6}{-8} = \frac{3}{4}$$

Utilizando (9⁶):

$$y + 1 = \frac{3}{4}(x - 5)$$

$$4y + 4 = 3x - 15$$

$$l \equiv 3x - 4y - 19 = 0$$

Utilizando (23a⁶), (dado que no nos interesa la distancia dirigida sino la magnitud de esa distancia):

$$h = d_{(A,l)} = \frac{|3(2) - 4(6) - 19|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-37|}{5}$$

$$h = \frac{37}{5}$$

3) Cálculo del área

$$A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{37}{5}$$

$A = 37$

Ejemplo 67

La distancia dirigida a la recta $l \equiv 6x + 8y + 7 = 0$ desde un punto P de ordenada 3 es $-\frac{11}{2}$. Determinar la abscisa de P .

Sean $P(x, 3)$ las coordenadas del punto.

Utilizando (23^G):

$$\frac{6x + 8(3) + 7}{-\sqrt{36 + 64}} = -\frac{11}{2}$$

Obsérvese que hemos tomado el signo negativo del radical, pues éste y C deben tener signo contrario.

Resolviendo:

$$\frac{6x + 24 + 7}{-10} = -\frac{11}{2}$$

$$6x + 31 = 55$$

$$6x = 24$$

$x = 4$

Ejemplo 68

La distancia dirigida a la recta $l \equiv x - 7y - 7 = 0$ desde un punto P de abscisa 3 es $-\frac{9\sqrt{2}}{5}$. Determinar la ordenada de P .

Sean $P(3, y)$ las coordenadas del punto.

Utilizando (23^G):

$$\frac{3 - 7y - 7}{5\sqrt{2}} = -\frac{9\sqrt{2}}{5}$$

Obsérvese que el radical y C deben tener signo contrario.

Resolviendo:

$$-7y - 4 = -18$$

$$-7y = -14$$

$y = 2$

Ejemplo 69

La distancia dirigida a la recta $l \equiv 2x - 3y = 0$ desde un punto de ordenada 4 es $\frac{10\sqrt{13}}{13}$. Determinar la abscisa del punto.

Sean $(x, 4)$ las coordenadas del punto.

Utilizando (23⁶):

$$\frac{2x - 3(4)}{-\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

(Como $C = 0$, el radical y B deben tener igual signo).

$$2x - 12 = -10$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Ejemplo 70

Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $M(-6, -4)$ y cuya distancia al punto $P(3, 2)$ es $\frac{18}{5}$.

Utilizando (9⁶):

$$y + 4 = m(x + 6) \quad (I)$$

$$y + 4 = mx + 6m$$

$$mx - y + 6m - 4 = 0$$

Utilizando (23⁶):

$$\frac{m(3) - 2 + 6m - 4}{\pm\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{18}{5}$$

$$\frac{9m - 6}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{18}{5}$$

$$\frac{3m - 2}{\pm\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{6}{5}$$

$$15m - 10 = \pm 6\sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado:

$$(15m - 10)^2 = 36(m^2 + 1)$$

Resolviendo:

$$225m^2 - 300m + 100 = 36m^2 + 36$$

$$189m^2 - 300m + 64 = 0$$

$$(189m - 252)(189m - 64) = 0$$

$$m_1 = \frac{252}{189} = \frac{4}{3} \quad m_2 = \frac{64}{189} = \frac{16}{63}$$

Sustituyendo en (I):

a) Para m_1 :

$$y + 4 = \frac{4}{3}(x + 6)$$

$$3y + 12 = 4x + 24$$

$$4x - 3y + 12 = 0$$

b) Para m_2 :

$$y + 4 = \frac{16}{63}(x + 6)$$

$$63y + 252 = 16x + 96$$

$$16x - 63y - 156 = 0$$

Ejemplo 71

Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $\frac{2}{5}$ y que está a una distancia de $\frac{13\sqrt{29}}{29}$ del punto $P(4,1)$.

Utilizando (14^G): $y = \frac{2}{5}x + b$

Llevando la ecuación reducida a la forma general:

$$5y = 2x + 5b$$

$$2x - 5y + 5b = 0 \quad (I)$$

Utilizando (23^G):

$$\frac{2(4) - 5(1) + 5b}{\pm\sqrt{29}} = \frac{13\sqrt{29}}{29}$$
$$5b + 3 = \pm 13$$

Para el valor positivo del miembro de la derecha, tenemos:

$$5b + 3 = 13$$

$$5b = 10$$

$$b = 2$$

Sustituyendo en (I): $2x - 5y + 5(2) = 0$

$$2x - 5y + 10 = 0$$

Para el valor negativo:

$$5b + 3 = -13$$

$$5b = -16$$

$$b = -\frac{16}{5}$$

Sustituyendo en (I): $2x - 5y + 5\left(-\frac{16}{5}\right) = 0$

$$2x - 5y - 16 = 0$$

Ejemplo 72

Un punto del plano se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l_1 \equiv 3x - 4y + 7 = 0$ es siempre igual a su distancia a la recta $l_2 \equiv 12x - 5y + 3 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

Todo punto $P(x, y)$ que pertenezca al lugar geométrico debe satisfacer la igualdad

$$d_{(P, l_1)} = \pm d_{(P, l_2)}$$

pues las magnitudes de ambas distancias deben ser iguales, lo cual ocurre aún en el caso de que las distancias sean de distinto signo.

Tenemos, por tanto, que:

$$\frac{3(x) - 4(y) + 7}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{12(x) - 5(y) + 3}{\pm\sqrt{12^2 + (-5)^2}}$$

$$\frac{3x - 4y + 7}{5} = \frac{12x - 5y + 3}{\pm 13}$$

$$39x - 52y + 91 = \pm(60x - 25y + 15)$$

Tomando positivo el paréntesis del miembro de la derecha, obtenemos la primera solución:

$$21x + 27y - 76 = 0$$

Tomándolo negativo, la segunda:

$$99x - 77y + 106 = 0$$

Ejemplo 73

Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que están a igual distancia de la recta $l \equiv 8x - 6y + 1 = 0$ y del punto $M(3,2)$.

Todo punto $P(x,y)$ del lugar geométrico debe satisfacer la igualdad:

$$d_{(P,M)} = \pm d_{(P,l)}$$

En consecuencia:

$$\sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2} = \pm \frac{8x - 6y + 1}{\sqrt{8^2 + 6^2}}$$

$$\sqrt{9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2} = \pm \frac{8x - 6y + 1}{10}$$

$$10\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} = \pm(8x - 6y + 1)$$

Elevando al cuadrado:

$$100(x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13) = 64x^2 + 36y^2 + 1 - 96xy + 16x - 12y$$

$$100x^2 + 100y^2 - 600x - 400y + 1300 = 64x^2 + 36y^2 + 1 - 96xy + 16x - 12y$$

$$36x^2 + 64y^2 + 96xy - 616x - 388y + 1299$$

Ejercicio 106

Hallar, en cada caso, la distancia entre el punto P y la recta l :

1) $P(4,-2); \quad l \equiv 3x - 4y + 10 = 0$

2) $P(-3,2); \quad l \equiv 8x - 6y + 1 = 0$

3) $P(2,-7); \quad l \equiv 12x + 5y - 2 = 0$

4) $P(-2,-6); \quad l \equiv 3x + y + 2 = 0$

Hallar, en cada caso, la distancia dirigida del punto P a la recta l :

- 5) $P(4,2)$; $l \equiv 8x + 15y + 6 = 0$
- 6) $P(-3,4)$; $l \equiv 21x - 20y - 2 = 0$
- 7) $P(5,-2)$; $l \equiv 7x - 24y + 67 = 0$
- 8) $P(-5,-10)$; $l \equiv 35x + 12y + 36 = 0$
- 9) $P(4,3)$; $l \equiv x + 2y = 0$
- 10) $P(3,-2)$; $l \equiv 5x - 12y = 0$

En los siguientes ejercicios se dan los vértices de un triángulo. Calcular en cada caso la longitud de la altura trazada sobre el lado BC , la longitud del lado BC y el área del triángulo:

- 11) $A(-3,6)$; $B(4,5)$; $C(1,-2)$
- 12) $A(\frac{1}{5}, 4)$; $B(4,-3)$; $C(-8,2)$
- 13) $A(2,-3)$; $B(-2,-3)$; $C(-4,3)$

- 14) La distancia dirigida a la recta $l \equiv 6x + 8y - 7 = 0$ desde el punto P de ordenada -5 es $-\frac{23}{10}$. Determinar la abscisa de P .
- 15) La distancia a la recta $l \equiv 4x - 2y + 3 = 0$ desde el punto P de ordenada 3 es $\frac{7\sqrt{5}}{10}$. Determinar la abscisa de P .
- 16) La distancia dirigida a la recta $l \equiv x + 7y - 3 = 0$ desde el punto P de abscisa 4 es $-2\sqrt{2}$. Determinar la ordenada de P .
- 17) La distancia a la recta $l \equiv 4x - 3y + 5 = 0$ desde el punto P de abscisa 4 es 6 . Determinar la ordenada de P .
- 18) Determinar el valor de A ($A =$ entero) si la distancia del punto $P(3,-7)$ a la recta $l \equiv Ax + 4y - 3 = 0$ es $\frac{5\sqrt{5}}{2}$.
- 19) Determinar el valor de B ($B =$ entero) si la distancia del punto $P(2,-3)$ a la recta $l \equiv 16x + By + 39 = 0$ es 4 .
- 20) Determinar el valor de C si la distancia dirigida del punto $P(3,-4)$ a la recta $l \equiv 5x - 2y + C = 0$ es $-\sqrt{29}$.
- 21) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $M(3,1)$ y cuya distancia al punto $P(-1,1)$ es igual a $2\sqrt{2}$.
- 22) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto $M(3,2)$ y cuya distancia al punto $P(-4,-4)$ es igual a 2 .
- 23) Hallar la ecuación general de la recta que dista 2 unidades del punto $P(3,-4)$ y pasa por $M(-2,6)$.
- 24) Hallar la ecuación general de la recta que dista $3\sqrt{5}$ del punto $P(3,5)$ y pasa por $M(2,-2)$.

- 25) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{3}{4}$ que dista 4 unidades del punto $P(3, -7)$.
- 26) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $-\frac{11}{2}$ y cuya distancia al punto $P(-2, 5)$ es $\sqrt{5}$.
- 27) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $\frac{4}{3}$ y cuya distancia al punto $P(5, 1)$ es $\frac{10}{3}$.
- 28) Un punto del plano se mueve de tal manera que su distancia al eje de abscisas es siempre igual que su distancia a la recta $l \equiv 5x + 12y + 5 = 0$. Determinar la ecuación de su lugar geométrico.
- 29) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes del eje de ordenadas y de la recta $l \equiv 6x - 8y + 5 = 0$.
- 30) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia a la recta $l \equiv 171x + 140y + 9 = 0$ es siempre igual al doble de su distancia al eje de abscisas.
- 31) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya distancia a la recta $l_1 \equiv 24x + 7y - 25 = 0$, es siempre igual a su distancia a la recta $l_2 \equiv 8x + 15y - 17 = 0$.
- 32) Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l_1 \equiv 9x + 40y + 7 = 0$ es siempre el doble de su distancia a la recta $l_2 \equiv 60x + 11y - 9 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- 33) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l_1 \equiv 4x - 3y + 9 = 0$ es cinco veces su distancia a la recta $l_2 \equiv 6x + 8y - 7 = 0$.
- 34) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $M(4, 1)$ y de la recta $l \equiv 2x - y + 1 = 0$.
- 35) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se mantiene siempre a la misma distancia del punto $M(-2, -1)$ y de la recta $l \equiv 3x + y + 7 = 0$.
- 36) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $M(3, -1)$ y de la recta $l \equiv x - 5y - 16 = 0$.
- 37) Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l \equiv 3x - 2y + 1 = 0$ es siempre la mitad de su distancia al origen. Determinar la ecuación de su lugar geométrico.
- 38) Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l_1 \equiv 4x - 3y + 2 = 0$ es siempre dos unidades mayor que su distancia a la recta $l_2 \equiv 5x + 12y - 13 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- 39) Un punto se mueve de tal forma que siempre está 8 unidades más alejada del punto $(11, 7)$ que de la recta $l \equiv 3x - 4y - 11 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- 40) La distancia de un punto a la recta $l \equiv y - 1 = 0$ es siempre tres veces menor que su distancia al punto $M(2, -3)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico.

Ecuación de las bisectrices de los ángulos que forman dos rectas

La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos equidistantes de los lados del ángulo.

Todo punto $P(x, y)$ del lugar geométrico satisface, por tanto, la igualdad

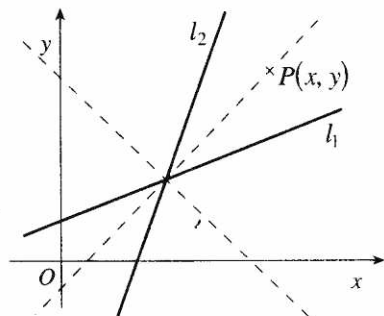
$$d_{(P, l_1)} = \pm d_{(P, l_2)}$$

Sean $l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y

$l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$ las ecuaciones de las rectas que forman el ángulo.

Aplicando la relación (23^G) y prescindiendo del signo del radical, pues ya el doble signo del miembro de la derecha agota las posibilidades, tenemos

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (24^G)$$



La relación (24^G) permite hallar la ecuación de las dos bisectrices: la del ángulo que forman l_1 y l_2 y la del que forman l_2 y l_1 .

Ejemplo 74

Hallar las ecuaciones generales de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas $l_1 \equiv 13x + 84y - 39 = 0$ y $l_2 \equiv 15x - 8y + 17 = 0$.

Utilizando (24^G):

$$\frac{13x + 84y - 39}{\sqrt{13^2 + 84^2}} = \pm \frac{15x - 8y + 17}{\sqrt{15^2 + (-8)^2}}$$

$$\frac{13x + 84y - 39}{85} = \pm \frac{15x - 8y + 17}{17}$$

Simplificando denominadores:

$$\frac{13x + 84y - 39}{5} = \pm (15x - 8y + 17)$$

$$13x + 84y - 39 = \pm (75x - 40y + 85)$$

Tomando positivo el paréntesis del miembro de la derecha y, después de reducir términos y simplificar, se obtiene la ecuación de la primera bisectriz:

$$x - 2y + 2 = 0$$

Tomándolo negativo, la segunda:

$$44x + 22y + 23 = 0$$

Ejemplo 75

Determinar la ecuación general de la bisectriz del ángulo que forman las rectas $l_1 \equiv 96x + 247y - 155 = 0$ y $l_2 \equiv 264x + 23y + 125 = 0$.

Esta vez el problema no nos pide las ecuaciones de las dos bisectrices, sino específicamente una de ellas: la del ángulo que tiene su lado inicial en l_1 y su lado final en l_2 .

En este caso es preferible trabajar con los conceptos de distancia dirigida y lugar geométrico.

Ecuación simétrica de l_1 :

$$\frac{x}{\frac{155}{96}} + \frac{y}{\frac{155}{247}} = 1$$

$$a \equiv 1,6$$

$$b \equiv 0,6$$

Ecuación simétrica de l_2 :

$$\frac{x}{-\frac{125}{264}} + \frac{y}{-\frac{125}{23}} = 1$$

$$a \equiv -0,5$$

$$b \equiv -5,4$$

En la gráfica se muestran las rectas l_1 y l_2 , la bisectriz del ángulo que forman l_1 y l_2 y un punto de esa bisectriz.

La distancia del punto P a la recta l_1 es positiva, dado que P y el origen se encuentran a lados opuestos de l_1 :

$$d_{(P, l_1)} = d_1$$

En cambio, la distancia dirigida de P a l_2 es negativa por encontrarse P y O a un mismo lado de l_2 :

$$d_{(P, l_2)} = -d_2$$

Estas distancias son iguales:

$$d_1 = -d_2$$

y, en consecuencia:

$$d_{(P, l_1)} = -d_{(P, l_2)}$$

Operando:

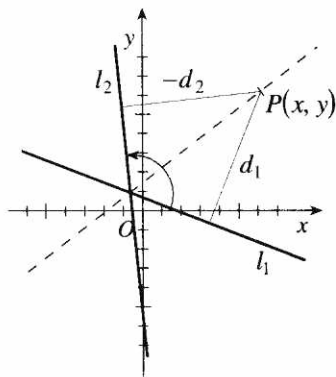
$$\frac{96x + 247y - 155}{\sqrt{96^2 + 247^2}} = -\frac{264x + 23y + 125}{-\sqrt{264^2 + 23^2}}$$

$$\frac{96x + 247y - 155}{265} = \frac{264x + 23y + 125}{265}$$

$$96x + 247y - 155 = 264x + 23y + 125$$

$$168x - 224y + 280 = 0$$

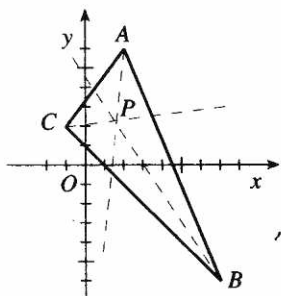
$$\boxed{3x - 4y + 5 = 0}$$



Ejemplo 76

Hallar las ecuaciones generales de las bisectrices de los ángulos internos del triángulo de vértices $A(2,6)$; $B(7,-6)$ y $C(-1,2)$.

Hacemos un gráfico con los datos que se dan. En él aparecen trazadas las bisectrices de los ángulos internos. Estas se cortan en un mismo punto P .



Dado que necesitaremos las ecuaciones de los tres lados, las calcularemos de una vez.

Ecuación del lado CA :

$$m = \frac{6-2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$y - 6 = \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$3y - 18 = 4x - 8$$

$$CA \equiv 4x - 3y + 10 = 0$$

Ecuación del lado AB :

$$m = \frac{-6-6}{7-2} = -\frac{12}{5}$$

$$y - 6 = -\frac{12}{5}(x - 2)$$

$$5y - 30 = -12x + 24$$

$$AB \equiv 12x + 5y - 54 = 0$$

Ecuación del lado BC :

$$m = \frac{2+6}{-1-7} = -1$$

$$y - 2 = -(x + 1)$$

$$y - 2 = -x - 1$$

$$BC \equiv x + y - 1 = 0$$

Ecuación de la bisectriz del ángulo CAB

La distancia dirigida del punto P al lado CA es negativa (por estar P y O a un mismo lado de CA). También lo es la distancia de P a AB . Por tanto:

$$-d_{(P,CA)} = -d_{(P,AB)}$$

$$d_{(P,CA)} = d_{(P,AB)}$$

$$\frac{4x - 3y + 10}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{12x + 5y - 54}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

$$\frac{4x - 3y + 10}{-5} = \frac{12x + 5y - 54}{13}$$

$$52x - 39y + 130 = -60x - 25y + 270$$

$$112x - 14y - 140 = 0$$

$$8x - y - 10 = 0$$

Ecuación de la bisectriz del ángulo ABC

La distancia dirigida de P al lado BC es positiva (P y O están a lados opuestos de BC). La de P a AB ya hemos visto que es negativa:

$$-d_{(P,AB)} = -d_{(P,BC)}$$

$$-\frac{12x + 5y - 54}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{x + y - 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$-\frac{12x + 5y - 54}{13} = \frac{x + y - 1}{\sqrt{2}}$$

$$-12\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y + 54\sqrt{2} = 13x + 13y - 13$$

$$(13 + 12\sqrt{2})x + (13 + 5\sqrt{2})y - 13 - 54\sqrt{2} = 0$$

Ecuación de la bisectriz del ángulo BCA

$$d_{(P,BC)} = -d_{(P,CA)}$$

$$\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}} = -\frac{4x - 3y + 10}{-5}$$

$$5x + 5y - 5 = 4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 10\sqrt{2}$$

$$(4\sqrt{2} - 5)x - (3\sqrt{2} + 5)y + 10\sqrt{2} + 5 = 0$$

Ejercicio 107

Hallar las ecuaciones generales de las bisectrices de los ángulos que forman l_1 y l_2 :

$$1) l_1 \equiv 3x - 4y + 5 = 0;$$

$$l_2 \equiv 7x - 24y + 9 = 0$$

$$2) l_1 \equiv 21x - 20y + 40 = 0;$$

$$l_2 \equiv 17x + 144y - 100 = 0$$

$$3) l_1 \equiv 27x - 364y + 19 = 0;$$

$$l_2 \equiv 55x + 48y - 93 = 0$$

$$4) l_1 \equiv 15x - 8y + 33 = 0;$$

$$l_2 \equiv 21x + 220y - 45 = 0$$

$$5) \text{ Hallar la ecuación general de la bisectriz del ángulo que forman } l_1 \equiv 4x - 3y + 8 = 0 \text{ y } l_2 \equiv 24x + 7y + 20 = 0.$$

$$6) \text{ Sean } l_1 \equiv 5x + 12y - 30 = 0 \text{ y } l_2 \equiv 63x - 16y - 70 = 0. \text{ Hallar la ecuación general de la bisectriz del ángulo que forman } l_2 \text{ y } l_1.$$

Hallar en cada caso la ecuación general de la bisectriz del ángulo con el vértice en A en los triángulos cuyos tres vértices se dan:

7) $A(1,7); B(6,-5); C(-5,-1)$

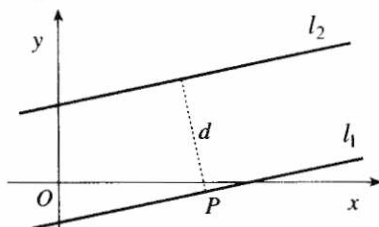
8) $A(-4,3); B(8,8); C(-\frac{20}{9}, -4)$

9) $A(0,3); B(3, \frac{23}{5}); C(\frac{13}{14}, -3)$

10) Hallar la ecuación general de la bisectriz de cada uno de los ángulos internos del triángulo de vértices $A(-2,-1); B(0,3)$ y $C(5,-2)$.

Distancia entre rectas paralelas

Para calcular la distancia entre dos rectas paralelas basta determinar un punto P en una de ellas y hallar la distancia entre ese punto y la otra recta.



A) Las ecuaciones están dadas en forma general

Sean $l_1 \equiv Ax + By + C_1 = 0$ y $l_2 \equiv Ax + By + C_2 = 0$, rectas de igual pendiente $-\frac{A}{B}$ y, por tanto, paralelas.

Para determinar un punto P de ella damos un valor cualquiera k a la variable x y obtenemos el valor correspondiente de la variable y .

Para $x = k$ tenemos: $Ak + By + C_1 = 0$

de donde

$$y = -\frac{Ak + C_1}{B}$$

Las coordenadas del punto son entonces:

$$P\left(k, -\frac{Ak + C_1}{B}\right)$$

y la distancia de P a la recta l_2 :

$$\begin{aligned} d_{(P, l_2)} &= \frac{A(k) + B\left(-\frac{Ak + C_1}{B}\right) + C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{Ak - Ak - C_1 + C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ &= \frac{C_2 - C_1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Esta distancia se toma generalmente positiva.

Resumiendo:

La distancia entre las rectas paralelas $l_1 \equiv Ax + By + C_1 = 0$ y $l_2 \equiv Ax + By + C_2 = 0$ es

$$d_{(l_1, l_2)} = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (25^G)$$

B) Las ecuaciones están dadas en forma reducida

Sean $l_1 \equiv y = mx + b_1$ y $l_2 \equiv y = mx + b_2$, rectas de igual pendiente m y, por tanto, paralelas.

Determinamos un punto P de la recta l_1 dando a la variable x un valor cualquiera k y hallando el correspondiente de la variable y :

Para $x = k$ tenemos: $y = mk + b_1$

Las coordenadas del punto $P(k, mk + b_1)$ son:

Llevamos a la forma general la ecuación de l_2 : $mx - y + b_2 = 0$

y calculamos la distancia de P a l_2 :

$$\begin{aligned} d_{(P, l_2)} &= \frac{mk - (mk + b_1) + b_2}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{mk - mk - b_1 + b_2}{\sqrt{m^2 + 1}} \\ &= \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{m^2 + 1}} \end{aligned}$$

Igual que en el caso anterior, tomaremos generalmente positiva esta distancia.

Resumiendo:

La distancia entre las rectas paralelas $l_1 \equiv y = mx + b_1$ y $l_2 \equiv y = mx + b_2$ es

$$d_{(l_1, l_2)} = \frac{|b_2 - b_1|}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (26^G)$$

Ejemplo 78

Hallar la distancia que separa las rectas paralelas $l_1 \equiv 6x + 8y - 7 = 0$ y $l_2 \equiv 3x + 4y + 15 = 0$.

Para poder aplicar la relación (25^G) los coeficientes A y B deben ser los mismos en

ambas ecuaciones.

Multiplicamos, por tanto, la ecuación de l_2 por 2:

$$l_1 \equiv 6x + 8y - 7 = 0$$

$$l_2 \equiv 6x + 8y + 30 = 0$$

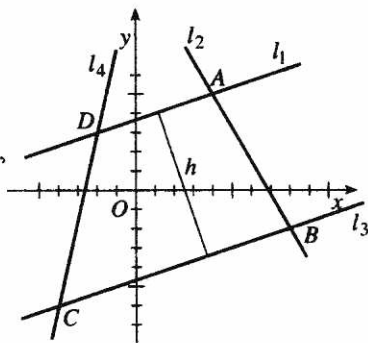
Utilizando (25^o):

$$d_{(l_1, l_2)} = \frac{|30 + 7|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \boxed{\frac{37}{10}}$$

Ejemplo 79

Hallar el área del trapecio que forman las rectas $l_1 \equiv x - 3y + 11 = 0$; $l_2 \equiv 7x + 4y - 48 = 0$; $l_3 \equiv x - 3y - 14 = 0$ y $l_4 \equiv 9x - 2y + 24 = 0$.

En el gráfico aparecen las cuatro rectas. A, B, C y D son los puntos en los que cada par de rectas se intersecta.



Para hallar el área del trapecio necesitamos los siguientes datos:

Base menor:

$$b = d_{(D, A)}$$

Base mayor:

$$B = d_{(C, B)}$$

Altura:

$$h = d_{(l_1, l_3)}$$

Coordenadas de A:

Formamos un sistema con las ecuaciones de l_1 y l_2 :

$$\begin{cases} x - 3y = -11 \\ 7x + 4y = 48 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = 4$ $y = 5$

y las coordenadas de A: $A(4, 5)$

Coordenadas de B:

Formamos un sistema con las ecuaciones de l_2 y l_3 :

$$\begin{cases} 7x + 4y = 48 \\ x - 3y = 14 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = 8$ $y = -2$

y las coordenadas de B: $B(8, -2)$

Coordenadas de C:

Formamos un sistema con las ecuaciones de l_3 y l_4 :

$$\begin{cases} x - 3y = 14 \\ 9x - 2y = -24 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = -4$ $y = -6$

y las coordenadas de C: $C(-4, -6)$

Coordenadas de D:

Formamos un sistema con las ecuaciones de l_4 y l_1 :

$$\begin{cases} 9x - 2y = -24 \\ x - 3y = -11 \end{cases}$$

La solución del sistema es: $x = -2$ $y = 3$

y las coordenadas de D: $D(-2, 3)$

Cálculo de la base menor:

$$\begin{aligned} b &= d_{(D,A)} \\ &= \sqrt{(4+2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = 2\sqrt{10} \end{aligned}$$

Cálculo de la base mayor:

$$\begin{aligned} B &= d_{(C,B)} \\ &= \sqrt{(-2+6)^2 + (8+4)^2} = \sqrt{16+144} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

Cálculo de la altura:

$$\begin{aligned} h &= d_{(l_1, l_3)} \\ &= \frac{|-14 - 11|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{25}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{2} \end{aligned}$$

Area del trapecio:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(b+B)h = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{10} + 4\sqrt{10}) \cdot \frac{5\sqrt{10}}{2} \\ &= \frac{6\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{10}}{4} = \frac{300}{4} \end{aligned}$$

$A = 75$

Ejemplo 80

Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 5x - 2y + 9 = 0$ y que está a una distancia de $4\sqrt{29}$ unidades de ella.

Llamemos l_2 la recta cuya ecuación buscamos. Dado que l_1 y l_2 son paralelas, podemos escribir momentáneamente la ecuación de ésta así:

$$l_2 \equiv 5x - 2y + k = 0 \quad (I)$$

Conociendo la distancia entre ellas, podemos plantear:

$$\frac{k-9}{\pm\sqrt{5^2+(-2)^2}} = 4\sqrt{29}$$

$$\frac{k-9}{\pm\sqrt{29}} = 4\sqrt{29}$$

$$k-9 = \pm 116$$

Ecuación de la que se obtienen dos valores:

$$k_1 = 125$$

$$k_2 = -107$$

Las soluciones del problema son, por tanto (sustituyendo en I):

$$l_2 \equiv 5x - 2y + 125 = 0$$

$$l_2 \equiv 5x - 2y - 107 = 0$$

Ejercicio 108

Hallar en cada caso la distancia entre las rectas paralelas l_1 y l_2 :

$$1) \quad l_1 \equiv 5x + 12y - 7 = 0; \quad l_2 \equiv 5x + 12y + 32 = 0$$

$$2) \quad l_1 \equiv y = 4x - 5; \quad l_2 \equiv y = 4x - 19$$

$$3) \quad l_1 \equiv 3x + 2y + 6 = 0; \quad l_2 \equiv 6x + 4y - 15 = 0$$

$$4) \quad l_1 \equiv y = 7x + 23; \quad l_2 \equiv y = 7x - 22$$

$$5) \quad l_1 \equiv 3x - 6y + 11 = 0; \quad l_2 \equiv 4x - 8y + 17 = 0$$

$$6) \quad l_1 \equiv 24x - 7y - 18 = 0; \quad l_2 \equiv 48x - 14y + 9 = 0$$

Hallar en los siguientes ejercicios el área del trapecio que forman las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 :

$$7) \quad l_1 \equiv 2x + 3y - 17 = 0; \quad l_2 \equiv x - 4 = 0; \quad l_3 \equiv 2x + 3y + 1 = 0; \\ l_4 \equiv x - 3y + 23 = 0$$

$$8) \quad l_1 \equiv x - 3y + 10 = 0; \quad l_2 \equiv 2x - y - 5 = 0; \quad l_3 \equiv 4x + 3y + 5 = 0; \\ l_4 \equiv 2x - y + 5 = 0$$

$$9) \quad l_1 \equiv y - 4 = 0; \quad l_2 \equiv 5x + 2y - 13 = 0; \quad l_3 \equiv 5x - 3y - 18 = 0; \\ l_4 \equiv 5x + 2y + 12 = 0$$

10) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 24x - 7y + 3 = 0$ y que dista 6 unidades de ella.

11) Hallar la ecuación reducida de la recta paralela a $l_1 \equiv y = 7x - 6$ y que está a una distancia de $\frac{7\sqrt{2}}{5}$ de ella.

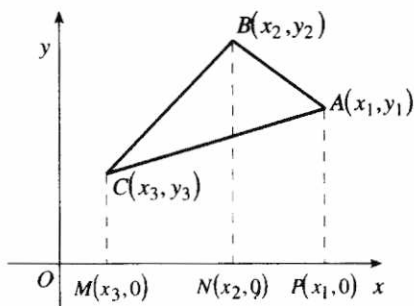
12) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 8x + 6y - 11 = 0$ y que está a una distancia de $\frac{11}{10}$ de ella.

13) Hallar la ecuación reducida de la recta paralela a $l_1 \equiv y = \frac{12}{5}x + 9$ y que dista 3 unidades de ella.

Área de un triángulo de vértices conocidos

Determinaremos una fórmula que nos permita calcular el área de un triángulo de vértices conocidos.

Sea el triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ y $C(x_3, y_3)$, representado en el gráfico, y sean $M(x_3, 0)$; $N(x_2, 0)$ y $P(x_1, 0)$ las proyecciones ortogonales de los tres vértices sobre el eje de abscisas.



El área del triángulo (A_T) puede calcularse a través de los trapecios $BCMN$, $ABNP$ y $ACMP$ de la siguiente forma:

$$A_T = A_{BCMN} + A_{ABNP} - A_{ACMP} \quad (I)$$

Área del trapecio $BCMN$:

$$\begin{aligned} \text{Base menor} & \quad b = CM = y_3 \\ \text{Base mayor} & \quad B = BN = y_2 \\ \text{Altura} & \quad h = MN = x_2 - x_3 \end{aligned}$$

$$A_{BCMN} = \frac{(y_2 + y_3)(x_2 - x_3)}{2}$$

Área del trapecio $ABNP$:

$$\begin{aligned} \text{Base menor} & \quad b = AP = y_1 \\ \text{Base mayor} & \quad B = BN = y_2 \\ \text{Altura} & \quad h = MN = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

$$A_{ABNP} = \frac{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)}{2}$$

Área del trapecio $ACMP$:

$$\begin{aligned} \text{Base menor} & \quad b = CM = y_3 \\ \text{Base mayor} & \quad B = AP = y_1 \\ \text{Altura} & \quad h = MP = x_1 - x_3 \end{aligned}$$

$$A_{ACMP} = \frac{(y_1 + y_3)(x_1 - x_3)}{2}$$

El área del triángulo es, sustituyendo en (I):

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{2} [(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + (y_1 + y_2)(x_1 - x_2) - (y_1 + y_3)(x_1 - x_3)] \\ &= \frac{1}{2} [x_2 y_2 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_3 y_3 + x_1 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_2 - x_1 y_1 - x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_3] \end{aligned}$$

Reduciendo términos y ordenando se obtiene

$$A_T = \frac{1}{2} [x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - (x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2)] \quad (27^G)$$

Nota: El resultado de las operaciones indicadas en el corchete es positivo cuando los puntos de toman en sentido contrario al de las agujas del reloj y negativo cuando se toman en sentido horario. Sin embargo, por tratarse de un área, ese resultado se tomará siempre positivo.

La expresión que en la relación (27^G) aparece entre corchetes es el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

por lo cual, podemos escribir la fórmula de la siguiente manera:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad (28^G)$$

Otra disposición, muy práctica por cierto, para obtener el área del triángulo, es ésta:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \quad (29^G)$$

en la que la columna de las coordenadas se desarrolla así:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ -x_2y_1 \quad -x_3y_2 \quad -x_1y_3 \quad x_1y_2 \quad x_2y_3 \quad x_3y_1 \end{array}$$

Tanto para el determinante (28^G) como para la disposición en columnas (29^G) es válido lo dicho en la Nota de la relación (27^G).

Área de un polígono de vértices conocidos

La disposición utilizada en la relación (29^G) puede extenderse al cálculo del área de un polígono cualquiera. (No lo demostraremos).

Sea el polígono de vértices $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$; $C(x_3, y_3)$; $D(x_4, y_4)$; $N(x_n, y_n)$.

El área del polígono se obtiene con la expresión

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

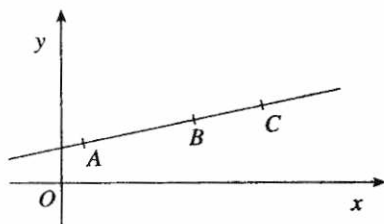
(30^G)

que se desarrolla en forma análoga a la señalada para la relación (29^G).

Puntos colineales

Es obvio que tres puntos son colineales si el triángulo que forman es de área nula. Y viceversa: si el área de un triángulo es cero y sus tres vértices no coinciden en un mismo punto, éstos están sobre una misma línea recta.

Por tanto, para que tres puntos no coincidentes sean colineales es condición necesaria y suficiente que el área del triángulo que forman sea nulo. Para que esto se cumpla, basta que el determinante de la relación (28^G) o el resultado de la disposición de las coordenadas de la (29^G) se anulen:



$$\text{Si } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ó} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A, B \text{ y } C \text{ son colineales} \quad (31^G)$$

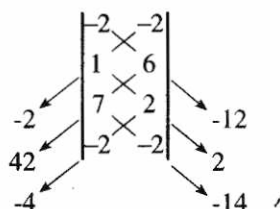
Análogamente, cuatro o más puntos no coincidentes son colineales si el área del polígono que forman es nulo:

$$\text{Si } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A, B, C, D, \dots, N \text{ son colineales} \quad (32^G)$$

Ejemplo 81

Determinar el área del triángulo de vértices $A(-2,-2)$; $B(1,6)$ y $C(7,2)$.

Utilizaremos la relación (29^o) calculando previamente el valor de la columna de coordenadas:



$$A = \frac{1}{2}[-12 + 2 - 14 - (-2 + 42 - 4)] = \frac{1}{2}(-60) = -30$$

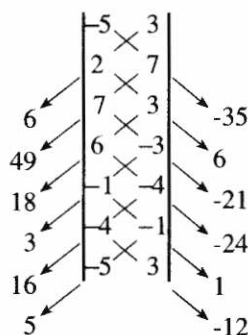
Tratándose de un área, tomamos el resultado en valor absoluto:

$$A = 30$$

Ejemplo 82

Determinar el área del polígono cuyos vértices son $A(-5,3)$; $B(2,7)$; $C(7,3)$; $D(6,-3)$; $E(-1,-4)$ y $F(-4,-1)$.

Utilizaremos (30^o). Calculamos previamente el valor de la columna de coordenadas:



$$A = \frac{1}{2}[-35 + 6 - 21 - 24 + 1 - 12 - (6 + 49 + 18 + 3 + 16 + 5)]$$

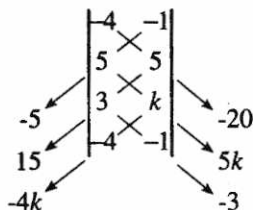
$$= \frac{1}{2}(-182)$$

$$A = 91$$

Ejemplo 83

Determinar el valor de k para que los puntos $A(-4,-1)$; $B(5,5)$ y $C(3,k)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{87}{2}$.

Utilizando (29⁶):



$$\frac{87}{2} = \frac{1}{2} [-20 + 5k - 3 - (-5 + 15 - 4k)]$$

$$87 = \pm(9k - 33)$$

Hemos puesto el doble signo en el miembro de la derecha porque el área $\frac{87}{2}$ corresponde al valor absoluto de lo que allí se obtiene.

Primera solución:

$$87 = 9k - 33$$

$$k = \frac{40}{3}$$

Segunda solución:

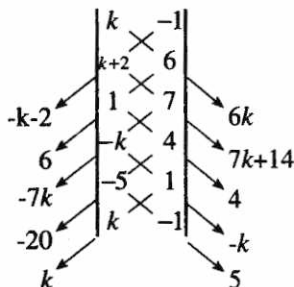
$$87 = -9k + 33$$

$$k = -6$$

Ejemplo 84

Los puntos $A(k, -1)$; $B(k+2, 6)$; $C(1, 7)$; $D(-k, 4)$ y $E(-5, 1)$ son los vértices de un pentágono irregular convexo. Determinar el valor de k para que el área del pentágono sea $\frac{115}{2}$.

Utilizando (30⁶):



$$\frac{115}{2} = \frac{1}{2} [12k + 23 - (-7k - 16)]$$

$$115 = \pm(19k + 39)$$

Para el valor positivo del miembro de la derecha:

$$115 = 19k + 39$$

$$k = 4$$

Para el negativo:

$$115 = -19k - 39$$

$$k = -\frac{154}{19}$$

Este último valor es inadmissible pues los puntos que se obtienen con él no corresponden a un pentágono convexo (Compruébese).

Ejemplo 85

Determinar si los puntos $A(-2,7)$; $B(-\frac{3}{2}, 4)$ y $C(0,-5)$ son colineales.

Para que los puntos sean colineales, el determinante o la columna de las coordenadas deben anularse (31⁶):

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -\frac{3}{2} & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \nearrow -8 \\ \nearrow \frac{15}{2} \\ \nearrow 0 \end{matrix}$$

(Note: The diagram shows a 3x2 determinant with arrows indicating the expansion along the third column. The arrows point from the elements 0, -5, and -2 to the values -8, 15/2, and 10 respectively.)

$$= -8 + \frac{15}{2} - (-\frac{21}{2} + 10)$$

$$= -8 + \frac{15}{2} + \frac{21}{2} - 10$$

$$= -18 + \frac{36}{2}$$

$$= 0$$

El valor de la columna de coordenadas es cero, por tanto:

A, B y C son colineales

Ejemplo 86

Determinar el valor que debe tomar k para que los puntos $A(k,7)$; $B(k-2, \frac{11}{2})$; $C(1,1)$ y $D(-5, -\frac{7}{2})$ pertenezcan a una misma recta.

Para que eso suceda, la columna de coordenadas debe anularse (31⁶):

$$\begin{vmatrix} k & 7 \\ k-2 & \frac{11}{2} \\ 1 & 1 \\ -5 & -\frac{7}{2} \\ k & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando:

$$\frac{11k}{2} + k - 2 - \frac{7}{2} - 35 - \left(7k - 14 + \frac{11}{2} - 5 - \frac{7k}{2}\right) = 0$$

Después de eliminar paréntesis y reducir términos, se obtiene:

$$3k - 27 = 0$$

de donde:

$$k = 9$$

Ejercicio 109

Determinar el área de los triángulos cuyos vértices se dan:

- 1) $A(-1,7)$; $B(6,2)$; $C(-4,-4)$
- 2) $A\left(\frac{11}{2}, 2\right)$; $B\left(\frac{3}{2}, -2\right)$; $C(1,5)$
- 3) $A\left(-\frac{29}{7}, \frac{1}{2}\right)$; $B\left(\frac{17}{7}, \frac{19}{2}\right)$; $C\left(\frac{39}{7}, -\frac{5}{2}\right)$
- 4) $A(5\sqrt{3}, 4)$; $B(\sqrt{2}, -2\sqrt{6})$; $C(-4\sqrt{3}, 7)$

Determinar el área de los polígonos cuyos vértices se dan:

- 5) $A(5,5)$; $B(-3,5)$; $C(-4,1)$; $D(-1, -3)$
- 6) $A(-8,1)$; $B(3,-6)$; $C(5,-5)$; $D\left(\frac{11}{2}, \frac{3}{2}\right)$; $E\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$
- 7) $A(3,4)$; $B(2,5)$; $C(-3,5)$; $D(-4,4)$; $E(-4,-1)$; $F(-3,-2)$; $G(2,-2)$; $H(3,-1)$
- 8) $A(1,8)$; $B(2,8)$; $C(0,1)$; $D(-6,-3)$; $E(-7,-1)$

Determinar en cada caso el valor de k para que...

- 9) ... $A(-4,k)$; $B(3,-k)$ y $C(1,6)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{45}{2}$.
- 10) ... $A(k,-3)$; $B(-2,5)$ y $C(k-1,-4)$ sean los vértices de un triángulo de área 5.
- 11) ... $A(-7,0)$; $B(-3k,-1)$; $C(-3,-1)$ y $D(2k,0)$ sean los vértices de un cuadrilátero de área 7.
- 12) ... $A(k,7)$; $B(-2,4)$; $C(-3,1)$; $D(-2,0)$; $E(k,3)$ y $F(1,5)$ sean los vértices de un polígono convexo de área 12.

Demostrar que los puntos que se dan en los siguientes ejercicios pertenecen en cada caso a una misma recta:

- 13) $A(0,-1)$; $B(-2,5)$; $C(-3, 8)$
- 14) $A(6,10)$; $B(4,5)$; $C(0, -5)$
- 15) $A(7,1)$; $B(1,2)$; $C\left(-2, \frac{5}{2}\right)$
- 16) $A(-8,-4)$; $B(-4,-3)$; $C\left(2, -\frac{3}{2}\right)$; $D\left(6, -\frac{1}{2}\right)$
- 17) $A(1,9)$; $B(2,3)$; $C\left(\frac{7}{3}, 1\right)$; $D(4,-9)$
- 18) $A(7,2)$; $B\left(4, \frac{7}{4}\right)$; $C\left(-2, \frac{5}{4}\right)$; $D\left(-8, \frac{3}{4}\right)$

- 19) Determinar k para que $A(-1,7)$; $B(0,2k)$; $C(2,-k)$ y $D\left(\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ estén sobre una misma recta.
- 20) Determinar k para que $A(-5,k)$; $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $C(4,3k)$ sean colineales.

Rectas concurrentes

Sean tres rectas concurrentes

$$l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

y $l_3 \equiv A_3x + B_3y + C_3 = 0.$

Halleemos las coordenadas del punto P formando un sistema con las ecuaciones de l_1 y l_2 :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2 \end{cases}$$

Multiplicando por B_2 la primera ecuación y por $-B_1$ la segunda y sumando:

$$\begin{cases} A_1B_2x + B_1B_2y = -B_2C_1 \\ -A_2B_1x - B_1B_2y = B_1C_2 \end{cases}$$

$$(A_1B_2 - A_2B_1)x = B_1C_2 - B_2C_1$$

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Multiplicando, en cambio, la primera ecuación por $-A_2$ y la segunda por A_1 y sumando:

$$\begin{cases} -A_1A_2x - A_2B_1y = A_2C_1 \\ A_1A_2x + A_1B_2y = -A_1C_2 \end{cases}$$

$$(A_1B_2 - A_2B_1)y = A_2C_1 - A_1C_2$$

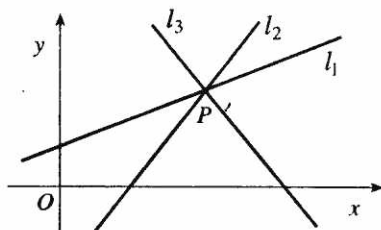
$$y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

Las coordenadas de P son, pues,

$$P\left(\frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}\right)$$

Dado que l_3 se intersecta con las otras dos rectas en ese punto, las coordenadas de P satisfacen también la ecuación de l_3 . Tenemos, por tanto, que

$$A_3\left(\frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\right) + B_3\left(\frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}\right) + C_3 = 0$$



Eliminando denominadores:

$$A_3(B_1C_2 - B_2C_1) + B_3(A_2C_1 - A_1C_2) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1) = 0$$

$$A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 + A_2B_3C_1 - A_1B_3C_2 + A_1B_2C_3 - A_2B_1C_3 = 0$$

Ordenando:

$$A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - (A_1B_3C_2 + A_2B_1C_3 + A_3B_2C_1) = 0$$

La expresión obtenida es el desarrollo del determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$$

y esta es la condición necesaria y suficiente para que l_1 , l_2 y l_3 concurren en un punto. Por lo cual

Si $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$	$l_1, l_2 \text{ y } l_3 \text{ concurren en un punto}$	(33^G)
--	---	-------------------------

Ejemplo 87

Determinar si las rectas de ecuaciones $l_1 \equiv x + y - 2 = 0$, $l_2 \equiv 5x - y - 17 = 0$ y $l_3 \equiv x + 4y + 5 = 0$ son rectas concurrentes.

Construimos un determinante con los coeficientes de las tres ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & -17 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Calculamos el valor del determinante:

$$\begin{aligned} &= -5 - 17 - 40 - (2 - 68 + 25) \\ &= -62 - (-41) \\ &= -21 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

El valor del determinante no se anula, por lo que concluimos que

$l_1, l_2 \text{ y } l_3 \text{ no son rectas concurrentes}$
--

Ejemplo 88

Determinar el valor que debe tomar k para que las rectas $l_1 \equiv 2x + 5y + 5 = 0$; $l_2 \equiv 3x + y - 12 = 0$ y $l_3 \equiv kx + (k + 3)y + 7 = 0$ se intersecten en un mismo punto.

Para que las tres rectas concurren en un mismo punto sus coeficientes deben satisfacer la relación (33⁶). En consecuencia:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 3 & 1 & -12 \\ k & k+3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$14 - 60k + 15k + 45 - (5k - 24k - 72 + 105) = 0$$

$$-45k + 59 - (-19k + 33) = 0$$

$$-26k + 26 = 0$$

$$k = 1$$

Ejercicio 110

Demostrar en cada caso que l_1 , l_2 y l_3 son rectas concurrentes:

$$1) \quad l_1 \equiv 2x + y + 1 = 0; \quad l_2 \equiv 3x + 7y - 37 = 0; \quad l_3 \equiv x - y + 11 = 0$$

$$2) \quad l_1 \equiv 2x - 7y - 3 = 0; \quad l_2 \equiv x + y - 6 = 0; \quad l_3 \equiv 3x - 11y - 4 = 0$$

$$3) \quad l_1 \equiv 4x + y + 4 = 0; \quad l_2 \equiv 5x + y + 7 = 0; \quad l_3 \equiv 6x + y + 10 = 0$$

$$4) \quad l_1 \equiv 4x + 5y = 0; \quad l_2 \equiv x + y - 1 = 0; \quad l_3 \equiv 3x + 2y - 7 = 0$$

$$5) \quad l_1 \equiv ax + by - a^2 + b^2 = 0; \quad l_2 \equiv bx + ay = 0; \quad l_3 \equiv 3bx - 2ay - 5ab = 0$$

Hallar en cada caso el valor que debe tomar k para que las rectas l_1 , l_2 y l_3 se intersecten en un punto:

$$6) \quad l_1 \equiv x + 2y - 1 = 0; \quad l_2 \equiv x + 3y = 0; \quad l_3 \equiv kx + (k-3)y - 7 = 0$$

$$7) \quad l_1 \equiv x - y - 1 = 0; \quad l_2 \equiv 3x - 4y + 4 = 0; \quad l_3 \equiv kx - 2y - 3k - 1 = 0$$

$$8) \quad l_1 \equiv 2x - 3y - 12 = 0; \quad l_2 \equiv x + ky + k + 1 = 0; \quad l_3 \equiv 2x + 3y = 0$$

$$9) \quad l_1 \equiv x + ky + 5 = 0; \quad l_2 \equiv kx - y - 15 = 0; \quad l_3 \equiv 2x + y - 5 = 0$$

$$10) \quad l_1 \equiv (k-1)x - 3y + 4 = 0; \quad l_2 \equiv 5x - (k+1)y - 11 = 0;$$

$$l_3 \equiv x + (k-2)y - 13 = 0$$

Familias de rectas

Se llama *familia* o *haz de rectas* a todas las rectas que satisfacen una determinada condición geométrica.

a) De igual pendiente

En la Fig. 1 están representadas tres rectas que satisfacen una condición común: todas tienen pendiente 2.

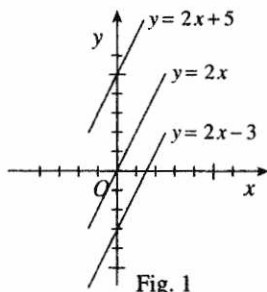


Fig. 1

Se diferencian por la ordenada en el origen. Toda recta que tenga la misma característica, la pendiente 2, tendrá su ecuación de la forma

$$y = 2x + k$$

Esta ecuación es, pues, la de la familia o haz de rectas de pendiente 2.

Y, en general, la ecuación de la familia de rectas de igual pendiente m es

$$y = mx + k$$

(34^G)

donde k recibe el nombre de *parámetro* de la familia de rectas.

En la Fig. 2 están representadas la recta $Ax + By + C = 0$ y otras tres paralelas a ella. También en este caso las rectas representadas satisfacen la misma condición: todas tienen pendiente $-\frac{A}{B}$.

Sus ecuaciones, dadas en forma general, difieren sólo en el término independiente C .

La ecuación de cualquier otra recta que satisfaga la misma condición, es decir, que sea paralela a la recta $Ax + By + C = 0$, será de la forma

$$Ax + By + k = 0$$

(35^G)

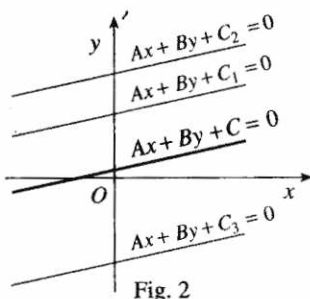


Fig. 2

Esta es la ecuación de la familia o haz de rectas paralelas a la recta dada $Ax + By + C = 0$.

b) Que pasan por un mismo punto

En la Fig. 3 están representadas cuatro rectas, l_1 , l_2 , l_3 y l_4 , que satisfacen la condición común de pasar todas por el punto $P(x_1, y_1)$.

Estas rectas se diferencian sólo en la pendiente, que es distinta para cada una de ellas.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto $P(x_1, y_1)$ será, pues, ésta:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

(36^G)

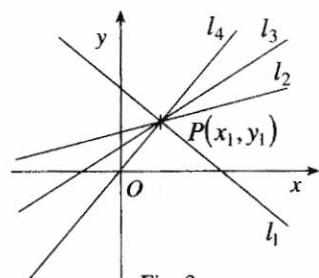


Fig. 3

La única recta que no está representada por esta ecuación es la que, pasando por P , es paralela al eje de ordenadas, dado que su pendiente es $\text{tg}90^\circ$ que carece de valor numérico.

c) Que pasan por el punto en el que se intersectan las rectas $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

En la Fig. 4 aparecen las rectas l_3 , l_4 y l_5 con la característica común de que

pasan por $P(x_0, y_0)$, punto de intersección de las rectas $l_1 \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ y $l_2 \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

La ecuación que representa a todas las rectas de esta familia (a excepción de l_2) es

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (37^G)$$

En efecto, si las rectas l_1 y l_2 pasan por el punto $P(x_0, y_0)$, son ciertas las igualdades

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{y} \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \quad (2)$$

y, en tal caso, las coordenadas de P satisfacen también la ecuación (37^G) :

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 + k(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$$

Por (1), los tres primeros términos de la expresión anterior se anulan. Por (2), se anulan los tres términos del paréntesis y tenemos que

$$0 + k \cdot 0 = 0$$

igualdad que es cierta cualquiera sea el valor de k .

Las ecuaciones de familias de rectas pueden ser utilizadas en la resolución de problemas de la siguiente forma:

- Se plantea la ecuación de la familia de rectas.
- Se calcula el valor del parámetro k aplicando la otra condición que da el problema.

Si se observa un poco más detenidamente, todo lo anterior no es más que la aplicación del Método de los Coeficientes Indeterminados a la resolución de problemas de Analítica.

Ejemplo 89

Hallar, por el método del parámetro k (o de la familia de rectas), la ecuación reducida de la recta de pendiente -3 que pasa por $M(4,3)$.

La ecuación de la familia de rectas de pendiente -3 es, (34^G) :

$$y = -3x + k \quad (I)$$

Si la recta pasa por el punto M , las coordenadas de éste deben satisfacer la ecuación. En consecuencia:

$$3 = -3(4) + k$$

de donde

$$k = 15$$

Sustituyendo en (I):

$$y = -3x + 15$$

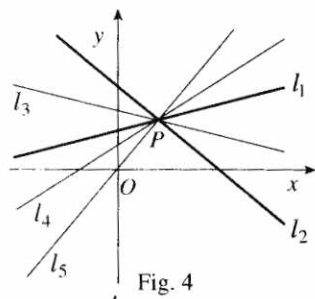


Fig. 4

Ejemplo 90

Hallar, por el método del parámetro, la ecuación general de la recta que pasa por $M(5,2)$ y es paralela a $l_1 \equiv 4x - 7y + 11 = 0$.

La ecuación de la familia de rectas paralelas a l_1 es, por la relación (35⁶):

$$4x - 7y + k = 0 \quad (I)$$

Las coordenadas de M satisfacen esta ecuación:

$$4(5) - 7(2) + k = 0$$

$$20 - 14 + k = 0$$

$$k = -6$$

Sustituyendo en (I):

$$4x - 7y - 6 = 0$$

Ejemplo 91

Hallar, por el método del parámetro, la ecuación general de la recta que pasa por los puntos $A(4,3)$ y $B(7,-2)$.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por A es, por la relación (36⁶):

$$y - 3 = k(x - 4) \quad (I)$$

Las coordenadas de B satisfacen esta ecuación:

$$-2 - 3 = k(7 - 4)$$

$$k = -\frac{5}{3}$$

Sustituyendo en (I) y llevando a la forma general:

$$y - 3 = -\frac{5}{3}(x - 4)$$

$$3y - 9 = -5x + 20$$

$$5x + 3y - 29 = 0$$

Ejemplo 92

Hallar, por el método del parámetro, la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de $l_1 \equiv x - y - 7 = 0$ y $l_2 \equiv 3x + 2y - 1 = 0$ y por el punto $M(1,2)$.

La ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de l_1 y l_2 es, por la relación (37⁶):

$$x - y - 7 + k(3x + 2y - 1) = 0 \quad (I)$$

Las coordenadas de M satisfacen la ecuación:

$$1 - 2 - 7 + k(3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1) = 0$$

$$k = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo en (I):

$$x - y - 7 + \frac{4}{3}(3x + 2y - 1) = 0$$

$$3x - 3y - 21 + 12x + 8y - 4 = 0$$

$$15x + 5y - 25 = 0$$

$$3x + y - 5 = 0$$

Ejemplo 93

Un punto $A(-2, -3)$ perteneciente a la recta $l_1 \equiv 7x + 2y + 20 = 0$ y otro punto $B(6, 7)$ perteneciente a la recta $l_2 \equiv 3x - 10y + 52 = 0$ forman, con la intersección C de las rectas, un triángulo. Hallar la ecuación general de la mediana trazada desde C al lado AB .

La mediana cuya ecuación buscamos, pasa por la intersección de las rectas l_1 y l_2 y por el punto medio del segmento AB .

La ecuación de la familia de rectas que pasan por la intersección de l_1 y l_2 es:

$$7x + 2y + 20 + k(3x - 10y + 52) = 0 \quad (\text{I})$$

El punto medio del segmento AB es:

$$x_M = \frac{-2+6}{2} = 2 \quad y_M = \frac{-3+7}{2} = 2$$

$$M(2, 2)$$

Las coordenadas de M satisfacen la ecuación. Por tanto:

$$7 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 20 + k(3 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 52) = 0$$

$$38 + 38k = 0$$

$$k = -1$$

Sustituyendo en (I), reduciendo términos y simplificando:

$$7x + 2y + 20 - (3x - 10y + 52) = 0$$

$$4x + 12y - 32 = 0$$

$$x + 3y - 8 = 0$$

Ejercicio 111

Escribir la ecuación de la familia de rectas...

1) ... de pendiente $\frac{3}{4}$.

2) ... paralelas a la recta $l_1 \equiv 2x - 5y + 11 = 0$.

3) ... de pendiente $-\frac{1}{2}$.

- 4) ... que pasan por la intersección de las rectas $l_1 \equiv x + 2y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv 4x - 7y + 3 = 0$.
- 5) ... que pasan por $P(7, -2)$.

Determinar la propiedad común a todas las rectas que componen cada una de las familias cuyas ecuaciones se dan a continuación:

- 6) $y = 9x + k$
- 7) $y + 9 = k(x - 3)$
- 8) $\frac{x}{5} + \frac{y}{k} = 1$
- 9) $2x - 3y + k(5x + y - 3) = 0$
- 10) $4x + 7y + k = 0$
- 11) $\frac{x}{k} + \frac{y}{-6} = 1$
- 12) $y = kx - 7$

Resolver los ejercicios que siguen por el método del parámetro:

- 13) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por $M(4, -1)$.
- 14) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $A(5, -3)$ y $B(-2, -7)$.
- 15) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 5x - 2y + 7 = 0$ y que pasa por $M(-1, -3)$.
- 16) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(2, 4)$ y por la intersección de las rectas $l_1 \equiv x + 5y + 1 = 0$ y $l_2 \equiv 3x - y - 13 = 0$.
- 17) Hallar la ecuación general de la recta de pendiente 3 que pasa por la intersección de las rectas $l_1 \equiv 2x + y - 2 = 0$ y $l_2 \equiv 5x + 4y + 1 = 0$.
- 18) Hallar la ecuación general de la recta cuya ordenada en el origen es -3 y pasa por $N(1, 1)$.
- 19) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 7x - 3y + 9 = 0$ y que pasa por $M(6, 2)$.
- 20) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 3x + 4y + 1 = 0$ y cuya distancia al punto $A(2, 1)$ es 3.
- 21) Hallar la ecuación general de la recta paralela a $l_1 \equiv 7x - 24y + 100 = 0$ y cuya distancia al punto $B(3, 1)$ es 7.
- 22) Hallar la ecuación general de la recta perpendicular a $l_1 \equiv 5x - 2y + 9 = 0$ que pasa por $P(-3, 7)$.
- 23) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(6, 3)$ y cuya distancia al punto $Q(3, -1)$ es 4.
- 24) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por $P(5, -2)$ y dista 2 unidades del punto $(3, 1)$.
- 25) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de $l_1 \equiv 2x + y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv x - y - 5 = 0$ y que dista 5 unidades de $M(3, 4)$.

- 26) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por la intersección de $l_1 \equiv 2x - 3y - 5 = 0$ y $l_2 \equiv x + 2y - 13 = 0$ sabiendo que su abscisa en el origen es el doble de su pendiente.

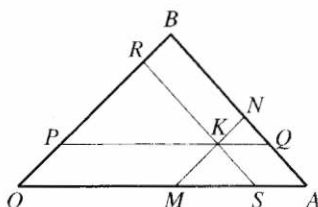
Ejercicio 112

Demostrar analíticamente cada uno de los siguientes teoremas:

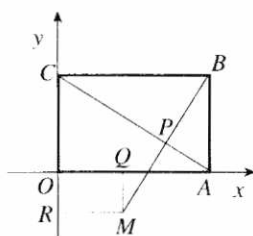
- 1) Las medianas de un triángulo son concurrentes.
- 2) Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.
- 3) Las alturas de un triángulo son concurrentes.
- 4) El baricentro, el ortocentro y el circuncentro de un triángulo son colineales.
- 5) Las bisectrices de los ángulos internos de un triángulo concurren en un punto (llamado incentro) que equidista de los tres lados.
- 6) En un triángulo cualquiera la bisectriz de un ángulo interno y las bisectrices de los ángulos externos no adyacentes a él son concurrentes.
- 7) Desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a los lados iguales. La suma de las longitudes de esas perpendiculares es constante e igual a la longitud de la altura trazada desde uno de los vértices de la base.
- 8) La bisectriz de cualquier ángulo de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados contiguos a los respectivos segmentos.
- 9) Las bisectrices de los dos ángulos adyacentes formados por dos rectas que se intersectan son perpendiculares entre sí.
- 10) Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo cualquiera forman entre sí un ángulo igual a la mitad del tercer ángulo externo.
- 11) La recta que une los puntos medios de los lados paralelos de un trapecio y las diagonales son concurrentes.
- 12) En todo triángulo ABC la distancia desde el circuncentro hasta el lado BC es dos veces mayor que la distancia del ortocentro al vértice A .
- 13) Sean M , N y P respectivamente los puntos de intersección de los lados BC , CA y AB de un triángulo cualquiera (o sus prolongaciones) con cierta recta. Entonces $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$.
- 14) En el triángulo rectángulo ABC (el vértice del ángulo recto en A) el cateto AC es tres veces mayor que el cateto AB . M y N son los puntos de trisección del cateto AC . Entonces se cumple que $\angle AMB + \angle ANB + \angle ACB = \frac{\pi}{2}$.
- 15) En un triángulo rectángulo, a y b son los catetos, c es la hipotenusa y h la altura trazada desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa. Entonces el triángulo cuyos lados son h , $h + c$ y $a + b$ también es rectángulo.
- 16) Si entre los lados a , b y c de un triángulo cualquiera existe la dependencia $a^2 = b^2 + bc$, entonces los ángulos α y β , opuestos, respectivamente, a los lados a y b , satisfacen la igualdad $\alpha = 2\beta$.
- 17) En todo triángulo la relación entre los radios R y r de las circunferencias

circunscrita e inscrita y la distancia d entre los centros de estas circunferencias es $d^2 = R^2 - 2Rr$.

- 18) A través de un punto interno K cualquiera de un triángulo OAB se trazan las rectas MN , PQ y RS , paralelas, respectivamente, a los lados BO , OA y AB . En esas condiciones $\frac{OP}{OB} \cdot \frac{BN}{BA} \cdot \frac{AS}{AO} = 1$.



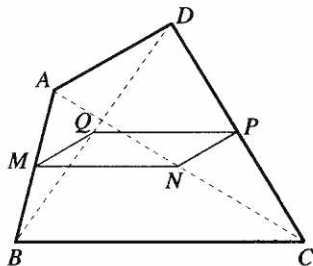
- 19) En todo triángulo rectángulo la suma de los catetos es igual a la suma de los diámetros de las circunferencias inscrita y circunscrita.
- 20) En todo triángulo rectángulo la bisectriz del ángulo recto es bisectriz también del ángulo que forman la mediana y la altura trazadas desde el vértice del ángulo recto.
- 21) En cierto trapecio la suma de los ángulos de la base mayor es $\frac{\pi}{2}$. Entonces el segmento que une los puntos medios de las bases es igual a la semidiferencia de las mismas.
- 22) Las bisectrices de los ángulos internos de un paralelogramo forman un rectángulo y las diagonales de este rectángulo son iguales a la diferencia de dos lados consecutivos del paralelogramo.
- 23) Sobre los lados de un paralelogramo, y hacia afuera, se construyen cuadrados. Las intersecciones de las diagonales de cada cuadrado forman a su vez un cuadrado.
- 24) Se construye sobre un sistema de ejes un rectángulo $OABC$ siendo O el origen y A y C , respectivamente, puntos pertenecientes a los ejes de abscisas y ordenadas. Sobre la diagonal AC se toma un punto cualquiera P . El segmento BP se prolonga en esa dirección hasta un punto M tal que $BP = PM$. Sean Q y R las proyecciones ortogonales de M sobre los ejes coordenados. Entonces P , Q y R son colineales.



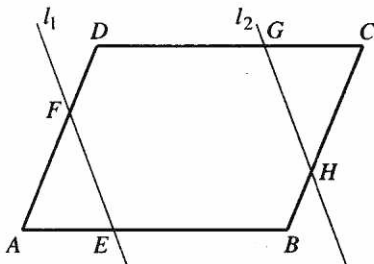
- 25) Por el baricentro G de un triángulo ABC se traza una recta cualquiera l de tal forma que los vértices B y C queden del mismo lado de la recta. Entonces $d_{(A,l)} = d_{(B,l)} + d_{(C,l)}$.
- 26) En un triángulo cualquiera ABC se trazan las medianas AM y BN que se intersectan en G . Se prolonga la mediana AM hasta un punto P tal que $MP = GM$ y la mediana BN hasta un punto Q tal que $NQ = GN$. Entonces A , B , P y Q son vértices de un paralelogramo.
- 27) En cierto trapecio $ABCD$, la base mayor AB es el doble de la base menor CD . Entonces las diagonales del trapecio cortan el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos (*mediana del trapecio*) en tres partes iguales.
- 28) Por el punto medio M del lado AB de un cuadrilátero cualquiera (ver figura en la página siguiente) se traza una paralela a BC que corta la diagonal AC

en N . Por N se traza una paralela a AD que corta el lado DC en P . Por P se traza una paralela a BC que corta la diagonal BD en Q . En esas condiciones:

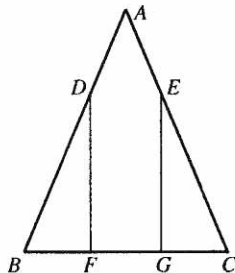
- a) el cuadrilátero $ADQM$ es un trapecio
- b) los segmentos MP y QN se bisecan.



- 29) La distancia entre los puntos en los que las diagonales de un trapecio cortan la mediana (ver N° 27) es igual a la semidiferencia de las bases.
- 30) En un trapecio $ABCD$ se prolongan la base AB hasta un punto E tal que $BE = DC$ y la base DC hasta un punto F tal que $CF = AB$; además, por el punto medio M del lado AD se traza una paralela l a las bases. Entonces l , AF , BC y ED concurren.
- 31) Se prolonga la mediana AM de un triángulo ABC hasta un punto D tal que $MD = AM$. Entonces $ABDC$ es un paralelogramo.
- 32) Sobre la diagonal de un paralelogramo se toman dos puntos equidistantes del centro y se unen con los extremos de la otra diagonal. El cuadrilátero que así se obtiene es un paralelogramo.
- 33) Si un paralelogramo está inscrito en otro, los dos tienen el mismo centro.
- 34) Se trazan dos paralelas l_1 y l_2 que cortan un paralelogramo. l_1 corta los lados AB y AD respectivamente en E y F . l_2 corta los lados BC y CD respectivamente en H y G . Si $AE = CG$, entonces $EFGH$ es un paralelogramo.

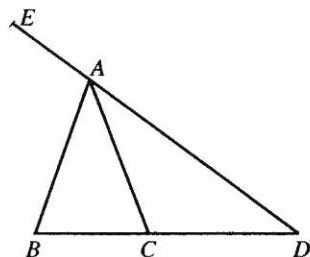
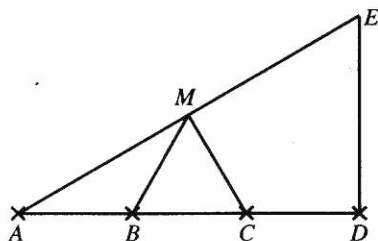


- 35) En un paralelogramo $ABCD$ se trazan desde los vértices A y C las perpendiculares AM y CP a la diagonal BD y desde los vértices B y D las perpendiculares BQ y DN a la diagonal AC . El cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.
- 36) En un cuadrilátero cualquiera, los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos y el que une los puntos medios de las diagonales se cortan en un punto que bisecciona los tres segmentos. (Este punto se llama *baricentro del cuadrilátero*).
- 37) En un triángulo isósceles ABC se toman dos puntos D y E , equidistantes de A , respectivamente sobre los lados AB y CA y desde ellos se trazan perpendiculares a la base BC , siendo F y G los pies de esas perpendiculares. Entonces el triángulo AFG es también isósceles.



- 38) El punto medio de la base de un triángulo isósceles equidista de los lados.
- 39) Si el baricentro y el ortocentro de un triángulo coinciden, el triángulo es equilátero.

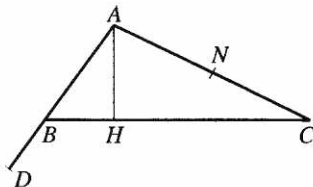
- 40) ABC y ACD son dos triángulos isósceles con el vértice A y el lado AC comunes y M y N los puntos medios, respectivamente, de las bases BC y CD . Entonces los segmentos BD y MN son paralelos.
- 41) En un triángulo cualquiera ABC se toma arbitrariamente un punto P de la bisectriz AM del ángulo A y desde él se trazan las perpendiculares PQ y PR sobre los lados AB y CA respectivamente. Entonces la bisectriz AM y el segmento QR son perpendiculares.
- 42) En un triángulo isósceles ABC con vértice A se toma un punto D sobre el lado AC y se prolonga el lado AB hasta un punto E de tal forma que $CD = BE$. Entonces el punto P de intersección de BC y DE es el punto medio de DE .
- 43) Por un punto P interno a un triángulo equilátero se trazan paralelas a los tres lados. La suma de estas cuerdas es igual al doble del lado.
- 44) Si en un trapecio $ABCD$ las bisectrices de los ángulos de la base mayor AB se intersectan en un punto E de la base menor, entonces se cumple que $CD = AD + BC$.
- 45) Si en un trapecio $ABCD$ las bisectrices de los ángulos de la base menor CD se intersectan en un punto F de AB , entonces $AB = AD + BC$.
- 46) En un triángulo isósceles la paralela a la base trazada por el vértice biseca los ángulos externos.
- 47) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 48) Por un punto P de la base BC de un triángulo isósceles se traza una perpendicular a BC que intersecta a uno de los lados y a la prolongación del otro en los puntos D y E . Entonces $AD = AE$.
- 49) Dados los puntos colineales A, B, C y D tales que $AB = BC = CD$; el punto M , vértice del triángulo equilátero BCM , y el punto E , intersección de la recta AM y la perpendicular a la recta AD en D , se cumple entonces que MD y CE son perpendiculares.
- 50) En un triángulo ABC se prolonga su mediana AM hasta un punto D tal que $MD = AM$. Entonces las rectas AB y CD son paralelas.
- 51) En un triángulo isósceles ABC de vértice A , se prolonga BA hasta un punto D tal que $BA = AD$. Entonces el ángulo BCD es recto.
- 52) En un triángulo isósceles ABC se prolonga la base BC hasta un punto D de tal forma que $AC = CD$ y se prolonga también el segmento DA hasta un punto cualquiera E . Entonces, el ángulo BAE es tres veces el ángulo CDA .
- 53) En un triángulo isósceles ABC se traza una perpendicular por B a la base BC que intersecta la prolongación de CA en



D. La mediana *AM* del triángulo *ABC* es paralela a *BD*.

- 54) En la base *BC* del triángulo isósceles *ABC* se toma un punto *P*. Sean *D* y *E* los pies de las perpendiculares trazadas desde *P* sobre *AB* y *AC*, respectivamente. Se prolonga *DP* hasta un punto *F* tal que $PF = PE$. Entonces *CF* es paralela a *AB*.

- 55) En un triángulo *ABC*, el ángulo *B* es agudo y es el doble del ángulo *C*, *AH* la altura y *N* el punto medio de *AC*. Se prolonga *AB* hasta *D* de tal forma que $BD = BH$. Entonces *D*, *H* y *N* son colineales.

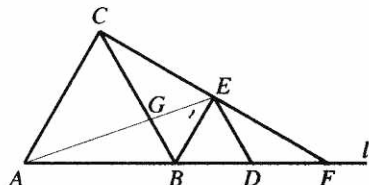


- 56) En un triángulo *ABC* se prolonga el lado *BA* hasta *E* de tal forma que $AE = AC$. Entonces la bisectriz del ángulo *A* es paralela al segmento *CE*.
- 57) En un triángulo *ABC*, *AM* es mediana y *BP* y *CQ* alturas. Entonces $MP = MQ$.
- 58) En un triángulo isósceles el ángulo que forma con la base la altura trazada desde uno de los lados es igual a la mitad del ángulo del vértice.
- 59) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 60) Por un punto *M* de la bisectriz de un ángulo *XAY* se traza una paralela al lado *AX* que encuentra al lado *AY* en un punto *N*. En tal caso $AN = NM$.
- 61) En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, el ángulo formado por la altura *AH* y la mediana *AM* es igual a la diferencia de los ángulos *B* y *C*.
- 62) En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, se traza la altura *AH*. Entonces las bisectrices de los ángulos *HBA* y *HAC* son perpendiculares.
- 63) En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, *AH* es altura y la bisectriz del ángulo *HAC* corta el lado *BC* en un punto *D*. En tal caso el triángulo *ABD* es isósceles.
- 64) En un triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, *AH* es altura y *E* y *F* los puntos medios de los catetos. Entonces *EH* y *HF* son perpendiculares.
- 65) Por el vértice *A* de un triángulo rectángulo isósceles se traza una recta *l* externa al triángulo. *D* y *E* son las proyecciones de *B* y *C* sobre *l*. En tal caso,
- a) el ángulo *DAB* es igual al ángulo *ECA*;
 - b) $AD = CE$;
 - c) $BD = AE$.
- 66) En un sistema de ejes coordenados de origen *O*, se toman dos puntos *A* y *B* sobre los ejes de abscisas y ordenadas, respectivamente, a igual distancia del origen. Una recta que pasa por *A* intersecta el eje de ordenadas en el punto *C*. La perpendicular a esta recta y que pasa por *B* intersecta el eje de abscisas en *D*. Entonces se cumple que $OC = OD$.
- 67) En un triángulo equilátero *ABC*, los puntos *D*, *E* y *F* son cada uno el primer punto de trisección de los lados *AB*, *BC* y *CA*, respectivamente. Entonces los lados del triángulo *DEF* son ordenadamente perpendiculares a los lados del triángulo *ABC*.

68) En un triángulo ABC , en el que $\angle B = 2\angle C$, se traza por el punto medio M del lado AC una paralela a la bisectriz del $\angle B$. Esta paralela intersecta al lado BC en el punto N . En tal caso, el triángulo ANC es rectángulo.

69) Los puntos medios de los lados de un triángulo y el pie de una altura cualquiera son vértices de un trapecio isósceles.

70) Sobre una recta l se determinan dos segmentos adyacentes AB y BD tales que $AB = 2BD$. A un mismo lado de la recta se construyen los triángulos equiláteros ABC y BDE . Sea F el punto en el que la recta CE corta la recta l y G el punto de intersección de los segmentos AE y BC . En tal caso



a) $AB = BF$

b) El triángulo ACF es rectángulo

c) $CG = 2GB$

71) En el trapecio $ABCD$, la base mayor AB es el doble de la base menor CD e igual al lado BC . Entonces $AC = BC$.

72) La suma de las distancias desde un punto P interno de un triángulo equilátero a los tres lados es igual a la altura del triángulo.

73) En un triángulo ABC , rectángulo en A , se traza la altura AH y la mediana AM . D y E son las proyecciones del punto H sobre los catetos AB y AC , respectivamente. En tal caso el segmento DE es perpendicular a la mediana AM .

74) En el triángulo oblicuángulo ABC , P es la intersección de la altura AH con la bisectriz del $\angle B$ y Q otro punto sobre la bisectriz de $\angle B$ tal que $AP = AQ$. En tal caso el triángulo APQ es rectángulo.

75) Sea la mediana AM de un triángulo ABC rectángulo en A : las bisectrices de los ángulos AMC y AMB son paralelas cada una a un cateto.

76) En un triángulo ABC , rectángulo en A , AD es bisectriz. La perpendicular a BC en D corta el lado AC en F . Entonces $BD = DF$.

77) La distancia del punto medio M de un segmento AB a una recta l , que no corta el segmento, es igual a la media aritmética de las distancias de A y B a dicha recta.

78) La suma de las distancias de los vértices de un paralelogramo a una recta externa a él es el cuádruplo de la distancia de esa recta al centro del paralelogramo.

79) La suma de las distancias de los vértices de un triángulo a una recta externa a él es igual a la suma de las distancias de los puntos medios de los lados del triángulo a esa recta.

80) Por el vértice A de un paralelogramo $ABCD$ se traza una recta l que no corta el paralelogramo. La distancia, entonces, de C a la recta es igual a la suma de las distancias de B y D a esa recta.

81) La suma de las distancias de los vértices de un triángulo a una recta externa a él es igual al triplo de la distancia del baricentro del triángulo a esa recta.

82) En un triángulo rectángulo, la mediana que incide sobre la hipotenusa es

igual a la mitad de ésta.

- 83) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 84) La mediana divide a un triángulo en dos triángulos de área equivalente.
- 85) Enunciar el recíproco del teorema anterior y demostrarlo.
- 86) En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.
- 87) Teorema recíproco: si en un cuadrilátero los ángulos opuestos son suplementarios, el cuadrilátero puede ser inscrito en una circunferencia.
- 88) En un cuadrilátero inscrito, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos. (*Teorema de Tolomeo*).
- 89) En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos.
- 90) Teorema recíproco: si la suma de dos lados opuestos de un cuadrilátero es igual a la suma de los otros dos, el cuadrilátero es circunscribible.

Ejercicio 113

Ejercicios de recapitulación

- 1) Hallar las coordenadas del punto que equidista de los puntos $A(-3,0)$; $B(-1,-2)$ y $C(7,0)$.
- 2) Demostrar de cuatro formas diferentes que los puntos $K(-4,4)$; $L(-2,3)$ y $M(6,-1)$ son colineales.
- 3) Determinar los vértices de un triángulo sabiendo que los puntos medios de sus lados son $D(3,5)$; $E(2, \frac{1}{2})$ y $F(-3, \frac{5}{2})$.
- 4) La pendiente de una recta que pasa por $A(3,2)$ es igual a $\frac{3}{4}$. Determinar las coordenadas de dos puntos de esa recta que estén a una distancia de 5 unidades del punto A.
- 5) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya relación de distancias a la recta $y - 4 = 0$ y al punto $(3,2)$ es igual a 1.
- 6) Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto P que se mueve de tal forma que la pendiente del segmento que forma con $A(2,4)$ es siempre una unidad mayor que la pendiente del segmento que forma con $B(5,-3)$.
- 7) Hallar la ecuación del lugar geométrico de del punto medio de un segmento de 12 unidades de longitud cuyos extremos se desplazan constantemente sobre los ejes coordenados.
- 8) Un punto se mueve de tal forma que el producto de la pendiente del segmento que forma con $A(-2,3)$ y la del segmento que forma con $B(3,1)$ es siempre igual a -1 . Determinar la ecuación de su lugar geométrico.
- 9) Hallar el valor de k en la ecuación $2x + 3y + k = 0$ para que dicha recta forme con los ejes coordenados un triángulo de área 27.
- 10) Hallar la ecuación general de la recta cuyos puntos equidistan de las rectas $3x + 4y - 1 = 0$ y $12x - 5y + 3 = 0$.

- 11) Determinar las coordenadas de los dos puntos de la recta $l \equiv 2x + y - 1 = 0$ que distan dos unidades de la recta $l_1 \equiv 3x - 4y + 3 = 0$.
- 12) Determinar el valor de k para que las rectas $l_1 \equiv x - ky + 3k = 0$ y $l_2 \equiv (k-1)x - y - 1 = 0$ sean perpendiculares y determinar las coordenadas del punto en el que se intersectan.
- 13) Determinar el valor de k para que los puntos $A(5,k)$; $B(1,3)$ y $C(7,1)$ sean los vértices de un triángulo isósceles de base BC .
- 14) Dados los puntos $A(3,1)$; $B(3,4)$ y $D(9,3)$ determinar sobre la recta paralela a AD que pasa por B un punto C tal que la suma de los cuadrados de los lados del trapecio $ABCD$ sea igual a 140.
- 15) Dado el triángulo de vértices $A(2,1)$; $B(6,4)$ y $C(-4,9)$, determinar las coordenadas del punto en el que la bisectriz del ángulo A corta el lado BC .
- 16) Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(-2,-2)$ y $B(1,3)$. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices sabiendo que las diagonales se cortan en $M(3, \frac{3}{2})$.
- 17) Una recta determina sobre los ejes coordenados segmentos de igual longitud. Hallar su ecuación general sabiendo que pasa por $P(5,-1)$.
- 18) El punto medio del segmento que los ejes coordenados determinan sobre una recta es $M(3,5)$. Hallar la ecuación general de esa recta.
- 19) Un rayo de luz tiene por ecuación $l \equiv x + 4y - 6 = 0$. Al llegar al eje de abscisas se refleja en él. Hallar las coordenadas del punto de contacto del rayo con el eje y la ecuación del rayo reflejado.
- 20) Determinar las ecuaciones de las rectas perpendiculares a la recta $l \equiv 5x - 3y + 15 = 0$ en los puntos en los que ésta corta los ejes coordenados.
- 21) La ecuación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles es $3x - y + 5 = 0$ y el vértice del ángulo recto es el punto $(4,-1)$. Determinar las ecuaciones de los catetos.
- 22) Hallar la ecuación general de la recta que divide el segmento de extremos $A(6,7)$ y $B(10,-5)$ en dos partes que están en la relación 1:3 y es perpendicular a otra recta que determina sobre los ejes de abscisas y ordenadas segmentos, respectivamente, de 4 y 8 unidades.
- 23) Se dan dos segmentos: uno de extremos $A(3,1)$ y $B(6,10)$ y otro de extremos $C(0,6)$ y $D(10,1)$. Determinar para cada segmento la razón en la que el punto de intersección los divide.
- 24) Un rayo de luz que pasa por el punto $A(9,4)$ incide sobre el eje de abscisas y se refleja pasando por $B(0,2)$. Determinar el ángulo que forma el rayo de luz con el eje de abscisas.
- 25) $l_1 \equiv x - 3y - 4 = 0$ y $l_2 \equiv 6x - y + 10 = 0$ son las ecuaciones de dos lados adyacentes de un paralelogramo cuyas diagonales se cortan en el punto $M(3, \frac{5}{2})$. Hallar las ecuaciones de los otros dos lados.

- 26) Un punto que se desplaza en forma rectilínea pasa por los puntos $A(-2,4)$ y $B(6,-1)$. En el trayecto corta el eje de abscisas. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?
- 27) Dos rectas que pasan por el origen de coordenadas forman entre sí un ángulo $\theta = 45^\circ$. La relación entre sus pendientes es 6:1. Hallar las ecuaciones de ambas rectas.
- 28) Dado el triángulo de vértices $A(-2,3)$; $B(4,6)$ y $C(6,-2)$, hallar la ecuación de la recta que pasa por A y es paralela a la mediana trazada desde B .
- 29) En el triángulo del ejercicio anterior, hallar la ecuación de la recta que pasa por B y es perpendicular a la mediana trazada desde C .
- 30) Los puntos $A(-4,1)$ y $C(6,9)$ son dos vértices opuestos de un rombo. Hallar las ecuaciones de las diagonales del rombo.
- 31) Las ecuaciones de los lados de un triángulo de vértices A , B y C son: $AB \equiv 5x - 2y - 27 = 0$; $BC \equiv 2x + 3y - 7 = 0$ y $CA \equiv 3x - 5y - 1 = 0$. Determinar la ecuación de la altura trazada sobre el lado BC .
- 32) Determinar la ecuación de la mediatriz del lado BC del ejercicio anterior.
- 33) Las diagonales de un rombo se intersectan en el punto $(1,3)$. La ecuación de una de ellas es $x - y + 2 = 0$ y la de uno de los lados es $x + 5y - 4 = 0$. Determinar las coordenadas de los cuatro vértices del rombo.
- 34) Dado el triángulo de vértices $A(-2,9)$; $B(-4,5)$ y $C(6,3)$ determinar las coordenadas del punto de intersección de la paralela a AB trazada por C y la perpendicular a AB trazada por A .
- 35) Hallar el área del paralelogramo que forman las rectas cuyas ecuaciones son: $l_1 \equiv 5x + 3y - 26 = 0$; $l_2 \equiv 3x - y + 4 = 0$; $l_3 \equiv 5x + 3y + 2 = 0$ y $l_4 \equiv 3x - y - 10 = 0$.
- 36) Hallar el área del rombo que forman las rectas $l_1 \equiv 5x - 2y + 1 = 0$; $l_2 \equiv 2x - 5y - 8 = 0$; $l_3 \equiv 5x - 2y - 20 = 0$ y $l_4 \equiv 2x - 5y + 13 = 0$.
- 37) Dos de los vértices del rombo $ABCD$ son $A(6,1)$ y $C(1,6)$. La ecuación del lado CD es $6x - y = 0$. Determinar las coordenadas de los otros dos vértices.
- 38) Un rayo de luz parte del punto $A(-1,3)$, se refleja en el eje de abscisas y llega al punto $B(5,6)$. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.
- 39) Un rayo de luz parte del punto $A(2,5)$, se refleja en el eje de ordenadas y llega al punto $B(8,0)$. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado, el punto de incidencia del rayo sobre el eje de ordenadas y el recorrido total del rayo de luz.
- 40) Un rayo de luz parte del punto $A(1,9)$, se refleja sobre la bisectriz del primer cuadrante y llega al punto $B(0,4)$. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.
- 41) Un rayo de luz parte del punto $A(-1,3)$, se refleja sobre la recta $l \equiv x - 3y = 0$ y llega al punto $B(7,9)$. Hallar las ecuaciones de los rayos incidente y reflejado.

- 42) Las pendientes de dos rectas son iguales a 2 y -3 . Determinar las pendientes de las dos bisectrices de los ángulos formados por esas rectas.
- 43) Un punto A dista 5 unidades del origen y la pendiente de la recta que lo une al punto $B(9,2)$ es $-\frac{1}{5}$. Determinar las coordenadas de A .
- 44) La base de un triángulo isósceles es el segmento que une los puntos $B(-7,1)$ y $C(-2,-4)$ y su vértice se encuentra sobre el eje de ordenadas. Determinar las ecuaciones de los tres lados.
- 45) Hallar la proyección del punto $M(1,3)$ sobre la recta $l \equiv x - 3y - 2 = 0$.
- 46) Un punto equidista de los puntos $A(-3,-2)$ y $B(4,1)$ y la pendiente de la recta que lo une con $P(4,4)$ es $\frac{1}{5}$. Determinar sus coordenadas.
- 47) Se sabe que en las escalas de temperatura, cero grados centígrados corresponden a 32 grados Fahrenheit y 100 grados centígrados corresponden a 212 grados Fahrenheit.
- a-. Hallar la ecuación de la recta que relaciona estas dos escalas.
- b-. ¿Cuántos grados Fahrenheit corresponden a 45° centígrados?
- c-. ¿Cuántos grados centígrados corresponden a 90°F ?
- d-. ¿A qué temperatura se igualan las lecturas de ambas escalas?
- 48) Entre alargamiento y Fuerza (en los resortes) existe una función lineal llamada Ley de Hooke. Complete los números que faltan en la tabla:

Alargamiento (cm)	15	22	25	?
Fuerza (Newt)	225	330	?	500

- 49) Los puntos $A(4,9)$ y $C(-2,1)$ son dos vértices opuestos de un rombo. Determinar el área del rombo si sus lados miden $5\sqrt{10}$.
- 50) Dados los puntos $P(2,2)$ y $R(5,-2)$, hallar en el eje de abscisas un punto Q tal que el ángulo $\angle PQR$ sea recto.
- 51) El baricentro G de un triángulo está situado en el eje de abscisas; dos de los vértices del triángulo son $A(2,-3)$ y $B(-5,1)$; el tercer vértice C está en el eje de ordenadas. Determinar las coordenadas de G y C .
- 52) La base de un triángulo isósceles es el segmento de extremos $A(-1,6)$ y $B(-7,-6)$. Su vértice C está sobre la recta $l \equiv x - 4y - 14 = 0$. Determinar el área del triángulo.
- 53) Un teniente coloca a sus soldados en una disposición rectangular de filas y columnas. La separación entre filas y entre columnas es de un metro. El soldado Pérez está de 3° , si se comienza a contar desde el frente; de 6° , si se cuenta desde la izquierda y de 15° si se cuenta desde la derecha. El soldado Gómez es el 3° , si se cuenta desde el fondo, y el 3° si se cuenta desde la derecha. Si los soldados Pérez y Gómez se encuentran a 13 metros de distancia, ¿cuántos son los soldados en total?
- 54) El reloj descompuesto de un campanario marca las 8:09 cuando son en realidad las 7:47 y marca las 8:32 cuando son las 7:59. ¿Qué hora marcará a las 8:35? ¿Qué hora será cuando marque las 11:59?
- 55) $M(-1,3)$; $N(3,6)$; $P(6,2)$ y $Q(2,-1)$ son, respectivamente, el primer punto de

· trisección de los lados consecutivos de un cuadrado. Determinar los vértices del cuadrado.

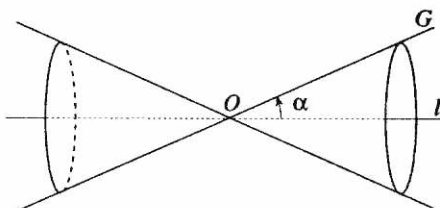
Una ecuación de primer grado con dos variables de la forma $Ax + By + C = 0$ es la ecuación del lugar geométrico de los puntos de una recta del plano.

Una ecuación de segundo grado de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$$

corresponde, dependiendo de ciertas condiciones, a la ecuación del lugar geométrico de una *Circunferencia*, una *Elipse*, una *Hipérbola* o una *Parábola* (siempre en el plano).

Una recta móvil G que corta a una recta fija l en un punto O , formando con ella un ángulo agudo α , engendra una superficie en el espacio tridimensional. Esta superficie recibe el nombre de *cono circular recto*; la recta G es la *generatriz* del cono; la recta l es el *eje* del cono y el punto O es su *vértice*. Las dos porciones del cono, separadas por el vértice, se llaman *hojas* del cono.



Secciones cónicas

La circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola antes nombradas reciben el nombre genérico de cónicas pues provienen de la intersección de un plano con un cono circular recto.

1) Si un plano intersecta una de las hojas del cono y el eje de éste es perpendicular al plano, se obtiene una circunferencia (Fig. 1)

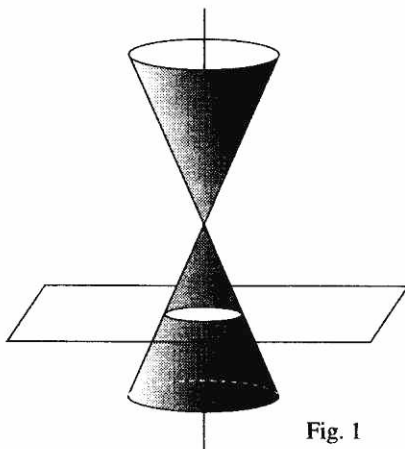


Fig. 1

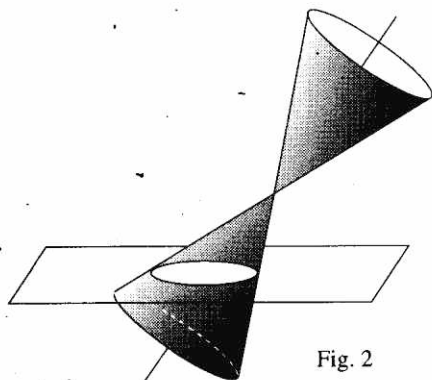


Fig. 2

2) Si el plano forma con el eje un ángulo distinto de 90° y corta todas las directrices de una de las hojas del cono, la figura que se obtiene es una elipse (Fig.2).

3) Si el plano es paralelo a la generatriz del cono, se obtiene una parábola (Fig. 3).

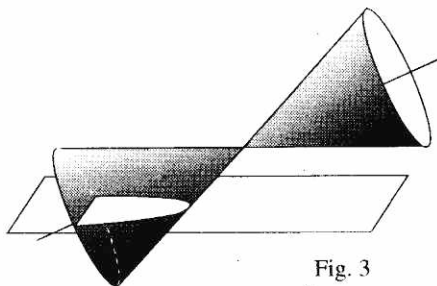


Fig. 3

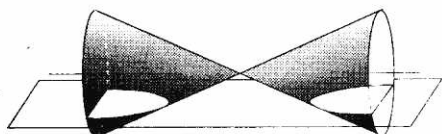


Fig. 4

4) Por último, si el plano corta ambas hojas del cono se obtienen las dos ramas de una hipérbola (Fig. 4)

Si el plano intersecta el cono pasando por el vértice de éste, las cónicas degeneran en un punto, una recta o un par de rectas que se cruzan.

El estudiar las curvas de segundo grado como resultado de la sección de un cono circular recto por un plano se remonta a la antigüedad. En el siglo III a. C. **Apolonio** hizo un estudio de las cónicas, siendo este estudio uno de los aportes más notables de la Geometría griega.

Unos 20 siglos después, **Galileo Galilei**, estudiando la trayectoria de un proyectil lanzado horizontalmente desde lo alto de una torre, advirtió que dicha trayectoria era parabólica.

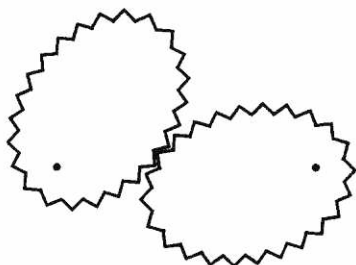
En 1600 **Johannes Kepler** descubre que los planetas se mueven en trayectorias elípticas y más tarde **Isaac Newton** demuestra que estas trayectorias no son posibles de no ser cierta la Ley de la Gravitación Universal.

Sin embargo, sólo desde 1637, con la aplicación del álgebra a la geometría por parte de **René Descartes**, el estudio de las secciones cónicas se convirtió en parte de la matemática.

Las cónicas son curvas presentes en fenómenos naturales y utilizadas por el hombre en múltiples aplicaciones:

No sólo los planetas, sino los satélites y muchos cometas tienen órbitas elípticas.

Los engranajes elípticos, con centros de rotación en los focos, actúan de tal forma que, si uno de ellos gira con velocidad constante, hace que el otro gire con una velocidad de rotación que varía en forma periódica. En algunos juguetes se obtienen graciosos movimientos con la utilización de estos engranajes.



En muchas ciudades existen edificaciones que poseen algún salón en forma elíptica y aprovechan como curiosidad para los visitantes, la propiedad de que todo lo que dice, aunque sea en voz muy baja, una persona situada en uno de los focos, se escucha perfectamente desde el otro foco. Existen también muchos puentes con arcos elípticos.

Pasando a la hipérbola, algunos cometas no periódicos siguen, al llegar a la cercanía del sol y al entrar en su campo gravitatorio, la trayectoria de una de las ramas de una hipérbola.

Muchas edificaciones adoptan la hipérbola en sus líneas arquitectónicas: torres en forma de hiperboloide de una hoja, edificios en forma de paraboloide hiperbólico, etc.

La trayectoria de una partícula alfa en el campo eléctrico producido por el núcleo de un átomo es una hipérbola.

La gráfica de la ecuación de presión-volumen de un gas a una temperatura constante, es una hipérbola.

El sistema Loran de navegación es una aplicación inmediata de las propiedades de la hipérbola.

Considerando, por último, la parábola, su presencia en el mundo físico es muy frecuente: la parábola se utiliza en el diseño de espejos parabólicos de telescopios, de radiotelescopios, de reflectores y faros (como los de los automóviles, aviones y trenes), de hornos solares, de equipos de radar, de microscopios de campo oscuro, etc.

La trayectoria de un proyectil sometido a la fuerza de la gravedad, si se desprecia la resistencia del aire, es una parábola.

En el diseño de puentes se utiliza frecuentemente la parábola sea en arcos parabólicos como en cables de suspensión de puentes colgantes (si el peso del puente está uniformemente distribuido).

Estudio de las cónicas

Circunferencia, elipse, hipérbola y parábola, hemos visto, fueron estudiadas desde la antigüedad como secciones cónicas. Sin embargo, sus propiedades permiten estudiarlas también analíticamente y cada una de ellas puede ser definida de acuerdo con sus propias características.

Redefiniremos, pues, cada una de ellas y haremos su estudio desde el punto de vista analítico, como lugares geométricos.

Nota: En el estudio de las cónicas nos limitaremos exclusivamente a las que tienen ejes paralelos a los ejes coordenados.

LA CIRCUNFERENCIA

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *Centro*.

Si tomamos el punto $C(x_0, y_0)$ como centro y llamamos R (*Radio*) a la distancia a la que se hayan los puntos de la circunferencia, como cada uno de ellos debe estar a una distancia R del centro, la ecuación del lugar geométrico será:

$$d_{(C,P)} = R$$

Calculando la distancia:

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = R$$

Elevando al cuadrado:

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$$

(38^G)

Esta ecuación recibe el nombre de *Ecuación Canónica* de la circunferencia.

Si desarrollamos la ecuación canónica de la circunferencia, eliminamos (de haberlos) denominadores y reducimos términos semejantes obtendremos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$$

(39^G)

que llamaremos *Ecuación General* de la circunferencia.

Característica de la ecuación general de toda circunferencia es que los términos que contienen x^2 y y^2 tienen igual coeficiente.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación general de la circunferencia que tiene radio 5 y centro en $C(-8,4)$.

Utilizando la ecuación canónica (38^G):

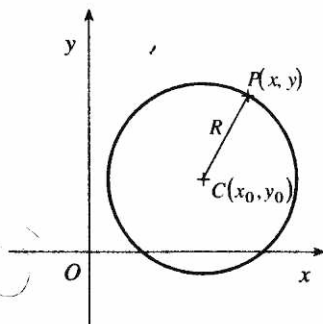
$$(x+8)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Desarrollando:

$$x^2 + 16x + 64 + y^2 - 8y + 16 = 25$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando:

$$x^2 + y^2 + 16x - 8y + 55 = 0$$



Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la circunferencia que tiene radio $2\sqrt{3}$ y centro en $C(\frac{1}{4}, -\frac{1}{6})$.

Utilizando la ecuación canónica (38°):

$$(x - \frac{1}{4})^2 + (y + \frac{1}{6})^2 = (2\sqrt{3})^2$$

Desarrollando:

$$x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16} + y^2 + \frac{y}{3} + \frac{1}{36} = 12$$

Multiplmando por 144 para eliminar denominadores:

$$144x^2 - 72x + 9 + 144y^2 + 48y + 4 = 1728$$

Reduciendo términos semejantes y ordenando:

$$144x^2 + 144y^2 - 72x + 48y - 1715 = 0$$

Ejercicio 114

En los siguientes ejercicios se dan las coordenadas del centro y la longitud del radio de algunas circunferencias. Hallar en cada caso la ecuación general.

1) $C(3, 2)$ $R = \sqrt{7}$

2) $C(5, -1)$ $R = 4$

3) $C(-2, 0)$ $R = 2\sqrt{3}$

4) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ $R = 2\sqrt{2}$

5) $C(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ $R = 3$

6) $C(0, -\frac{1}{2})$ $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$

7) $C(-\sqrt{3}, \sqrt{2})$ $R = \sqrt{5}$

$$\frac{1}{9 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 9} - \frac{8}{180} = \frac{4+9-8}{36} = \frac{5}{36}$$
$$\frac{-115}{+13} = \frac{-215}{36}$$

Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general: Método de completación de cuadrados

Una de las formas para determinar el centro y el radio de una circunferencia de ecuación general conocida es llevar la ecuación a la forma canónica mediante el método de completación de cuadrados.

Explicamos el método a través de un ejemplo concreto:

Ejemplo 3

Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 27 = 0$ determinar centro y radio llevando la ecuación a la forma canónica. Representar gráficamente la circunferencia.

1-. Agrupamos los términos que contienen x y los que contienen y y pasamos el término independiente al miembro de la derecha:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 10y) = -27$$

2-. Para que el primer paréntesis sea un cuadrado de la forma $(x+h)^2$, el doble producto de x por h debe ser igual a $-6x$:

$$2hx = -6x$$

De donde:

$$h = -3$$

Tomamos esta cantidad y , elevada al cuadrado, la sumamos a los términos del primer paréntesis:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y) = -27$$

En forma análoga, para que el segundo paréntesis sea un cuadrado de la forma $(y+k)^2$, el doble producto de y por k debe ser igual a $10y$:

$$2ky = 10y$$

De donde:

$$k = 5$$

Sumamos el cuadrado de esta cantidad a los términos del segundo paréntesis:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -27$$

Como hemos añadido cantidades en el miembro de la izquierda, debemos sumarlas también en el de la derecha para no alterar la ecuación:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = -27 + 9 + 25$$

Factorizando los paréntesis y reduciendo términos, obtenemos la ecuación en forma canónica:

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 7$$

El centro y el radio de la circunferencia se pueden determinar por simple inspección:

$$C(3, -5)$$

$$R^2 = 7$$

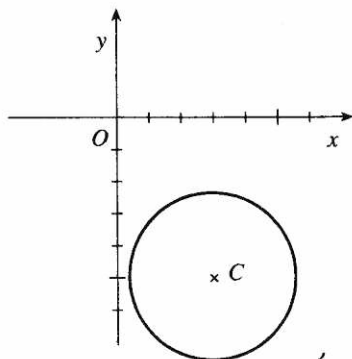
de donde:

$$R = \sqrt{7}$$

Hallamos el valor aproximado para hacer el gráfico:

$$R \cong 2,65$$

Conociendo esos datos, la representación gráfica es inmediata:



Ejemplo 4

Determinar centro y radio llevando a la forma canónica la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 - 22y + 1 = 0$.

Agrupamos los términos de cada variable:

$$x^2 + (y^2 - 22y) = -1$$

El primer término ya es un cuadrado perfecto. Para que el segundo sea un cuadrado de la forma $(y+k)^2$, debe cumplirse que:

$$2ky = -22y$$

de donde

$$k = -11$$

y

$$k^2 = 121$$

Sumando a ambos miembros

$$x^2 + (y^2 - 22y + 121) = -1 + 121$$

La ecuación canónica es:

$$x^2 + (y - 11)^2 = 120$$

Determinamos centro y radio:

$$C(0, 11)$$

$$R^2 = 120$$

$$R = 2\sqrt{30}$$

Ejemplo 5

Llevar a la forma canónica la ecuación $x^2 + y^2 - x + 3y + 2 = 0$ y determinar centro y radio de la circunferencia.

Agrupando por variables:

$$(x^2 - x) + (y^2 + 3y) = -2$$

Calculamos las cantidades para completar los cuadrados

$$2hx = -x$$

$$2ky = 3y$$

$$h = -\frac{1}{2}$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$h^2 = \frac{1}{4}$$

$$k^2 = \frac{9}{4}$$

Sumamos a ambos miembros:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 + 3y + \frac{9}{4}\right) = -2 + \frac{1}{4} + \frac{9}{4}$$

Factorizando:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Determinamos C y R:

$$C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$R^2 = \frac{1}{2}$$

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejemplo 6

Llevar a la forma canónica la ecuación $36x^2 + 36y^2 - 24x + 36y - 311 = 0$ y determinar centro y radio de la circunferencia.

Agrupando por variables:

$$(36x^2 - 24x) + (36y^2 + 36y) = 311$$

En el caso de que A en la ecuación general sea distinta de la unidad, es preferible sacar factor común A en cada grupo antes de completar cuadrados:

$$36\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 36\left(y^2 + y\right) = 311$$

$$2hx = -\frac{2}{3}x$$

$$2ky = y$$

$$h = -\frac{1}{3}$$

$$k = \frac{1}{2}$$

$$h^2 = \frac{1}{9}$$

$$k^2 = \frac{1}{4}$$

Sumando a ambos miembros:

$$36\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + 36\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) = 311 + 36 \cdot \frac{1}{9} + 36 \cdot \frac{1}{4}$$

Nótese que las fracciones que sumamos a los términos de cada paréntesis del miembro de la izquierda quedan afectadas por el factor que multiplica el paréntesis. Por eso, al hacer la compensación en el miembro de la derecha, hay que multiplicar las fracciones por ese factor.

Factorizando:

$$36\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 36\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 324$$

Dividiendo por 36, la ecuación queda en forma canónica:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 9$$

Determinamos C y R :

$$C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$R = 3$$

Ejercicio 115

En cada uno de los siguientes ejercicios se da la ecuación general de una circunferencia. Determinar el centro y el radio de cada una de ellas llevando previamente la ecuación a la forma canónica por el método de completación de cuadrados. Representar gráficamente las circunferencias de los ejercicios pares.

1) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

9) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{7}x - 6 = 0$

2) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

10) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 8y - 59 = 0$

3) $x^2 + y^2 - 10y = 0$

(11) $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y - 13 = 0$

4) $x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$

12) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 24y - 35 = 0$

5) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 8 = 0$

13) $9x^2 + 9y^2 - 6x + 12y - 76 = 0$

(6) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$

14) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 20y + 17 = 0$

(7) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{5}x + 2\sqrt{3}y = 0$

(5) $3x^2 + 3y^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{7}y - 9 = 0$

8) $x^2 + y^2 + 4x - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$

16) $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$

Ejemplo 7

Hallar la ecuación general de la circunferencia que tiene su centro en $C(-2, 5)$ y pasa por el punto $P(3, -4)$.

Para hallar la ecuación de una circunferencia necesitamos conocer las coordenadas de su centro y la longitud de su radio.

Dado que el radio, único elemento que nos falta, es igual a la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia, tenemos:

$$R = d_{(C, P)}$$

$$= \sqrt{(3+2)^2 + (-4-5)^2}$$

$$= \sqrt{106}$$

La ecuación canónica es, utilizando (38⁶):

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{106})^2$$

que, desarrollada, nos da la ecuación general:

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 77 = 0$$

Ejercicio 116

En cada uno de los siguientes ejercicios se da el centro C de una circunferencia y un punto P de ella. Determinar en cada caso la ecuación general de la circunferencia.

1) $C(2,1); \quad P(7,-3)$

2) $C(-2,-1); \quad P(6,5)$

3) $C(0,4); \quad P(4,5)$

4) $C(5,3); \quad P(-3,4)$

5) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}); \quad P(\frac{1}{4}, \frac{1}{6})$

Ejemplo 8

Hallar la ecuación general de la circunferencia sabiendo que el segmento de extremos $A(9,-2)$ y $B(3,7)$ es un diámetro de ella.

Para hallar la ecuación de la circunferencia necesitamos conocer centro y radio. El centro es el punto medio del diámetro:

$$x_C = \frac{9+3}{2} = 6 \quad y_C = \frac{-2+7}{2} = \frac{5}{2}$$

$$C(6, \frac{5}{2})$$

El radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de los extremos A y B del diámetro o también la mitad de la longitud del diámetro:

$$R = d_{(C,A)} = d_{(C,B)} = \frac{1}{2} d_{(A,B)}$$

Utilizando los dos primeros miembros de la cuádruple igualdad:

$$R = d_{(C,A)}$$

$$= \sqrt{(9-6)^2 + (-2-\frac{5}{2})^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

Construimos la ecuación canónica:

$$(x-6)^2 + (y-\frac{5}{2})^2 = (\frac{3\sqrt{13}}{2})^2$$

Desarrollando:

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 5y + \frac{25}{4} = \frac{117}{4}$$

Reduciendo términos:

$$x^2 + y^2 - 12x - 5y + 13 = 0$$



Ejercicio 117

En cada uno de los siguientes casos se dan los extremos A y B del diámetro de una circunferencia. Hallar la ecuación general de la circunferencia.

- | | | | |
|----------------|-------------|---------------------------|----------------------|
| 1) $A(4, 7);$ | $B(-2, -1)$ | 6) $A(-2, 5);$ | $B(5, -4)$ |
| 2) $A(-4, 6);$ | $B(2, 2)$ | 7) $A(4, -3);$ | $B(7, 4)$ |
| 3) $A(-3, 6);$ | $B(-1, -2)$ | 8) $A(-2, -4);$ | $B(4, 3)$ |
| 4) $A(-3, 3);$ | $B(1, 6)$ | 9) $A(\frac{1}{2}, 2);$ | $B(5, -\frac{3}{2})$ |
| 5) $A(5, 4);$ | $B(-2, 1)$ | 10) $A(-2, \frac{5}{3});$ | $B(\frac{7}{3}, -3)$ |

Nota: A partir de los siguientes ejercicios, se hará uso de los principales teoremas relativos a las circunferencias y de sus propiedades. Un elenco de algunos de estos teoremas y propiedades, que se dan por conocidos, puede encontrarse al final del libro en el Apéndice I.

Ejemplo 9

Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $K(-2, 5); L(5, 6)$ y $M(2, -3)$.

Resolveremos el problema de tres formas distintas:

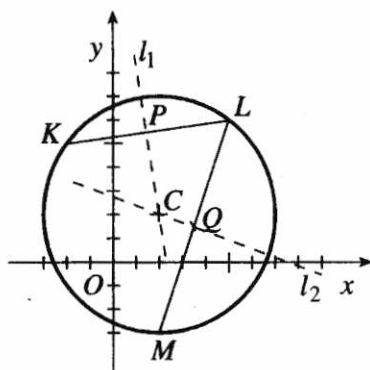
PRIMERA FORMA

Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos es equivalente a hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo cuyos vértices son esos tres puntos. Y, como el circuncentro es el punto de intersección de las mediatrices, seguiremos el siguiente plan:

a) Hallaremos las ecuaciones de las mediatrices de KL y LM .

b) Hallaremos su intersección C (Circuncentro).

c) Calcularemos el radio hallando la distancia desde C a cualquiera de los tres puntos dados.



a) Ecuación de l_1 (mediatriz de KL):

La mediatriz l_1 pasa por el punto medio P del segmento KL . Las coordenadas de P son:

$$P\left(\frac{-2+5}{2}, \frac{5+6}{2}\right)$$

$$P\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

Pendiente de KL :

$$m_{(K,L)} = \frac{6-5}{5-2} = \frac{1}{7}$$

Como l_1 es perpendicular a KL , su pendiente será:

$$m_1 = -7$$

Construimos la ecuación de l_1 utilizando (9^a):

$$y - \frac{11}{2} = -7\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Reduciendo a la forma general:

$$l_1 \equiv 7x + y - 16 = 0$$

En forma análoga hallaremos la ecuación de l_2 (mediatriz de LM) que pasa por Q (punto medio de LM).

Coordenadas de Q :

$$Q\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Pendiente de LM :

$$m_{(L,M)} = \frac{-3-6}{2-5} = 3$$

Pendiente de l_2 :

$$m_2 = -\frac{1}{3}$$

Ecuación de l_2 :

$$y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

En forma general:

$$l_2 \equiv x + 3y - 8 = 0$$

b) Para hallar la intersección de las mediatrices l_1 y l_2 formamos un sistema con sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 7x + y - 16 = 0 \\ x + 3y - 8 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$x = 2 \qquad y = 2$$

Las coordenadas del centro son entonces:

$$C(2,2)$$

c) Calculamos el radio:

$$R = d_{(C,K)} = \sqrt{(-2-2)^2 + (5-2)^2} = 5$$

Construimos la ecuación de la circunferencia:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Llevada a forma general:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

SEGUNDA FORMA

La ecuación de la circunferencia buscada es:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Dado que los puntos K , L y M pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación de la misma. Sustituyendo las variables por las coordenadas de K :

$$(-2)^2 + 5^2 + A(-2) + B(5) + C = 0$$

$$-2A + 5B + C = -29 \quad (I)$$

Sustituyendo por las coordenadas de L :

$$5^2 + 6^2 + A(5) + B(6) + C = 0$$

$$5A + 6B + C = -61 \quad (II)$$

Sustituyendo, por último por las de M :

$$2^2 + (-3)^2 + A(2) + B(-3) + C = 0$$

$$2A - 3B + C = -13 \quad (III)$$

Para hallar los valores de A , B y C , formamos un sistema con las ecuaciones I, II y III:

$$\begin{cases} -2A + 5B + C = -29 \\ 5A + 6B + C = -61 \\ 2A - 3B + C = -13 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$A = -4 \quad B = -4 \quad C = -17$$

La ecuación de la circunferencia pedida es, entonces:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

TERCERA FORMA

Esta forma es parecida a la segunda, pero partimos de la ecuación canónica.

Sean $C(h, k)$ las coordenadas del centro y R el radio. La ecuación canónica de la circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$

Nuevamente, como los puntos K , L y M pertenecen a la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación. Sustituyendo las variables por las coordenadas de K :

$$(-2 - h)^2 + (5 - k)^2 = R^2 \quad (I)$$

Sustituyendo por las coordenadas de L :

$$(5-h)^2 + (6-k)^2 = R^2 \quad (\text{II})$$

Sustituyendo, por último por las de M :

$$(2-h)^2 + (-3-k)^2 = R^2 \quad (\text{III})$$

Igualando las ecuaciones I y II:

$$(-2-h)^2 + (5-k)^2 = (5-h)^2 + (6-k)^2$$

Desarrollando, reduciendo términos y simplificando:

$$7h + k = 16 \quad (\text{IV})$$

Igualando las ecuaciones I y III:

$$(-2-h)^2 + (5-k)^2 = (2-h)^2 + (-3-k)^2,$$

$$h - 2k = -2 \quad (\text{V})$$

Formamos un sistema con las ecuaciones IV y V:

$$\begin{cases} 7h + k = 16 \\ h - 2k = -2 \end{cases}$$

Se obtienen los siguientes valores:

$$h = 2 \quad k = 2$$

Sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones I, II o III, obtenemos:

$$R = 5$$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 5^2$$

Y, en forma general:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0$$

Ejercicio 118

Hallar en cada ejercicio la ecuación de la circunferencia sabiendo que pasa por los puntos A , B y C .

- 1) $A(0, 7)$; $B(8, 3)$; $C(4, -5)$
- 2) $A(-7, 2)$; $B(5, 6)$; $C(-3, -2)$
- 3) $A(9, 3)$; $B(-1, -3)$; $C(1, 5)$
- 4) $A(-6, 5)$; $B(-3, 6)$; $C(1, 4)$
- 5) $A(0, 4)$; $B(-1, 1)$; $C(1, -3)$
- 6) $A(-\sqrt{13}, 1)$; $B(2, 4)$; $C(3, -1)$
- 7) $A(-5, -1)$; $B(-1, -7)$; $C(\sqrt{26}, -2)$
- 8) $A(3, -1)$; $B(1, \sqrt{5} - 2)$; $C(2, -4)$

Intersección de curvas de segundo grado

Ya es conocido que para hallar la intersección de dos curvas se resuelve el sistema que forman sus ecuaciones. En el caso de que una o ambas sean de segundo grado, es obvio que el sistema contendrá ecuaciones cuadráticas y es posible que haya uno, dos o más puntos de intersección.

Ejemplo 10

Hallar los puntos en los que la recta $5x - 9y + 24 = 0$ intersecta la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 2y - 36 = 0$.

Resolveremos por el método de sustitución el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x - 9y + 24 = 0 & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 2y - 36 = 0 & (II) \end{cases}$$

Despejando x en I:

$$x = \frac{9y - 24}{5} \quad (III)$$

Sustituyendo en II:

$$\left(\frac{9y - 24}{5}\right)^2 + y^2 - 8\left(\frac{9y - 24}{5}\right) + 2y - 36 = 0$$

Desarrollando:

$$\frac{81y^2 - 432y + 576}{25} + y^2 - \frac{72y - 192}{5} + 2y - 36 = 0$$

Multiplicando la ecuación por 25 para eliminar denominadores:

$$81y^2 - 432y + 576 + 25y^2 - 360y + 960 + 50y - 900 = 0$$

Reduciendo términos:

$$106y^2 - 742y + 636 = 0$$

Simplificando:

$$y^2 - 7y + 6 = 0$$

Ecuación cuyas raíces son:

$$y_1 = 6 \quad y_2 = 1$$

Sustituyendo en III:

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -3$$

Los puntos de intersección son:

$$(6, 6) \text{ y } (-3, 1)$$

Ejemplo 11

Hallar las intersecciones de las circunferencia $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 12 = 0$ y $x^2 + y^2 - 16x - 6y - 52 = 0$.

Restando la segunda ecuación de la primera, se eliminan los términos cuadráticos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 12x - 2y + 12 = 0 & \text{(I)} \\ -x^2 - y^2 + 16x + 6y + 52 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$28x + 4y + 64 = 0$$

Simplificando: $7x + y + 16 = 0$

Despejando y: $y = -7x - 16$ (III)

Sustituyendo en I: $x^2 + (-7x - 16)^2 + 12x - 2(-7x - 16) + 12 = 0$

Desarrollando: $x^2 + 49x^2 + 224x + 256 + 12x + 14x + 32 + 12 = 0$

Reduciendo términos y simplificando: $x^2 + 5x + 6 = 0$

La ecuación tiene las siguientes raíces: $x_1 = -3$ $x_2 = -2$

Sustituyendo en III: $y_1 = 5$, $y_2 = -2$

Los puntos de intersección son: $(-3, 5)$ y $(-2, -2)$

Ejemplo 12

Hallar las intersecciones de las curvas cuyas ecuaciones se dan:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y - 8 = 0 & \text{(I)} \\ y = x^2 + 2x - 8 & \text{(II)} \end{cases}$$

Sustituyendo en I el valor de y de la ecuación II: $x^2 + (x^2 + 2x - 8)^2 + 2x + 4(x^2 + 2x - 8) - 8 = 0$

Desarrollando y reduciendo términos semejantes se obtiene: $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$

La ecuación tiene las siguientes raíces: $x_1 = 1$ $x_2 = 2$ $x_3 = -3$ $x_4 = -4$

Sustituyendo en II se obtienen los valores correspondientes para y: $y_1 = -5$ $y_2 = 0$ $y_3 = -5$ $y_4 = 0$

Y los puntos de intersección son, en definitiva:

$$\begin{matrix} (1, -5) \\ (2, 0) \\ (-3, -5) \\ (-4, 0) \end{matrix}$$

Hallar en cada caso los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones se dan.

$$1) \begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 + 10x - 8y - 24 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 52 = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 6y - 37 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 10y + 31 = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 2y - 45 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \\ 4x^2 + 4y^2 + 32x - 4y + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x - 7y + 8 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x + 10y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x + 5y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 12y + 23 = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x - 5y + 19 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0 \\ y = x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 24y - 24 = 0 \\ y = -x^2 - 2x + 24 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x^2 + y^2 + 10x + 4y = 0 \\ x^2 + y^2 - 20x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x = y^2 + 4y - 5 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

Pendientes de la tangente y de la normal a una circunferencia en el punto $P(x_1, y_1)$

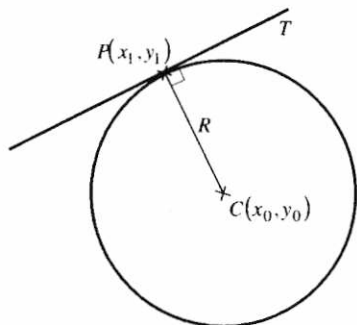
Sea la recta T una tangente a la circunferencia en el punto $P(x_1, y_1)$. Por geometría elemental sabemos que el radio es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.

La pendiente del radio es

$$m_R = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Se desprende de esto que, siendo la tangente perpendicular, su pendiente será

$$m_T = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} \quad (40^G)$$



Y, dado que la normal N es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia, o, dicho de otra forma, dado que la normal es la recta que contiene al radio que llega a ese punto, su pendiente será la misma del radio:

$$m_N = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad (41^G)$$

Longitud de la tangente trazada desde un punto $P(x_1, y_1)$ a una circunferencia

Llamemos t a la longitud de la tangente que, trazada desde el punto P_1 , toca la circunferencia en el punto P .

Dado que el radio es perpendicular a la tangente, el triángulo CPP_1 es rectángulo y, en consecuencia, sus lados satisfacen la igualdad pitagórica:

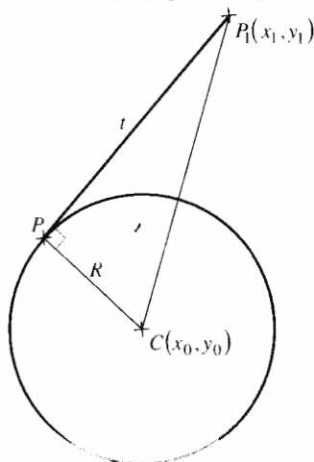
$$(d_{CP_1})^2 = t^2 + R^2$$

Sustituyendo el valor de d_{CP_1} :

$$\left(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} \right)^2 = t^2 + R^2$$

de donde

$$t = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 - R^2} \quad (41^G)$$



Ejemplo 12

El segmento que los ejes coordenados determinan sobre la recta $2x + y - 8 = 0$ es un diámetro de una circunferencia. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $P(5, -12)$ a dicha circunferencia.

Llevamos la ecuación de la recta a la forma canónica para determinar los puntos de intersección con los ejes, puntos que son los extremos de un diámetro de la circunferencia:

$$2x + y = 8$$

$$\frac{2x}{8} + \frac{y}{8} = 1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$$

La abscisa y la ordenada en el origen son:

$$a = 4 \quad b = 8$$

Y los extremos del segmento

$$A(4, 0) \text{ y } B(0, 8)$$

El centro de la circunferencia está en el punto medio de ese segmento:

$$C(2, 4)$$

El radio puede calcularse hallando la distancia del centro a cualquiera de los dos extremos:

$$R = d_{(C,A)} = \sqrt{(4-2)^2 + (0-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

Por último, utilizando (41⁶), podemos calcular la longitud de la tangente:

$$t = \sqrt{(5-2)^2 + (-12-4)^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{9 + 256 - 20}$$

$$t = 7\sqrt{5}$$

Ejemplo 13

Desde un punto P de abscisa -13 se traza una tangente de pendiente $\frac{4}{3}$ y de longitud 20 a una circunferencia de centro $C(7,5)$. Determinar la ordenada de P .

Sean las coordenadas de P :

$$P(-13, k)$$

La ecuación de la tangente T será:

$$y - k = \frac{4}{3}(x + 13)$$

En forma general:

$$T \equiv 4x - 3y + 3k + 52 = 0$$

El radio de la circunferencia es la distancia de su centro C a la tangente T :

$$R = d_{(C,T)} = \frac{4(7) - 3(5) + 3k + 52}{5}$$

$$R = \frac{3k + 65}{5}$$

Utilizando (41⁶):

$$20 = \sqrt{(-13-7)^2 + (k-5)^2 - \left(\frac{3k+65}{5}\right)^2}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado y desarrollando:

$$400 = 400 + k^2 - 10k + 25 - \frac{9k^2 + 390k + 4225}{25}$$

Ecuación que, llevada a su mínima expresión, es

$$k^2 - 40k - 225 = 0$$

y que tiene por raíces:

$$k_1 = 45 \quad k_2 = -5$$

Hay, por tanto, dos puntos de abscisa -13 desde los que se pueden trazar tangentes de acuerdo a las condiciones del problema:

$$P_1(-13, 45) \quad P_2(-13, -5)$$

Ejercicio 120

- 1) Se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 8 = 0$ desde el punto $P(7,4)$. Determinar la longitud de dichas tangentes.
- 2) Determinar la longitud de las tangentes trazadas a la circunferencia $x^2 + y^2 + 12x - 4 = 0$ desde el punto $P(5,3)$.
- 3) Uno de los diámetros de una circunferencia es el segmento de extremos $A(2,6)$ y $B(4,-4)$. Demostrar que la tangente trazada desde el punto $P(-8,4)$

a la circunferencia tiene la misma longitud del diámetro.

- 4) Desde el punto $P(11, -1)$ se traza una tangente a la circunferencia que tiene su centro en $C(-11, 2)$ y que pasa por el punto $Q(-16, 4)$. Determinar la longitud de dicha tangente.
- 5) Desde un punto P de abscisa 3 se traza una tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 26x + 2y + 133 = 0$. Determinar la ordenada de P sabiendo que la longitud de dicha tangente es $\frac{5\sqrt{37}}{2}$.
- 6) Desde un punto $P(-11, -7)$ se traza una tangente de pendiente $\frac{7}{3}$ a una circunferencia que tiene su centro en un punto C de ordenada 4 y abscisa positiva. Hallar la ecuación general de la circunferencia sabiendo que la longitud de dicha tangente es $2\sqrt{58}$.

Ejemplo 14

Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a la recta $l \equiv x - 3y + 12 = 0$ y concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 15 = 0$.

Para construir la ecuación de una circunferencia necesitamos conocer su centro y su radio. La de nuestro problema tiene el mismo centro que la circunferencia cuya ecuación conocemos. Basta, pues, llevar ésta a la forma canónica y conoceremos el centro de ambas circunferencias.

$$\begin{aligned}(x^2 - 10x) + (y^2 + 2y) &= -15 \\(x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 2y + 1) &= -15 + 25 + 1 \\(x - 5)^2 + (y + 1)^2 &= 11\end{aligned}$$

El centro es:

$$C(5, -1)$$

Y, dado que el radio es perpendicular al punto de tangencia, su longitud será igual a la distancia del centro C a la recta l :

$$\begin{aligned}R &= d_{(C, l)} \\R &= \frac{5 - 3(-1) + 12}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

Conociendo centro y radio construimos fácilmente la ecuación:

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = (2\sqrt{10})^2$$

Llevada a la forma general:

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y - 14 = 0$$

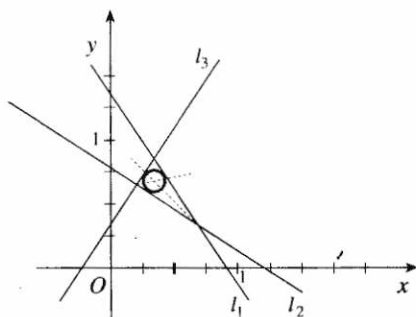
Ejemplo 15

Hallar la ecuación general de la circunferencia inscrita en el triángulo que forman las rectas $l_1 \equiv 3x + 2y - 3 = 0$, $l_2 \equiv 2x + 3y - 2 = 0$ y $l_3 \equiv 3x - 2y + 1 = 0$.

El incentro del triángulo (centro de la circunferencia inscrita) es el punto de intersección de las bisectrices.

(Remitimos a las pág. 414 y siguientes para las explicaciones sobre el cálculo de bisectrices).

a) Bisectriz del ángulo que forman l_1 y l_2



Utilizando (24⁶):

$$\frac{3x + 2y - 3}{\sqrt{13}} = -\frac{2x + 3y - 2}{-\sqrt{13}}$$

Llevando a la mínima expresión:

$$x + y - 1 = 0 \quad (I)$$

b) Bisectriz del ángulo que forman l_2 y l_3

Utilizando (24⁶):

$$\frac{2x + 3y - 2}{\sqrt{13}} = -\frac{3x - 2y + 1}{-\sqrt{13}}$$

Llevando a la mínima expresión:

$$x - 5y + 3 = 0 \quad (II)$$

Para hallar el punto de intersección de las bisectrices, resolvemos el sistema que forman sus ecuaciones (I y II):

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 5y + 3 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3}$$

y las coordenadas del centro:

$$C\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

La longitud del radio es la distancia del centro a cualquiera de las tres rectas:

$$\begin{aligned} R &= d_{(C, l_1)} \\ &= \frac{\left|3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) - 3\right|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{3\sqrt{13}} \end{aligned}$$

Ecuación de la circunferencia:

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{13}}\right)^2$$

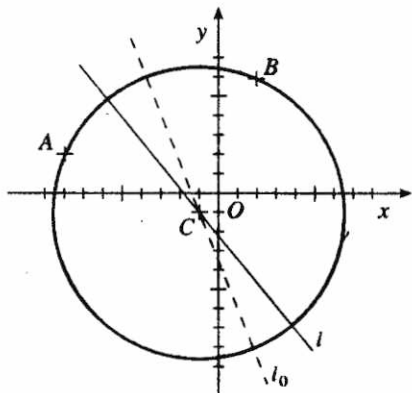
En forma general:

$$117x^2 + 117y^2 - 78x - 156y + 61 = 0$$

Ejemplo 16

Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-8,2)$ y $B(2,6)$ y tiene su centro sobre la recta $l \equiv 5x + 4y + 9 = 0$.

Hallaremos la ecuación de l_0 , mediatriz del segmento AB , cuya intersección con la recta l nos dará las coordenadas del centro C .



l_0 es la perpendicular al segmento AB en su punto medio, o también, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y B . Utilizando este último concepto:

$$d_{(A,C)} = d_{(B,C)}$$

Calculando las distancias:

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2$$

Desarrollando, reduciendo términos semejantes y simplificando obtenemos la ecuación de l_0 :

$$l_0 \equiv 5x + 2y + 7 = 0$$

Formamos un sistema con las ecuaciones de l y l_0 para hallar su intersección:

$$\begin{cases} 5x + 4y + 9 = 0 \\ 5x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$x = -1 \quad y = -1$$

y las coordenadas de C :

$$C(-1, -1)$$

La longitud del radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de los puntos conocidos de la circunferencia:

$$R = d_{(C,A)} = \sqrt{(-8+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{58}$$

La ecuación canónica de la circunferencia es:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{58})^2$$

En forma general:

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 56 = 0$$

Ejemplo 17

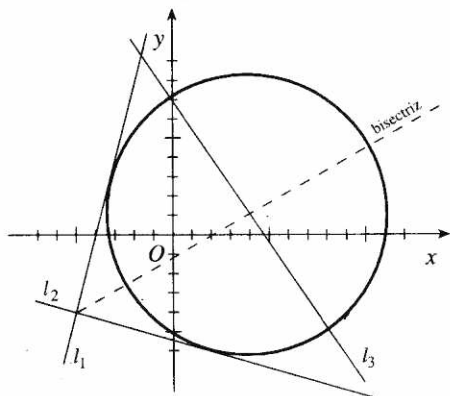
Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a las rectas $l_1 \equiv 7x - 2y + 27 = 0$ y $l_2 \equiv 2x + 7y + 38 = 0$ y que tiene su centro sobre la recta

$$l_3 \equiv 3x + 2y - 14 = 0.$$

Si la circunferencia es tangente a l_1 y l_2 , su centro se encuentra en la bisectriz del ángulo que forman dichas rectas. (En la figura se ilustra una de las posibles soluciones).

La intersección de la bisectriz con l_3 nos da el centro de la circunferencia.

Dado que son dos los ángulos que se forman y, por tanto, dos sus bisectrices, el problema tiene doble solución.



Ecuación de las bisectrices:

$$\frac{7x - 2y + 27}{\sqrt{49 + 4}} = \pm \frac{2x + 7y + 38}{\sqrt{4 + 49}}$$

Simplificando:

$$7x - 2y + 27 = \pm(2x + 7y + 38) \quad (I)$$

a) Trabajaremos primero con la bisectriz cuya ecuación se obtiene tomando positivo el segundo miembro de la ecuación I:

$$7x - 2y + 27 = 2x + 7y + 38$$

Reduciendo términos:

$$5x - 9y - 11 = 0$$

Formamos un sistema con la ecuación de esta bisectriz y la de l_3 :

$$\begin{cases} 5x - 9y - 11 = 0 \\ 3x + 2y - 14 = 0 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$x = 4 \quad y = 1$$

El centro de la circunferencia es:

$$C(4,1)$$

El radio es igual a la distancia del centro a cualquiera de las rectas tangentes:

$$R = d_{(C, l_1)} = \frac{|7(4) - 2(1) + 27|}{\sqrt{53}} = \sqrt{53}$$

La ecuación canónica de la circunferencia es:

$$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{53})^2$$

En forma general:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y - 36 = 0$$

b) Tomando negativo el segundo término de la ecuación I obtenemos la ecuación de la segunda bisectriz:

$$7x - 2y + 27 = -(2x + 7y + 38)$$

Reduciendo términos: $9x + 5y + 65 = 0$

Formamos un sistema con la ecuación de l_3 :

$$\begin{cases} 9x + 5y + 65 = 0 \\ 3x + 2y - 14 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es: $x = -\frac{200}{3}$ $y = 107$

Las coordenadas de C son: $C\left(-\frac{200}{3}, 107\right)$

Calculando la distancia del centro a cualquiera de las rectas tangentes, obtenemos el radio:

$$R = \frac{37\sqrt{53}}{3}$$

La ecuación canónica de la circunferencia es:

$$\left(x + \frac{200}{3}\right)^2 + (y - 107)^2 = \left(\frac{37\sqrt{53}}{3}\right)^2$$

En forma general:

$$9x^2 + 9y^2 + 1200x - 1926y + 70484 = 0$$

Ejercicio 121

Hallar en cada ejercicio la ecuación de la circunferencia con los datos que se dan de ella.

- 1) El diámetro es el segmento que determinan los ejes coordenados sobre la recta $2x + y - 6 = 0$.
- 2) El diámetro es el segmento que determinan los ejes coordenados sobre la recta $4x - 3y + 24 = 0$.
- 3) Los extremos de un diámetro son los puntos en los que la recta $2x + y - 12 = 0$ intersecta las rectas $x - 3y + 15 = 0$ y $4x - y - 18 = 0$.
- 4) Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$ y su radio es 6.
- 5) Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 39 = 0$ y su radio mide 3 unidades menos.
- 6) Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ y pasa por el punto $A(-1, -4)$.
- 7) Es concéntrica con la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 32 = 0$ y es tangente a la recta $x + 4y - 25 = 0$.
- 8) Es tangente al eje de abscisas y tiene su centro en $C(3, 4)$.
- 9) Es tangente al eje de ordenadas y tiene su centro en $C(-3, 6)$.
- 10) Está en el primer cuadrante, es tangente a ambos ejes y su radio mide 3.
- 11) Su centro está sobre la recta $x + 6y - 21 = 0$ y es tangente al eje de abscisas en el punto $P(-3, 0)$.

- 12) Su centro está sobre la recta $2x - 3y + 4 = 0$ y es tangente al eje de ordenadas en el punto $M(0, -2)$.
- 13) Es tangente a la recta $x - 4y + 7 = 0$ y tiene su centro en $C(3, -6)$.
- 14) Es tangente a la recta $2x + y - 7 = 0$ y tiene su centro en $C(-6, -1)$.
- 15) Es tangente a la bisectriz del primer cuadrante y tiene su centro en $C(-1, 3)$.
- 16) Es tangente a las rectas paralelas $x - 4y + 11 = 0$ y $x - 4y - 23 = 0$ y tiene su centro en $C(-6, -1)$.
- 17) Es tangente a las rectas paralelas $x - 3y + 5 = 0$ y $x - 3y - 15 = 0$. El punto de tangencia con una de ellas es $A(1, 2)$.
- 18) Es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 12x + 20 = 0$ y tiene su centro en el origen.
- 19) Es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 12x - 18y + 65 = 0$ y tiene su centro en el origen.
- 20) Es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 10 = 0$ y tiene su centro en $C(4, 2)$.
- 21) Tiene su centro en la recta $x + y - 4 = 0$ y es tangente a los ejes coordenados.
- 22) Tiene su centro en la recta $x - 7y - 24 = 0$ y es tangente a los ejes coordenados.
- 23) Pasa por el punto $M(7, 2)$ y es tangente a la recta $x - 3y + 9 = 0$ en el punto $P(3, 4)$.
- 24) Pasa por el punto $M(2, 5)$ y es tangente a la recta $3x + 2y - 3 = 0$ en el punto $P(1, 0)$.
- 25) Está inscrita en el triángulo cuyos lados tienen las siguientes ecuaciones: $x - 5y + 12 = 0$; $5x + y - 44 = 0$; $x + 5y + 32 = 0$.
- 26) Está inscrita en el triángulo cuyos lados tienen las siguientes ecuaciones: $x - 3y + 9 = 0$; $3x + y - 23 = 0$; $x + 3y + 3 = 0$.
- 27) Circunscribe el triángulo cuyos lados tienen las siguientes ecuaciones: $3x + 2y - 22 = 0$; $x - y - 2 = 0$; $x = 2$.
- 28) Circunscribe el triángulo cuyos lados tienen las siguientes ecuaciones: $x - 5y + 2 = 0$; $x + y + 2 = 0$; $y = -1$.
- 29) Pasa por $A(4, 5)$ y $B(6, -1)$ y tiene su centro sobre la recta $2x - 5y + 1 = 0$.
- 30) Pasa por $A(1, 6)$ y $B(3, -2)$ y tiene su centro sobre la recta $2x - 3y + 7 = 0$.
- 31) Es tangente a las rectas $7x - 4y + 41 = 0$ y $4x - 7y - 74 = 0$ y tiene su centro sobre la recta $4x + y - 17 = 0$.
- 32) Es tangente a las rectas $x - 4y + 7 = 0$ y $3x - y - 7 = 0$ y tiene su centro sobre la recta $x - 3y - 1 = 0$.
- 33) Pasa por el punto $A(1, -1)$ y por la intersección de las circunferencias

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0 \text{ y } x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0.$$

- 34) Pasa por la intersección de las circunferencias $(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25$ y $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$ y por el origen.
- 35) Es tangente a la recta $x+3y-16=0$; pasa por el punto $A(7,-1)$ y tiene su centro sobre la recta $2x-y=0$.
- 36) Es tangente a la recta $x-5y+12=0$; pasa por el punto $A(4,-2)$ y tiene su centro sobre la recta $2x+5y+17=0$.
- 37) Pasa por $P(1,2)$ y los extremos de una de sus cuerdas son $A(-3,2)$ y $B(3,4)$.
- 38) Pasa por los puntos de intersección de la recta $x-3y+9=0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 17 = 0$ y divide en dos partes iguales el segmento de extremos $A(-7,1)$ y $B(-3,-5)$.
- 39) Pasa por $A(-8,4)$ y $B(5,3)$ y es tangente a la recta $2x-9y+62=0$.
- 40) Pasa por $A(-5,-1)$ y $B(2,6)$ y es tangente a la recta $7x-4y+36=0$.
- 41) Su centro es $C(-4,-4)$ y sus intersecciones con la recta $4x+3y-22=0$ determinan una cuerda de 10 unidades de longitud.
- 42) Su centro es $C(5,-1)$ y sus intersecciones con la recta $4x-y+13=0$ determinan una cuerda de $2\sqrt{17}$ unidades de longitud.
- 43) Es tangente a ambos ejes coordenados y pasa por $A(8,9)$.
- 44) Es tangente a ambos ejes coordenados y pasa por $A(2,-1)$.
- 45) Es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$ en el punto $A(2,4)$ y su radio mide $2\sqrt{10}$.
- 46) Es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$ en el punto $A(-1,3)$ y su diámetro mide $6\sqrt{5}$.
- 47) Está inscrita en el triángulo cuyos vértices son $A(2,8)$; $B(5,2)$ y $C(-3,-2)$.
- 48) Circunscribe el triángulo del ejercicio anterior.
- 49) Su radio es 2 y su centro es el punto medio del segmento de extremos $A(\lg_6 2, \lg_6 9)$ y $B(\lg_6 3, \lg_6 4)$.
- 50) Su radio es 3 y su centro es el punto medio del segmento de extremos $A(\lg_3 18, \operatorname{colg}_2 3)$ y $B(\operatorname{colg}_3 2, \lg_2 12)$.
- 51) Su radio es 5 y es tangente a la recta $3x-4y-3=0$ en el punto $(5,3)$.
- 52) Es tangente a las rectas $x-5y-19=0$ y $5x-y+13=0$ y, a una de ellas, en el punto $(4,-3)$.
- 53) Es tangente a las rectas paralelas $x-3y+4=0$ y $x-3y-16=0$ y, a una de ellas, en el punto $(4,-4)$.
- 54) Tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante y es tangente a las rectas $l_1 \equiv 4x+3y-12=0$ y $l_2 \equiv y-4=0$.

55) Está inscrita en el triángulo de vértices $A(2,8)$; $B(\frac{15}{2}, \frac{31}{8})$ y $C(-3,-4)$.

56) Pasa por $A(-4,2)$ y $B(7,9)$ y su radio mide $\sqrt{85}$.

Ejercicio 122

Hallar área y perímetro de las siguientes circunferencias:

- 1) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 3 = 0$
- 2) $4x^2 + 4y^2 - 8x - 4y - 23 = 0$
- 3) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{2}y - 20 = 0$
- 4) $x^2 + y^2 + 2ax - 4by + a^2 + 4b^2 - c = 0$

Demostrar que los siguientes son pares de circunferencias tangentes:

- 5) $x^2 + y^2 + 8x + 8y + 19 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x - 4y - 23 = 0$
- 6) $x^2 + y^2 - 4x - 18y + 68 = 0$; $x^2 + y^2 + 4x + 14y - 100 = 0$

Demostrar en los siguientes ejercicios que las circunferencias cuyas ecuaciones se dan no se intersectan:

- 7) $x^2 + y^2 + 16x - 8y + 55 = 0$; $x^2 + y^2 - 16x + 10y - 80 = 0$
- 8) $x^2 + y^2 - 2x - 16y + 60 = 0$; $x^2 + y^2 - 12x + 2 = 0$
- 9) Calcular el área de un sector circular de 36° de la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 4y + 15 = 0$.
- 10) Calcular el área de un segmento circular de 18° de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 18y + 78 = 0$.
- 11) Hallar el área del triángulo que tiene por vértices el origen y las intersecciones de las circunferencias $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 208 = 0$ y $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 104 = 0$.
- 12) Hallar el área del triángulo que tiene por vértices el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 21 = 0$ y los puntos en los que la circunferencia $x^2 + y^2 - 14x - y - 6 = 0$ se intersecta con la anterior.

En los siguientes ejercicios se dan las ecuaciones de los tres lados de un triángulo. Determinar en cada caso la ecuación de la circunferencia circunscrita a ellos:

- 13) $l_1 \equiv x - y + 6 = 0$; $l_2 \equiv x + y - 4 = 0$; $l_3 \equiv 2x + 5y - 2 = 0$
- 14) $l_1 \equiv 2x - 5y + 30 = 0$; $l_2 \equiv 7x - 3y - 11 = 0$; $l_3 \equiv 5x + 2y + 17 = 0$

- 15) Determinar la ecuación general de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados $l_1 \equiv 3x - 4y + 10 = 0$; $l_2 \equiv 12x + 5y - 107 = 0$ y $l_3 \equiv y + 1 = 0$.
- 16) Determinar el área común de los círculos limitados por las circunferencias $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 27 = 0$ y $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$.
- 17) Hallar las ecuaciones de las circunferencias que son tangentes a las rectas $l_1 \equiv 3x + 4y - 35 = 0$; $l_2 \equiv 3x - 4y - 35 = 0$ y $l_3 \equiv x - 1 = 0$
- 18) Por el centro de la circunferencia $196x^2 + 196y^2 - 280x + 364y - 711 = 0$ y por el de la circunferencia $147x^2 + 147y^2 - 126x - 28y - 54 = 0$ pasa una recta. Hallar su ecuación general.
- 19) Hallar la distancia mínima que separa el punto $A(-2, 7)$ de la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 4y + 4 = 0$.
- 20) Hallar la ecuación general del diámetro de la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 40x + 4y + 85 = 0$ paralelo a la recta $3x - 2y + 1 = 0$.
- 21) Hallar la ecuación general del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 14x - 16y + 1 = 0$ perpendicular a la recta $3x - 5y + 7 = 0$.
- 22) Determinar cuál debe ser el valor de m para que la recta $y = mx$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 64 = 0$.
- 23) Determinar cuál debe ser el valor de m para que la recta $y = mx$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$.
- 24) Determinar cuál debe ser el valor de A para que la recta $Ax + 2y + 3 = 0$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 13 = 0$.
- 25) Determinar cuál debe ser el valor de b para que la recta $y = 3x + b$ sea tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$.
- 26) Determinar cuál debe ser el valor de C para que la recta $Ax + By + C = 0$ sea tangente a la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.
- 27) Determinar las ecuaciones generales de las dos cuerdas de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 24 = 0$ que tienen pendiente $\frac{3}{4}$ y miden $\sqrt{58}$.
- 28) Hallar la ecuación general de la cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 43 = 0$ sabiendo que el punto medio de la cuerda es $M(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$.
- 29) Hallar la ecuación general de la cuerda de pendiente -7 de la circunferencia $x^2 + y^2 - 25 = 0$ sabiendo que los extremos de la cuerda y el centro de la circunferencia son vértices de un triángulo rectángulo.
- 30) Determinar las coordenadas del centro de la circunferencia sabiendo que éste dista $\sqrt{29}$ unidades del origen y que las rectas $l_1 \equiv 4x - y - 1 = 0$ y $l_2 \equiv x - 4y - 14 = 0$ determinan sobre la circunferencia cuerdas equidistantes del centro.

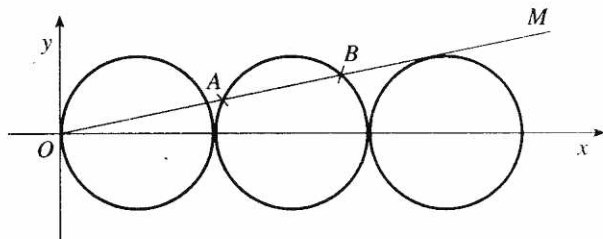
- 31) Determinar la longitud del segmento que une los centros de las circunferencias $x^2 + y^2 + 8x + 8y - 8 = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 8 = 0$ y la longitud de la cuerda común a ambas circunferencias.
- 32) Hallar el área del triángulo que la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x = 0$ en el punto $(2, 4)$ determina sobre los ejes coordenados.
- 33) Determinar en la recta $x - 2y + 19 = 0$ las coordenadas del punto más cercano a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 25 = 0$.
- 34) Determinar en la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 9 = 0$ las coordenadas del punto más cercano a la recta $2x - y + 7 = 0$.
- 35) Determinar el área de la circunferencia inscrita en el triángulo de lados $l_1 \equiv 3x - y + 10 = 0$; $l_2 \equiv x + 3y - 10 = 0$ y $l_3 \equiv x - 3y - 10 = 0$.
- 36) Desde el punto $M(-5, 2)$ se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$. Se trazan también tangentes desde el punto $N(6, 6)$. De esta forma, la circunferencia queda inscrita en un cuadrilátero. Determinar el área del cuadrilátero.
- 37) Hallar la ecuación general de la circunferencia de radio 7 sabiendo que su centro dista $5\sqrt{2}$ unidades del origen y que las rectas $l_1 \equiv 5x - y = 0$ y $l_2 \equiv x - 5y = 0$ determinan sobre ella cuerdas de igual longitud.
- 38) Hallar la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{17}$ sabiendo que su centro dista $\sqrt{45}$ unidades del origen y que las rectas paralelas $l_1 \equiv 3x - 5y + 38 = 0$ y $l_2 \equiv 3x - 5y + 4 = 0$ determinan sobre ella cuerdas de igual longitud.
- 39) Demostrar que los puntos $A(-1, -1)$; $B(2, 8)$; $C(5, 7)$ y $D(7, 3)$ son concíclicos.
- 40) Demostrar que los puntos $A(-5, 3)$; $B(0, 8)$; $C(10, -1)$ y $D(4, -6)$ son concíclicos.
- 41) Demostrar que los puntos $A(-11, -1)$; $B(-3, 11)$; $C(2, 12)$; $D(14, 4)$ y $E(7, -13)$ son concíclicos.
- 42) Determinar el valor de k para que los puntos $A(-5, 7)$; $B(2, 6)$; $C(k, 3)$ y $D(1, -1)$ sean concíclicos.
- 43) Calcular el ángulo agudo formado por la recta $l \equiv 3x + y - 9 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$.
- 44) Calcular el ángulo que forman las circunferencias $x^2 + y^2 + 8x - 10y - 89 = 0$ y $x^2 + y^2 - 16x + 6y + 47 = 0$.
- 45) Desde el punto $P(-9, 6)$ se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 6y = 0$. Hallar las ecuaciones de las tangentes y el ángulo agudo que forman entre sí.
- 46) Determinar con qué ángulo se ve desde el punto $P(-4, 4)$ la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 10 = 0$.

- 47) Desde el punto $P(-6,7)$ se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 18x - 4y + 60 = 0$. Calcular:
- La longitud de la cuerda que subtienden los puntos de tangencia.
 - La distancia entre el punto P y esa cuerda.
 - La distancia entre el centro de la circunferencia y la cuerda.
 - La longitud de la flecha que dicha cuerda determina.
 - La longitud de las tangentes.
- 48) Hallar las ecuaciones generales de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 8x + 2y - 12 = 0$ que son paralelas a la recta $6x - 15y + 7 = 0$.
- 49) Hallar las ecuaciones generales de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 6y - 49 = 0$ que son perpendiculares a la recta $6x - 14y + 5 = 0$.
- 50) Hallar la ecuación general de la circunferencia de radio $\sqrt{5}$ sabiendo que la distancia dirigida de su centro a la recta $l_1 \equiv 4x + 3y - 36 = 0$ es -5 y que las rectas $l_2 \equiv x - y = 0$ y $l_3 \equiv y = 0$ se cortan en ella.
- 51) La recta $l \equiv 4x + 3y - 4 = 0$ forma con los ejes coordenados un triángulo. Hallar la ecuación de la circunferencia ex-inscrita correspondiente al lado formado por la recta l .
- 52) La recta $l \equiv x + y - 4 = 0$ forma con los ejes coordenados un triángulo. Hallar la ecuación de la circunferencia ex-inscrita correspondiente al lado formado por la recta l .
- 53) Demostrar que la distancia d de un punto $P(x_1, y_1)$ a la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ es

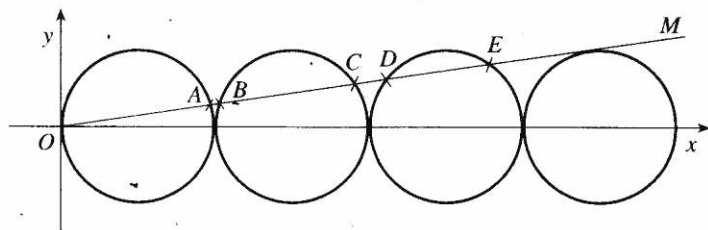
$$d = \pm \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \left(\frac{R}{\Delta x + \Delta y} - 1 \right)$$

siendo $\Delta x = (x_1 - x_0)$ y $\Delta y = (y_1 - y_0)$.

- 54) Se construyen tres circunferencias de radio r y con sus centros sobre el eje de abscisas, tangente la primera al eje de ordenadas y cada una de las restantes a la que le precede. Se traza la recta OM tangente a la tercera circunferencia. Calcular la longitud de la cuerda AB que la recta OM determina sobre la segunda circunferencia.



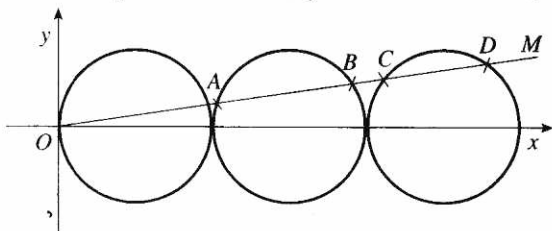
- 55) Se construyen cuatro circunferencias de radio r y con sus centros sobre el eje de abscisas, tangente la primera al eje de ordenadas y cada una de las



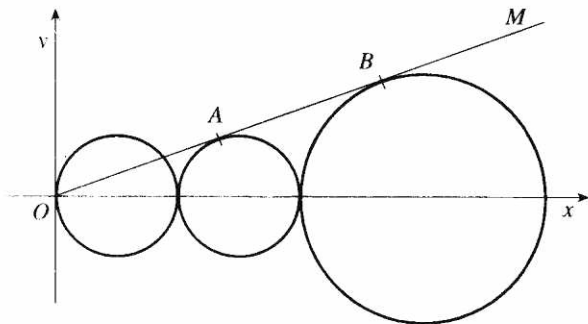
siguientes a la que le precede. Se traza así mismo la recta OM tangente a la cuarta circunferencia. La recta OM intersecta

las tres primeras circunferencias determinando las cuerdas OA , BC y DE . Calcular las longitudes de esas cuerdas.

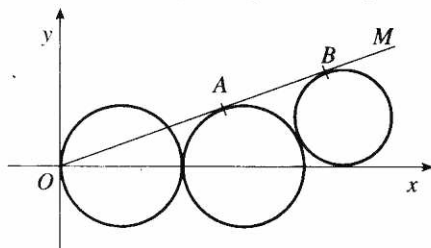
- 56) Se construyen tres circunferencias de radio r con sus centros sobre el eje de abscisas, tangente la primera al eje de ordenadas y cada una de las siguientes a la que le precede. Se traza así mismo la recta OM que intersecta la tercera circunferencia determinando en ella la cuerda CD de longitud r . Calcular la longitud de la cuerda AB que la recta OM determina sobre la segunda circunferencia.



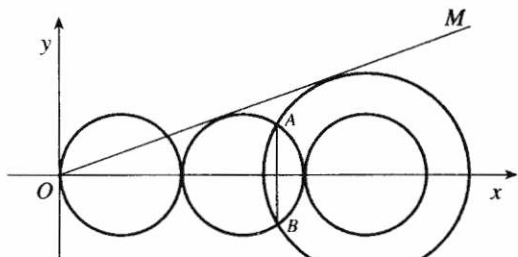
- 57) Se construyen dos circunferencias de radio r con sus centros sobre el eje de abscisas, tangentes la primera al eje de ordenadas y la segunda a la primera. Se traza la recta OM tangente a la segunda circunferencia en A . Se construye una tercera circunferencia con centro también en el eje de abscisas y tangente a la segunda circunferencia y a la recta OM en el punto B . Calcular la distancia que separa los puntos de tangencia A y B .



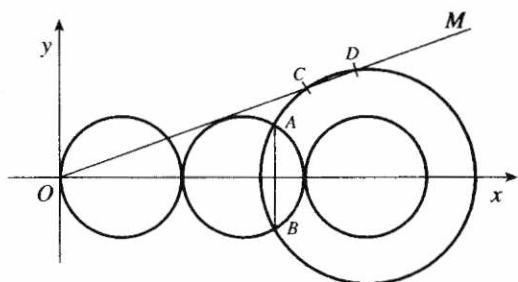
- 58) Se construyen dos circunferencias de radio r con sus centros sobre el eje de abscisas, tangentes la primera al eje de ordenadas y la segunda a la primera. Se traza la recta OM tangente a la segunda circunferencia en A . Se construye una tercera circunferencia tangente a la recta OM en B y tangente a la segunda circunferencia y al eje de abscisas. Calcular la distancia que separa los puntos de tangencia A y B .



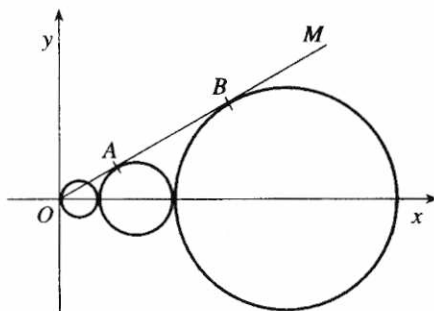
- 59) Se construyen tres circunferencias de radio r con sus centros sobre el eje de abscisas, tangente la primera al eje de ordenadas y cada una de las restantes a la que le precede. Se traza la recta OM tangente a la segunda circunferencia. Se construye, por último, una cuarta circunferencia concéntrica con la tercera y tangente también a la recta OM . Calcular la longitud de la cuerda AB común a la segunda y cuarta circunferencias.



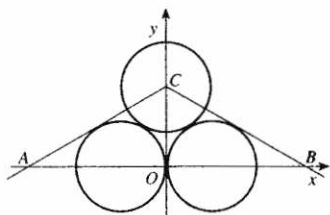
- 60) Se construyen tres circunferencias de radio r con sus centros sobre el eje de abscisas, tangente la primera al eje de ordenadas y cada una de las restantes a la que le precede. Se traza la recta OM tangente a la segunda circunferencia. Se construye, por último, una cuarta circunferencia concéntrica con la tercera sobre la que la recta OM determina una cuerda CD de longitud r . Calcular la longitud de la cuerda AB común a la segunda y cuarta circunferencias.



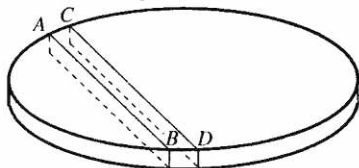
- 61) Se construyen dos circunferencias con sus centros sobre el eje de abscisas: la primera de radio r y tangente al eje de ordenadas; la segunda de radio $2r$ y tangente a la primera. Se traza la recta OM tangente a la segunda circunferencia en A . Se construye una tercera circunferencia con centro en el eje de abscisas, tangente a la segunda circunferencia y a la recta OM en el punto B . Calcular la distancia que separa a los puntos de tangencia A y B .



- 62) Se construyen dos circunferencias de radio r con sus centros sobre el eje de abscisas tangentes ambas al eje de ordenadas, una por cada lado. Se construye una tercera circunferencia de radio r y centro sobre el eje de ordenadas tangente a las dos circunferencias anteriores. Desde el centro C de la tercera circunferencia se trazan tangentes a las dos primeras. Las tangentes trazadas intersectan el eje de abscisas en los puntos A y B . Calcular el área del triángulo ABC .



- 63) En un antigua moneda de plata se hace un corte AB . El perfil del corte es un rectángulo de $0,6 \text{ cm}^2$ de área. Paralelamente al corte AB y a una distancia de $0,5 \text{ cm}$ de él, se hace otro corte CD , cuyo perfil es un rectángulo de $0,8 \text{ cm}^2$ de área. Sabiendo que el corte CD tiene un cm más de longitud que el corte AB , determinar el volumen de la moneda.



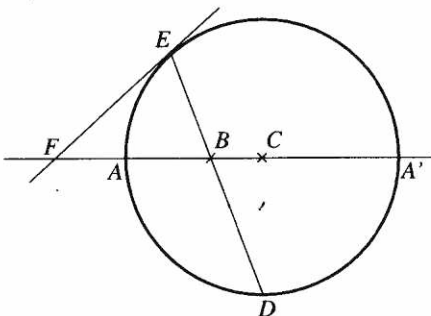
- 64) Se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 16x + 32 = 0$ en sus puntos de abscisa 4. Hallar la ecuación general de dichas tangentes.
- 65) Se trazan tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 14x - 4y + 45 = 0$ en sus puntos de abscisa 5. Hallar la ecuación general de dichas tangentes.
- 66) Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a las rectas $l_1 \equiv 2x + y - 11 = 0$ y $l_2 \equiv x - 2y + 2 = 0$ y que pasa por el punto $P(10, 7)$. Determinar también las coordenadas de los puntos de tangencia.
- 67) Hallar la ecuación general de la circunferencia tangente a los ejes coordenados y a la recta $x + y - 4 = 0$.

Ejercicio 123

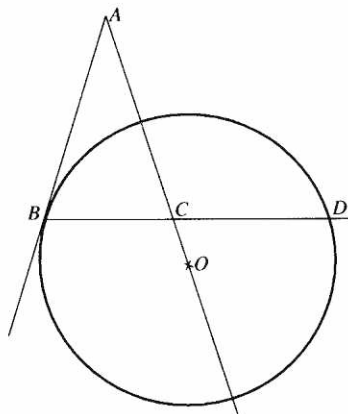
Demostrar analíticamente los siguientes teoremas:

- 1) Todo diámetro perpendicular a una cuerda la divide en dos partes iguales.
- 2) En dos circunferencias secantes la recta que pasa por sus centros es la mediatriz de la cuerda común.
- 3) En un triángulo cualquiera, el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual al producto de la longitud de la altura trazada sobre el tercer lado y la longitud del diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo.
- 4) Se trazan a una circunferencia dos tangentes paralelas entre sí que intersectan a una tercera tangente en los puntos A y B . Entonces, los segmentos que unen los puntos A y B con el centro de la circunferencia son perpendiculares.
- 5) Si desde un punto P de la circunferencia circunscrita a un triángulo se trazan perpendiculares a cada uno de los tres lados del triángulo, los pies de estas perpendiculares son colineales.
- 6) En un triángulo cualquiera, los pies de las alturas, los pies de las medianas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices son concíclicos (*Circunferencia de los nueve puntos*).
- 7) El centro de la Circunferencia de los nueve puntos está sobre la recta de Euler.
- 8) Si una recta secante S corta dos circunferencias concéntricas, los segmentos de la secante comprendidos entre las dos circunferencias son de igual longitud.

- 9) Dos cuerdas de una circunferencia que se bisequen mutuamente son dos diámetros.
- 10) En una circunferencia, el arco que subtiende una cuerda paralela a una tangente queda dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.
- 11) En una circunferencia de centro C , AA' es un diámetro, B un punto cualquiera del radio AC , y D el punto medio de la semicircunferencia AA' . La recta DB corta la circunferencia en E y la tangente a la circunferencia en E corta la recta AA' en F . Entonces el triángulo EBF es isósceles (Ver figura).

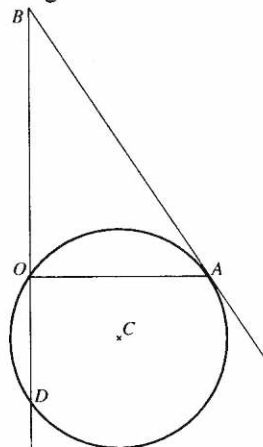


- 12) Todas las cuerdas de igual longitud de una circunferencia son tangentes a una circunferencia concéntrica con la circunferencia dada.
- 13) Sea el triángulo isósceles ABC de vértice A y, sobre la prolongación de AC , el centro O de una circunferencia de radio OB y tangente a AB . Sea D el punto de intersección de la prolongación de BC y la circunferencia. Entonces las rectas OD y OA son perpendiculares (Ver figura).



- 14) Dos circunferencias que tienen como diámetro dos lados de un mismo triángulo, tienen su segundo punto de intersección sobre el tercer lado del triángulo.
- 15) Sea C el punto medio de una semicircunferencia de diámetro AB . Se prolonga el segmento AC hasta un punto D de tal forma que $AC = CD$. Entonces la recta DB es tangente a la circunferencia.

- 16) Dado el triángulo OAB rectángulo en O y la circunferencia de centro C , que pasa por O y es tangente en A al lado AB , se prolonga BO hasta encontrar la circunferencia en D . Entonces A , C y D son colineales (Ver figura).

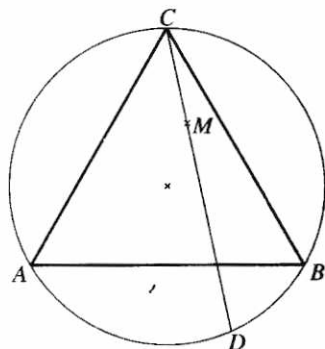


- 17) Si los extremos de una cuerda AB de una circunferencia son diametralmente opuestos a los extremos de otra cuerda CD , entonces las dos cuerdas son paralelas.
- 18) Si por un punto P de una circunferencia se trazan dos cuerdas perpendiculares AP y PB , entonces AB es diámetro.
- 19) En una circunferencia se trazan la cuerda AB y la

tangente en A . Sobre la tangente se determina un punto M tal que $AM = MB$. La recta MB corta la circunferencia en N . Entonces $MN = NA$.

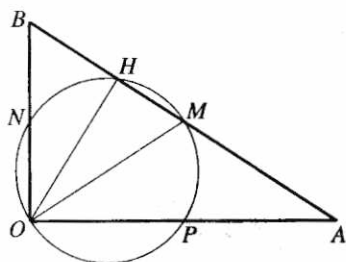
- 20) Sea ABC un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia y D un punto cualquiera del arco AB . Sobre la recta DC se toma un punto M tal que $DM = DA$ (Ver figura). Entonces se cumple que:

- el triángulo ADM es equilátero
- $MC = DB$
- $DC = DA + DB$



- 21) Las bases de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera de una circunferencia a los lados de un triángulo inscrito en ella son colineales.

- 22) Dado un triángulo OAB rectángulo en O , se traza una circunferencia que tiene por diámetro la mediana OM . La circunferencia pasa entonces por N y P , puntos medios de los catetos, y por H , pie de la altura trazada desde el vértice O (Ver figura).



- 23) En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O se trazan las mediatrices de los radios OA y OB . Estas cortan, respectivamente, la semicircunferencia en M y N . Entonces los arcos AM , MN y NB son de igual longitud.
- 24) Sean dos circunferencias concéntricas. La tangente en un punto A de la menor corta la mayor en los puntos B y C . Entonces A es el punto medio del segmento BC .

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados *Focos* es constante.

El método que se utiliza en jardinería para construir una elipse nos puede ayudar a visualizar mejor la definición: el método consiste en clavar dos estacas en el suelo atando a ellas una cuerda cuya longitud es mayor que la distancia que separa las estacas (Fig. 1). A continuación, con algún instrumento que tenga en tensión la cuerda, se va trazando un surco en el suelo: la marca que se obtiene es una elipse y los puntos donde están clavadas las estacas, los focos de la misma.

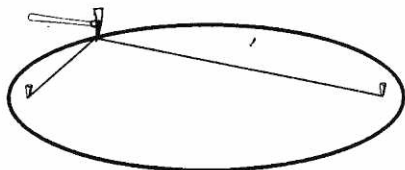


Fig. 1

Es evidente que, en cualquier punto de su recorrido, la suma de las distancias del instrumento a cada una de las estacas equivale a la longitud total de la cuerda atada a ellas y es, por tanto, constante.

Situemos una elipse sobre un sistema de ejes coordenados (Fig. 2) de tal forma que los focos F y F' queden sobre el eje de abscisas y el eje de ordenadas sea la mediatriz del segmento FF' .

Llamaremos *distancia focal* a la que separa los focos y la designaremos, por comodidad, con $2c$:

$$\text{Distancia focal} = d_{(F,F')} = 2c$$

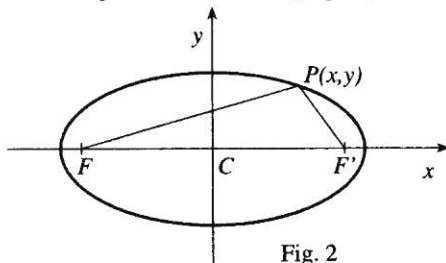


Fig. 2

Al punto medio del segmento FF' , punto que coincide con el origen del sistema cartesiano, lo llamaremos *centro* de la elipse:

$$\text{Centro} = \text{punto medio de } FF'$$

Por ser su punto medio, el centro de la elipse divide la distancia focal en dos porciones iguales. Cada una recibe el nombre de *semidistancia focal*:

$$\text{Semidistancia focal} = \frac{1}{2} d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$$

Dado que los focos están separados del centro de la elipse y del origen del sistema por una distancia igual a la de la semidistancia focal c , sus coordenadas son:

$$F(-c, 0) \text{ y } F'(c, 0)$$

Llamaremos, por último, $2a$ la suma de las distancias a los focos desde un punto cualquiera $P(x, y)$ de la elipse y *radios focales* a cada uno de los segmentos que unen a P con los focos:

$$d_{(F,P)} + d_{(F',P)} = 2a \quad (I)$$

$$\text{Radios focales} = \overline{FP} \text{ y } \overline{F'P}$$

Ecuación de la elipse

La relación (I) nos da la condición que debe satisfacer todo punto que pertenezca al lugar geométrico y es, por tanto, la ecuación del mismo:

$$d_{(F,P)} + d_{(F',P)} = 2a$$

Calculando las distancias:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Pasando uno de los radicales al miembros de la derecha y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left[2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2$$

Desarrollando:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevando nuevamente al cuadrado y desarrollando:

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Dividiendo todos los términos por $a^2(a^2 - c^2)$ obtenemos la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1 \quad (\text{II})$$

Ahora bien, designemos por B y B' (que se encuentran a una distancia b del centro) los puntos de intersección de la elipse con el eje de ordenadas. Como el punto $B(0, b)$ está sobre la elipse, debe satisfacer su ecuación. Por tanto:

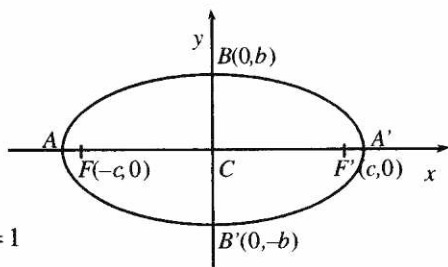
$$\frac{0}{a^2} + \frac{b^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

De donde:

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad (\text{III})$$

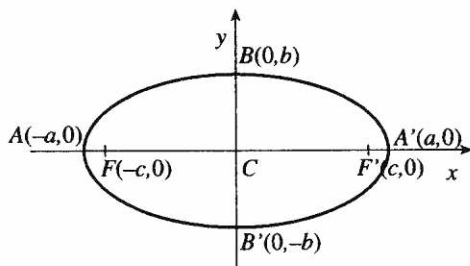
Sustituyendo en (II):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (\text{IV})$$



Llamamos A y A' los puntos de intersección de la elipse y el eje de abscisas.

Sus coordenadas son $A(-a,0)$ y $A'(a,0)$. En efecto, se comprueba fácilmente que satisfacen la ecuación (IV).



Los puntos A y A' se encuentran ambos a una distancia a del centro y separados, por tanto, por una distancia $2a$.

Llamaremos *Eje mayor* a esta distancia y *vértices del eje mayor* a los extremos A y A' :

$$\text{Eje mayor} = d_{(AA')} = 2a$$

$$\text{Vértices del eje mayor} = A \text{ y } A'$$

El centro de la elipse divide el eje mayor en dos porciones que reciben cada una el nombre de *Semieje mayor*.

$$\text{Semieje mayor} = \frac{1}{2} d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$$

El eje mayor es aquel sobre el que se encuentran los focos F y F' .

Los puntos B y B' se encuentran ambos a una distancia b del centro y separados entre sí por una distancia $2b$. Llamaremos *Eje menor* a esta distancia y *vértices del eje menor* a los extremos B y B' :

$$\text{Eje menor} = d_{(B,B')} = 2b$$

$$\text{Vértices del eje menor} = B \text{ y } B'$$

Cada una de las porciones que determina el centro sobre el eje menor recibe el nombre de *Semieje menor*:

$$\text{Semieje menor} = \frac{1}{2} d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$$

Obviamente, las coordenadas de los vértices nos permiten también calcular las del centro de la elipse:

$$\text{Centro} = \text{Punto medio de } AA' = \text{Punto medio de } BB'$$

De la igualdad (III) obtenemos la relación entre los semiejes y la semidistancia focal:

$$\text{Relación entre } a, b \text{ y } c: a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{III})$$

Despejando cada una de las variables de la ecuación (IV) se obtienen las siguientes igualdades:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{V})$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (\text{VI})$$

En la igualdad (V) sólo se obtienen valores reales si $x^2 \leq a^2$, es decir, si

$$|x| \leq a$$

y en la igualdad (VI) si

$$|y| \leq b$$

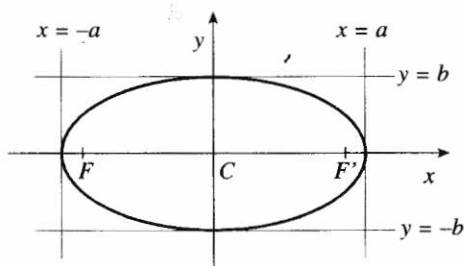
De todo esto se deduce que la elipse se encuentra entre las rectas

$$x = a$$

$$x = -a$$

$$y = b$$

$$y = -b$$



Estas rectas forman un rectángulo de lados paralelos a los ejes coordenados en el que está inscrita la elipse. La longitud de los lados del rectángulo son $2a$ y $2b$ y sus diagonales concurren en el centro de la elipse.

Excentricidad de la elipse

Se le da el nombre de *excentricidad* de la elipse a la relación entre la distancia focal y el eje mayor. Se le designa por la letra e :

$$e = \frac{2c}{2a}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

(VII)

Como en la elipse c es menor que a , la fracción $\frac{c}{a}$ será siempre propia y la excentricidad, por tanto, una fracción inferior a la unidad:

$$0 < e < 1$$

De la igualdad $a^2 = b^2 + c^2$ se obtiene que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y la igualdad (VII) se transforma así:

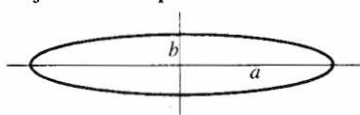
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

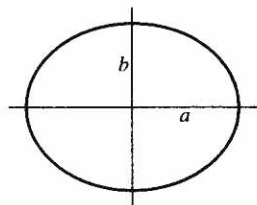
(VIII)

La igualdad (VIII) nos ayuda a visualizar mejor el concepto de excentricidad:

Si en una elipse a es mucho mayor que b , el término $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ será muy pequeño y el valor de e se acercará a la unidad.



Si, en cambio, b y a son muy cercanos en tamaño, el valor del término $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ se acercará a la unidad y el de la excentricidad a cero. En ese caso la elipse se parecerá a una circunferencia.



En realidad, la circunferencia es un caso particular de elipse en la que los semiejes son de igual longitud y la excentricidad, por tanto, nula.

Directrices de la elipse

Se denominan así dos rectas perpendiculares al eje mayor y situadas a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro de la elipse.

Sus ecuaciones, para la elipse que tiene su centro en el origen del sistema de ejes coordenados, son:

$$\boxed{x = -\frac{a}{e}} \quad \text{y} \quad \boxed{x = \frac{a}{e}}$$

Dado que en la elipse $e < 1$, la fracción $\frac{a}{e}$ siempre es mayor que a . En consecuencia, las directrices están más alejadas del centro de la elipse que los vértices del eje mayor y no cortan la elipse sino que son externas a ella.

Las directrices de la elipse tienen la siguiente propiedad: si r es la distancia de un punto cualquiera M de la elipse a uno de los focos y d la distancia de ese mismo punto a la directriz correspondiente a tal foco, entonces la relación $\frac{r}{d}$ es igual a la excentricidad de la elipse:

$$\boxed{\frac{r}{d} = e}$$

Propiedad

Desde un punto cualquiera P de la elipse se traza un segmento PQ perpendicular al eje mayor. La abscisa de P es igual a la distancia entre C y Q , y su ordenada a la distancia entre P y Q :

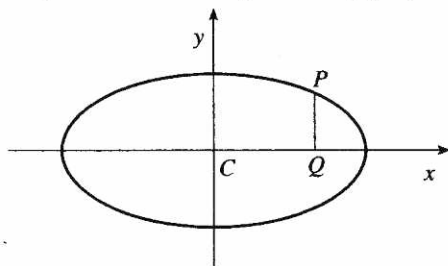
$$\text{Abscisa de } P = d_{(C,Q)}$$

$$\text{Ordenada de } P = d_{(P,Q)}$$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la elipse, tendremos (sustituyendo en IV):

$$\boxed{\frac{[d_{(C,Q)}]^2}{a^2} + \frac{[d_{(P,Q)}]^2}{b^2} = 1}$$

(IX)



Cuerda de la elipse

es todo segmento que une dos puntos de la elipse.

Diámetro de la elipse

es toda cuerda que pasa por el centro de la elipse.

Lado recto de la elipse

La cuerda perpendicular al eje mayor y que pasa por uno de los focos recibe el nombre de *lado recto* de la elipse.

En la Fig. 9, PQ y $P'Q'$ son los lados rectos de la elipse y los focos son sus puntos medios.

Podemos calcular la longitud del lado recto mediante la propiedad (IX).

Utilizando (IX):

$$\frac{[d_{(F,C)}]^2}{a^2} + \frac{[d_{(P,F)}]^2}{b^2} = 1$$

Pero

$$d_{(F,C)} = \text{Semidistancia focal} = c$$

Sustituyendo:

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{[d_{(P,F)}]^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{[d_{(P,F)}]^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{[d_{(P,F)}]^2}{b^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

El numerador del miembro de la derecha es, por (III), igual a b^2 :

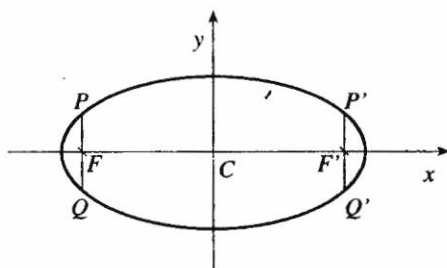
$$\frac{[d_{(P,F)}]^2}{b^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$[d_{(P,F)}]^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$d_{(P,F)} = \frac{b^2}{a}$$

La longitud total del lado recto PQ es, en consecuencia,

$$\boxed{d_{(P,Q)} = \frac{2b^2}{a}}$$

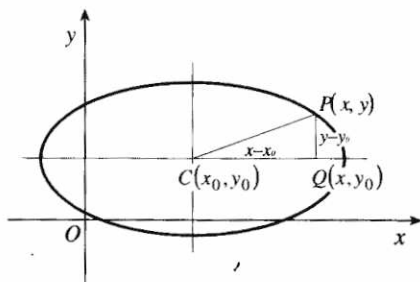


Ecuación canónica de la elipse

Todo lo dicho hasta este momento se refiere a la elipse que tiene su centro en el origen de coordenadas.

Hallaremos la ecuación de la elipse para el caso de que el centro sea un punto cualquiera $C(x_0, y_0)$, como se muestra en la figura.

Trazamos la perpendicular desde un punto cualquiera $P(x, y)$ al eje mayor. El pie Q de la perpendicular tiene la misma abscisa x de P y la misma ordenada y_0 de C , siendo sus coordenadas, por tanto, $Q(x, y_0)$.



Por la propiedad (IX) podemos escribir:

$$\frac{[d_{(C,Q)}]^2}{a^2} + \frac{[d_{(P,Q)}]^2}{b^2} = 1$$

Pero $d_{(C,Q)} = x - x_0$ (C y Q son puntos de igual ordenada) y $d_{(P,Q)} = y - y_0$ (P y Q son puntos de igual abscisa). Sustituyendo en la igualdad anterior, tenemos la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (X)$$

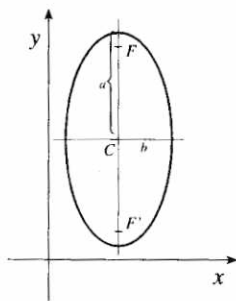
que es la ecuación canónica de una elipse de centro $C(x_0, y_0)$.

La igualdad (IV) que habíamos utilizado hasta este momento no es más que un caso particular de la (X).

Elipse de eje mayor paralelo al eje de ordenadas

En el caso de que el eje mayor, que contiene los focos F y F' , de la elipse sea paralelo al eje de ordenadas, la ecuación canónica se transforma (cosa fácilmente demostrable) en esta otra:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (XI)$$



Observación: Como a es siempre mayor que b por ser, precisamente, el semieje mayor, la ecuación canónica de una elipse nos permite conocer fácilmente la orientación de la misma: si el denominador mayor es el del término que contiene x , el eje mayor será paralelo al de abscisas y, si tomamos éste como *eje horizontal*, la orientación o aplastamiento de la elipse será horizontal. Si el denominador mayor, en cambio, es el del término que contiene y , el eje mayor de la elipse y su orientación serán *verticales*.

De aquí en adelante, para mayor comodidad, diremos que la orientación de la elipse es *horizontal* si el eje mayor es paralelo al de abscisas y *vertical* si es paralelo al de ordenadas.

Tangente a una elipse en el punto $P(x_1, y_1)$

La ecuación de la tangente a una elipse en un punto P se puede calcular si se conoce su pendiente.

Calcularemos la pendiente de la tangente a una elipse, de centro en el origen de coordenadas y eje mayor sobre el eje de abscisas, en el punto $P(p, q)$. (Utilizaremos estas letras, y no x_1 y y_1 , para mayor claridad).

Sea la ecuación de la tangente:

$$y - q = m(x - p)$$

de donde:

$$y = mx - mp + q \quad (1)$$

Sea la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

Como el punto P pertenece a la elipse, podemos sustituir en (2):

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$$

Eliminando denominadores:

$$b^2 p^2 + a^2 q^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (3)$$

y, despejando:

$$a^2 q^2 = a^2 b^2 - b^2 p^2 \quad (4)$$

Sustituyendo en (2) el valor de y obtenido en (1):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx - mp + q)^2}{b^2} = 1$$

Desarrollando, eliminando denominadores y agrupando términos semejantes se obtiene la expresión:

$$(a^2 m^2 + b^2)x^2 - (2a^2 m^2 p - 2a^2 m q)x + a^2 m^2 p^2 + a^2 q^2 - 2a^2 m p q - a^2 b^2 = 0$$

El valor de x en la expresión anterior es:

$$x = \frac{2a^2 m^2 p - 2a^2 m q \pm \sqrt{(2a^2 m^2 p - 2a^2 m q)^2 - 4(a^2 m^2 + b^2)(a^2 m^2 p^2 + a^2 q^2 - 2a^2 m p q - a^2 b^2)}}{2(a^2 m^2 + b^2)}$$

La expresión anterior nos da las abscisas de los *dos puntos* en los que la recta intersecta la elipse (una cuando se toma el radical positivo y otra cuando se toma negativo). Pero para que la recta sea tangente a la elipse, debe tener *un único punto en común* con ella por lo que el radical de la expresión debe ser igual a cero:

$$\sqrt{(2a^2m^2p - 2a^2mq)^2 - 4(a^2m^2 + b^2)(a^2m^2p^2 + a^2q^2 - 2a^2mpq - a^2b^2)} = 0$$

Eliminando el radical, desarrollando, reduciendo términos y simplificando, se llega a la siguiente expresión:

$$m^2(a^2 - p^2) + 2mpq + b^2 - q^2 = 0$$

El valor de m en esta expresión es:

$$m = \frac{-2pq \pm \sqrt{4p^2q^2 - 4(a^2 - p^2)(b^2 - q^2)}}{2(a^2 - p^2)}$$

Simplificando:

$$m = \frac{-pq \pm \sqrt{p^2q^2 - (a^2 - p^2)(b^2 - q^2)}}{a^2 - p^2}$$

Desarrollando la cantidad subradical y reduciendo términos:

$$m = \frac{-pq \pm \sqrt{-a^2b^2 + a^2q^2 + b^2p^2}}{a^2 - p^2}$$

Pero por la igualdad (3) el radical es igual a cero. Por tanto:

$$m = \frac{-pq}{a^2 - p^2}$$

Multiplicando numerador y denominador por b^2 :

$$m = \frac{-b^2pq}{a^2b^2 - b^2p^2}$$

El denominador es, por (4), igual a a^2q^2 :

$$m = \frac{-b^2pq}{a^2q^2}$$

De donde:

$$m = \frac{-b^2p}{a^2q}$$

La pendiente de la tangente a una elipse en el punto $P(x_1, y_1)$, si el eje mayor coincide con el de abscisas y el centro con el origen del sistema, es, pues,

$$m = \frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$$

Mediante un proceso análogo puede determinarse que la pendiente de la tangente a una elipse de centro $C(x_0, y_0)$ y eje mayor paralelo al de abscisas es

$$m = \frac{-b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$$

Y la pendiente de la tangente a una elipse de centro $C(x_0, y_0)$ y eje mayor paralelo al de ordenadas es

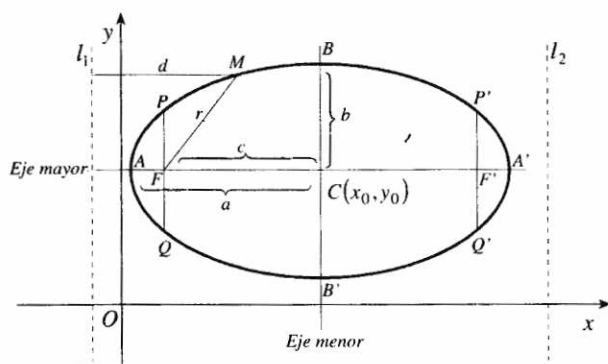
$$m = \frac{-a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$$

Nota: En el siguiente cuadro-resumen podrán observarse cambios en la formulación de algunas de las igualdades de las hasta ahora estudiadas. Estos cambios se deben al hecho de tomar un punto cualquiera como centro de la elipse y no el origen del sistema de ejes coordenados.

Resumen

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.



Elementos

Centro:	$C(x_0, y_0)$
Focos:	F y F' (se encuentran sobre el eje mayor)
Vértices:	A, A', B y B'
Eje mayor:	$d_{(A,A')} = 2a$
Semieje mayor:	$\frac{1}{2} d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$ (42^G)
Eje menor:	$d_{(B,B')} = 2b$
Semieje menor:	$\frac{1}{2} d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$ (43^G)
Distancia focal:	$d_{(F,F')} = 2c$
Semidistancia focal:	$\frac{1}{2} d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$ (44^G)
Radio focal:	$\overline{FM}$ y $\overline{MF'}$
Directrices:	l_1 y l_2
Lados rectos:	PQ y $P'Q'$
Excentricidad:	$e = \frac{c}{a} = \frac{c}{d} \quad (e < 1)$ (45^G)
Relación entre a, b y c:	$a^2 = b^2 + c^2$ (46^G)

Ecuación canónica de la elipse

Caso I
(eje mayor horizontal)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (47^G)$$



Caso II
(Eje mayor vertical)

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (47a^G)$$



Nota: en la ecuación de la elipse, a^2 es siempre el denominador mayor.

Coordenadas del Centro: C es el punto medio de AA' , BB' y FF'

Coordenadas de los vértices y de los focos:

Caso I	Caso II
de A y A' : $(x_0 \pm a, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm a)$
de F y F' : $(x_0 \pm c, y_0)$ (48^G)	$(x_0, y_0 \pm c)$ (48a^G)
de B y B' : $(x_0, y_0 \pm b)$	$(x_0 \pm b, y_0)$

Ecuaciones de las directrices:

Caso I	Caso II
$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$ (49^G)	$y = y_0 \pm \frac{a}{e}$ (49a^G)

Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = d_{(P',Q')} = \frac{2b^2}{a}$ **(50^G)**

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I	Caso II
$m = -\frac{b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$ (51^G)	$m = -\frac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$ (51a^G)

Nota:

1) En los ejemplos de las páginas que siguen utilizaremos los números asignados a la igualdades tal como aparecen en el cuadro anterior.

2) Llamaremos "hacer el estudio completo" de una elipse a señalar los siguientes aspectos:

Centro	Coordenadas de vértices y focos
Semiejes	Excentricidad
Orientación	Ecuaciones de las directrices
Representación gráfica	Longitud del lado recto
Semidistancia focal	

Ejemplo 18

Hacer el estudio completo de la elipse $\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

Centro y semiejes

La ecuación de la elipse en su forma canónica nos proporciona los siguientes datos:

Centro de la elipse: $C(3, -2)$

Semieje mayor (denominador mayor):

$$a^2 = 25$$

$$a = 5$$

Semieje menor:

$$b^2 = 9$$

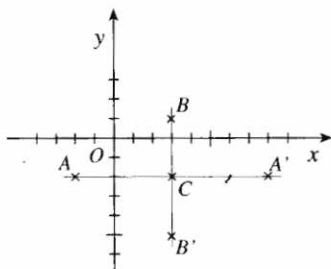
$$b = 3$$

Orientación: como a^2 divide el término que contiene x , la orientación es horizontal

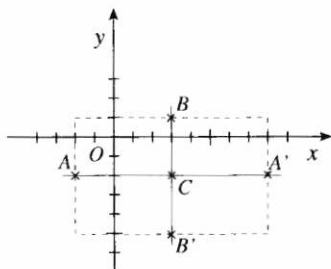
Orientación horizontal

Representación Gráfica

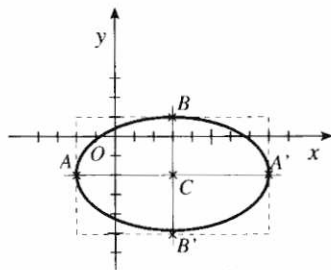
Señalamos primero el centro en un sistema de ejes coordenados. En el centro se cruzan el eje mayor (horizontal en este caso) y el eje menor. Como el semieje mayor a mide 5, señalamos los vértices A y A' a cinco unidades hacia la izquierda y hacia la derecha del centro. Y como el semieje menor b mide 3, señalamos los vértices B y B' a tres unidades por encima y por debajo del centro.



Tal como estudiamos en la pág. 487, por los vértices pasan las cuatro rectas (perpendiculares a los ejes de la elipse) que forman el rectángulo en el que está inscrita la elipse.



Trazamos, por último, la elipse:



Semidistancia focal: sustituyendo los valores de a y b en (46^a) tenemos:

$$c^2 = 25 - 9 = 16$$

$$c = 4$$

Vértices del eje mayor y focos: Los vértices del eje mayor y los focos están sobre la misma horizontal del centro y tendrán, por tanto, la misma ordenada:

$$\begin{array}{ll} A(& , -2) & F(& , -2) \\ A'(& , -2) & F'(& , -2) \end{array}$$

Para obtener las abscisas de A y A' restamos y sumamos (tal como hicimos para señalarlas en el gráfico) cinco unidades ($a = 5$) a la abscisa del centro (48^o):

$$\begin{array}{ll} A(3-5, -2) & F(\quad, -2) \\ A'(3+5, -2) & F(\quad, -2) \end{array}$$

Para obtener la de los focos, restamos y sumamos 4 unidades ($c = 4$) a la abscisa del centro (48^o):

$$\begin{array}{ll} A(3-5, -2) & F(3-4, -2) \\ A'(3+5, -2) & F(3+4, -2) \end{array}$$

En definitiva:

$A(-2, -2)$	$F(-1, -2)$
$A'(8, -2)$	$F(7, -2)$

Vértices del eje menor: están sobre la misma vertical del centro y tienen, por tanto, la misma abscisa:

$$B(3, \quad) \quad B'(3, \quad)$$

Su ordenada se obtiene sumando y restando 3 unidades ($b = 3$) a la ordenada del centro (48^o):

$$B(3, -2+3) \quad B'(3, -2-3)$$

En definitiva:

$B(3, 1)$	$B'(3, -5)$
-----------	-------------

Excentricidad: se calcula mediante (45^o):

$e = \frac{4}{5}$

Directrices: Se encuentran a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro:

$$\frac{a}{e} = \frac{5}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{4}$$

Sus ecuaciones son (49^o):

$$x = 3 \pm \frac{25}{4}$$

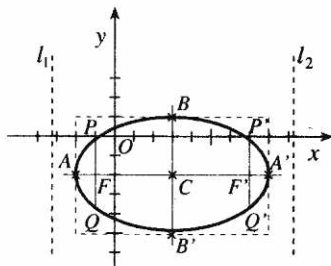
$l_1 \equiv 4x - 37 = 0$

$l_2 \equiv 4x + 13 = 0$

Lado Recto: mediante (50^o):

$$PQ = P'Q' = \frac{18}{5}$$

Para finalizar, incluimos en el gráfico los últimos elementos que hemos hallado:



Hacer el estudio completo de la elipse $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{36} = 1$

Centro y semiejes

La elipse tiene su centro en: $C(-4, 5)$

Semieje mayor (denominador mayor):

$$a^2 = 36 \quad a = 6$$

Semieje menor:

$$b^2 = 9 \quad b = 3$$

Orientación: como a^2 divide el término que contiene y , tendremos:

Orientación vertical

Representación Gráfica

Señalamos el centro y los ejes, que se intersectan en el centro. Sobre el eje mayor (que esta vez es vertical) señalamos 6 unidades ($a = 6$) por encima y por debajo del centro para obtener A y A' . Sobre el eje menor señalamos 3 unidades ($b = 3$) hacia la izquierda y hacia la derecha del centro para obtener B y B' .

Por los vértices pasamos las rectas perpendiculares a los ejes de la elipse que forman el rectángulo en el que ésta está inscrita.

Trazamos, finalmente, la elipse.

Semidistancia focal: sustituyendo los valores de a y b en (46^G) tenemos:

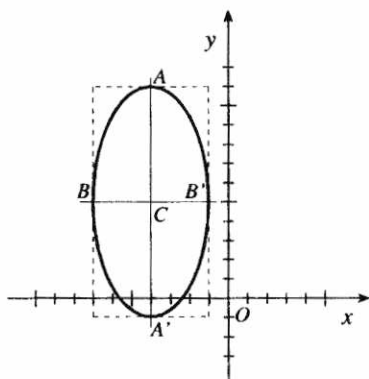
$$c^2 = 36 - 9 = 27$$

$$c = 3\sqrt{3}$$

Vértices del eje mayor y focos: están situados esta vez en la misma vertical del centro y tendrán, por tanto, la misma abscisa. Sumando y restando 6 unidades ($a = 6$) a la ordenada del centro obtendremos A y A' ; sumando y restando $3\sqrt{3}$ ($c = 3\sqrt{3}$) a la ordenada del centro obtendremos F y F' (48a^G):

$$A(-4, 11) \quad F(-4, 5 + 3\sqrt{3})$$

$$A'(-4, -1) \quad F'(-4, 5 - 3\sqrt{3})$$



Vértices del eje menor: están sobre la misma horizontal del centro y tienen, por tanto, la misma ordenada.

Restando y sumando 3 unidades ($b = 3$) a la abscisa del centro obtenemos B y B' (48^a):

$$B(-7, 5)$$

$$B'(-1, 5)$$

Excentricidad: (45^a):

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Directrices: Se encuentran a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro:

$$\frac{a}{e} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

Sus ecuaciones son (49^a):

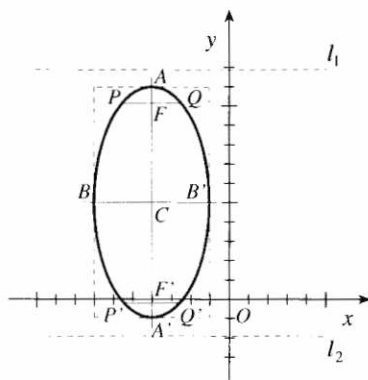
$$l_1 \equiv y - 5 - 4\sqrt{3} = 0$$

$$l_2 \equiv y - 5 + 4\sqrt{3} = 0$$

Lado Recto: mediante (50^a):

$$PQ = P'Q' = 3$$

Incluimos en el gráfico los últimos elementos que hemos hallado:



Ecuación general de la elipse

Si desarrollamos la ecuación canónica de la elipse (47^a), eliminamos los denominadores y reducimos términos semejantes, obtendremos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

(51^a)

que llamaremos *Ecuación General* de la elipse.

Característica de la ecuación general de la elipse es que los términos cuadráticos son ambos positivos y de distinto coeficiente:

$$A > 0; \quad B > 0; \quad A \neq B$$

Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general: Método de completación de cuadrados

Tuvimos oportunidad de conocer el método cuando estudiamos la circunferencia (pág. 453). Con pequeñas variantes, se aplica también a la ecuación de la elipse. Lo explicaremos con un ejemplo concreto:

Ejemplo 20

La ecuación general de una elipse es $x^2 + 5y^2 + 10x - 15y - 10 = 0$. Llevar la ecuación a la forma canónica.

1) Agrupamos los términos que contienen x y los que contienen y y pasamos el término independiente al miembro de la derecha:

$$x^2 + 10x + 5y^2 - 15y = 10$$

2) Sacamos factor común A en el primer grupo y B en el segundo (Dado que en este caso $A = 1$, sólo sacamos factor común B en el segundo grupo):

$$(x^2 + 10x) + 5(y^2 - 3y) = 10$$

3) Completamos cuadrados:

$$2hx = 10x$$

$$2ky = -3y$$

$$h = 5$$

$$k = -\frac{3}{2}$$

$$h^2 = 25$$

$$k^2 = \frac{9}{4}$$

Sumando los cuadrados en ambos miembros de la ecuación:

$$(x^2 + 10x + 25) + 5\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = 10 + 25 + 5 \cdot \frac{9}{4}$$

(Nótese que la cantidad sumada en el segundo paréntesis está multiplicada, con los demás términos del paréntesis, por 5 y en consecuencia, al sumarla en el miembro de la derecha la multiplicamos también por 5).

Factorizando y reduciendo términos:

$$(x + 5)^2 + 5\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{185}{4}$$

4) En la ecuación canónica de la elipse, el término del miembro de la derecha debe ser la unidad. Para obtener esto, dividimos todos los términos por $\frac{185}{4}$:

$$\frac{(x + 5)^2}{\frac{185}{4}} + \frac{5\left(y - \frac{3}{2}\right)^2}{\frac{185}{4}} = 1$$

Por último, simplificando:

$$\frac{(x+5)^2}{\frac{185}{4}} + \frac{(y-\frac{3}{2})^2}{\frac{37}{4}} = 1$$

Ejemplo 21

Hacer el estudio completo de la elipse $3x^2 + 28y^2 + 12x - 56y + 10 = 0$.

Llevamos primero la ecuación a la forma canónica:

Agrupando por variables: $3x^2 + 12x + 28y^2 - 56y = -10$

Sacando factor común A y B, respectivamente, en cada grupo:

$$3(x^2 + 4x) + 28(y^2 - 2y) = -10$$

$$2hx = 4x \quad 2ky = -2y$$

$$h = 2 \quad k = -1$$

$$h^2 = 4 \quad k^2 = 1$$

Sumando a ambos miembros $3(x^2 + 4x + 4) + 28(y^2 - 2y + 1) = -10 + 3 \cdot 4 + 28 \cdot 1$

Factorizando: $3(x+2)^2 + 28(y-1)^2 = 20$

Dividiendo todos los términos por 20 para obtener 1 en el miembro de la derecha:

$$\frac{3(x+2)^2}{20} + \frac{28(y-1)^2}{20} = 1$$

Simplificando:

$$\frac{3(x+2)^2}{20} + \frac{7(y-1)^2}{5} = 1$$

Pasando los coeficientes de los numeradores al otro extremo de la fracción:

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{20}{3}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{5}{7}} = 1$$

ESTUDIO DE LA ELIPSE

Centro

$$C(-2, 1)$$

Semiejes:

$$a^2 = \frac{20}{3}$$

$$a = \frac{2\sqrt{15}}{3} \approx 2,6$$

$$b^2 = \frac{5}{7}$$

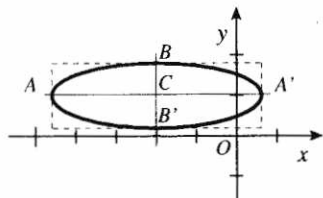
$$b = \frac{\sqrt{35}}{7} \approx 0,2$$

Orientación:

Horizontal

Representación gráfica

Señalamos en el gráfico centro, vértices, rectángulo en el que está inscrita la elipse y elipse:



Semidistancia focal

$$c^2 = \frac{20}{3} - \frac{5}{7} = \frac{125}{21}$$

$$c = \frac{5\sqrt{105}}{21} \approx 2,4$$

Vértices del eje mayor y focos: tienen la misma ordenada del centro; sus abscisas se calculan mediante (48^G):

$$\begin{aligned} A\left(-2 - \frac{2\sqrt{15}}{3}, 1\right) \quad F\left(-2 - \frac{5\sqrt{105}}{21}, 1\right) \\ A'\left(-2 + \frac{2\sqrt{15}}{3}, 1\right) \quad F'\left(-2 + \frac{5\sqrt{105}}{21}, 1\right) \end{aligned}$$

Vértices del eje menor: tienen la misma abscisa del centro; sus ordenadas se calculan mediante (48^G):

$$B\left(-2, 1 + \frac{\sqrt{35}}{7}\right) \quad B'\left(-2, 1 - \frac{\sqrt{35}}{7}\right)$$

Excentricidad: (45^G):

$$e = \frac{\frac{5\sqrt{105}}{21}}{\frac{2\sqrt{15}}{3}} \quad e = \frac{5\sqrt{7}}{14}$$

Directrices:

$$\frac{a}{e} = \frac{\frac{2\sqrt{15}}{3}}{\frac{5\sqrt{7}}{14}} = \frac{28\sqrt{105}}{105} \approx 2,7$$

Sus ecuaciones son (49^G):

$$x = -2 \pm \frac{28\sqrt{105}}{105}$$

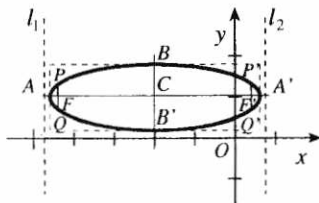
$$l_1 \equiv 105x + 210 + 28\sqrt{105} = 0$$

$$l_2 \equiv 105x + 210 - 28\sqrt{105} = 0$$

Lado Recto: (50^G):

$$PQ = P'Q' = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

Incluimos en el gráfico los últimos elementos que hemos hallado:



Ejercicio 124

Hacer el estudio completo de las siguientes elipses:

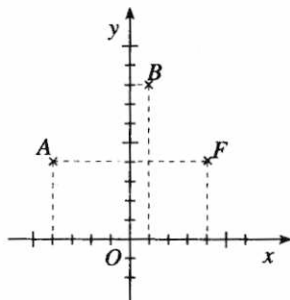
- 1) $4x^2 + y^2 + 40x - 8y + 80 = 0$
- 2) $9x^2 + 25y^2 + 36x - 189 = 0$
- 3) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$
- 4) $3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 8 = 0$
- 5) $x^2 + 2y^2 - 4 = 0$
- 6) $16x^2 + 9y^2 + 32x - 54y - 47 = 0$
- 7) $36x^2 + 49y^2 - 432x + 392y + 316 = 0$
- 8) $4x^2 + y^2 + 40x - 2y + 37 = 0$
- 9) $7x^2 + 16y^2 + 98x + 231 = 0$
- 10) $9x^2 + 4y^2 - 54x - 56y + 241 = 0$
- 11) $x^2 + 4y^2 - 10x + 16y + 25 = 0$
- 12) $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y = 0$
- 13) $9x^2 + 25y^2 - 100y - 125 = 0$
- 14) $4x^2 + 9y^2 - 4x - 6y - 34 = 0$
- 15) $9x^2 + 4y^2 - 90x + 213 = 0$
- 16) $36x^2 + 4y^2 - 48x + 4y - 127 = 0$

Ejemplo 22

Hallar la ecuación general de la elipse de la que se conocen los vértices $A(-4,4)$; $B(1,8)$ y un foco $F(4,4)$.

Para determinar la ecuación de una elipse necesitamos conocer los siguientes elementos: centro, semiejes y orientación.

Señalamos en un gráfico los datos conocidos.



Como los focos están sobre el eje mayor, éste es, en nuestro ejemplo, horizontal.

Orientación horizontal (Caso I)

Cuando la elipse está orientada horizontalmente, el

centro tiene la misma ordenada de los focos y los vértices del eje mayor y la misma abscisa de los vértices del eje menor.

Las coordenadas del centro son, pues:

$$C(1, 4)$$

Semieje mayor (42^o)

$$a = d_{(A,C)} = 1 - (-4) = 5$$

$$a^2 = 25$$

Semieje menor (43^o)

$$b = d_{(B,C)} = 8 - 4 = 4$$

$$b^2 = 16$$

La ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$$

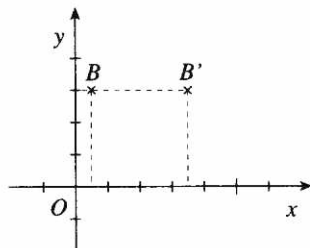
Llevada a forma general:

$$16x^2 + 25y^2 - 32x - 200y + 16 = 0$$

Ejemplo 23

Hallar la ecuación general de la elipse de la que se conocen los vértices $B(\frac{1}{2}, 3)$ y $B'(\frac{7}{2}, 3)$ y la excentricidad $e = \frac{4}{5}$.

Colocamos en un gráfico los elementos que pueden ser señalados.



Es obvio que el eje menor de la elipse es horizontal y por tanto ésta está orientada verticalmente.

Orientación vertical (Caso II)

Semieje menor (43^o):

$$b = \frac{1}{2} d_{(B,B')} = \frac{1}{2} \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$$b^2 = \frac{9}{4}$$

Cálculo del semieje mayor

Por la relación (46^o) tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \frac{9}{4} + c^2 \quad (1)$$

Por otra parte, conocemos el valor de la excentricidad:

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5} \quad (2)$$

Despejando c en (2) y sustituyendo en (1) obtenemos:

$$a^2 = \frac{25}{4}$$

La ecuación canónica de la elipse es (47a⁶):

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

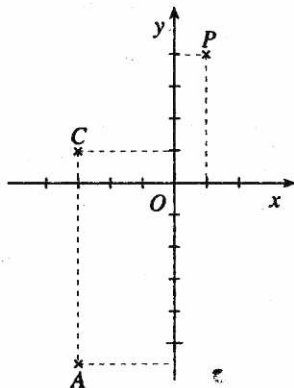
Llevada a forma general:

$$100x^2 + 36y^2 - 400x - 216y + 499 = 0$$

Ejemplo 24

Hallar la ecuación general de la elipse que pasa por el punto $P(1,4)$, tiene su centro en $C(-3,1)$ y uno de los vértices del eje mayor es $A(-3, 1-3\sqrt{5})$.

Señalamos en un gráfico los elementos conocidos.



Obviamente el eje mayor es vertical

Orientación vertical

Semieje mayor:

$$\begin{aligned} a &= d_{(A,C)} = 1 - (1 - 3\sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5} \\ a^2 &= 45 \end{aligned}$$

Sea la ecuación de la elipse (Caso II):

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$

Sustituyendo valores conocidos:

$$\frac{(x+3)^2}{b^2} + \frac{(y-1)^2}{45} = 1$$

Como el punto $P(1,4)$ pertenece a la elipse, sus coordenadas deben satisfacer la ecuación. Por tanto, sustituyendo, tenemos:

$$\frac{(1+3)^2}{b^2} + \frac{(4-1)^2}{45} = 1$$

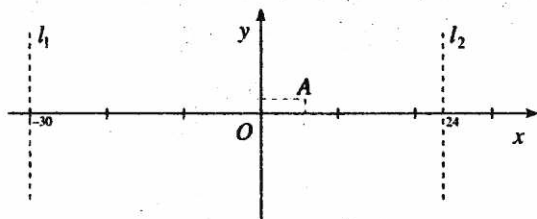
Resolviendo, se obtiene para b^2 el siguiente valor:

$$b^2 = 20$$

Ejemplo 25

Las rectas $l_1 \equiv x + 30 = 0$ y $l_2 \equiv x - 24 = 0$ son las directrices de una elipse y $A(6,2)$ uno de los vértices del eje mayor. Hallar la ecuación general de la elipse.

Señalamos en un gráfico los elementos conocidos.



Al ser verticales las directrices, la elipse debe tener

Orientación horizontal (Caso I)

El centro de la elipse debe estar a igual distancia de las directrices. Su abscisa será, pues:

$$x_0 = \frac{-30+24}{2} = -3$$

Como el eje mayor es horizontal, la ordenada del centro será la misma del punto A:

$$y_0 = 2$$

Las coordenadas del centro son entonces:

$$C(-3, 2)$$

Semieje mayor (42^c):

$$a = d_{(A,C)} = 6 - (-3) = 9$$

Despejando x en la ecuación de l_2 , tenemos:

$$x = 24$$

Sabemos por (49^c) que la ecuación de la directriz es:

$$x = x_0 + \frac{a}{e}$$

En nuestro ejemplo:

$$x_0 + \frac{a}{e} = 24$$

Sustituyendo valores:

$$-3 + \frac{9}{e} = 24$$

De donde:

$$e = \frac{1}{3}$$

Pero $e = \frac{c}{a}$ (45^c). Por tanto

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

Sustituyendo el valor de a obtenemos:

$$c = 3$$

Semieje menor:

$$b^2 = a^2 - c^2 = 81 - 9 = 72$$

La ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{(x+3)^2}{81} + \frac{(y-2)^2}{72} = 1$$

En forma general:

$$8x^2 + 9y^2 + 48x - 36y - 540 = 0$$

Ejercicio 125

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan datos de una elipse. Hallar en cada caso la ecuación general.

- 1) $A(1, 3)$; $B(4, -2)$; $C(1, -2)$
- 2) $A(-2, 2)$; $A'(6, 2)$; $B(2, -1)$
- 3) $A(-3, 0)$; $A'(7, 0)$; $F(-2, 0)$ — ?
- 4) $A(-2, 2)$; $C(4, 2)$; Distancia focal $= 4\sqrt{5}$
- 5) $B(2, 3)$; $C(2, 1)$; Semieje mayor $= 6$
- 6) $F(-6, 3)$; $F'(2, 3)$; $e = \frac{2}{3}$
- 7) $A(-3, 6)$; $A'(-3, 0)$; $e = \frac{2}{3}$
- 8) $B(-4, -1)$; $B'(-4, -7)$; $e = 0,8$
- 9) $F(-1, 2)$; $F'(5, 2)$; Eje mayor $= 10$
- 10) $F(1, 5)$; $F'(1, -3)$; Semieje menor $= 2$
- 11) $A(-3, 6)$; $A'(-3, 0)$; $e = \frac{2}{3}$
- 12) $C(3, -1)$; $e = \frac{\sqrt{21}}{5}$; Eje menor (horizontal) $= 4$
- 13) $A(-4, 1)$; $F(-3, 1)$; $C(1, 1)$
- 14) $B(0, 5)$; $F(4, 0)$; $C(4, 5)$
- 15) $B(-3, -1)$; $C(-3, -7)$; $e = \frac{4}{5}$
- 16) Eje mayor (vertical) $= 14$; Distancia focal $= 8$; $C(3, 5)$
- 17) Un vértice mayor y uno menor son los puntos de intersección de la recta $3x + 7y - 21 = 0$ con los ejes coordenados.
- 18) $A(-2, 0)$; $C(2, 0)$; la elipse pasa por el punto $P\left(4, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
- 19) $A(5, 1)$; $C(-3, 1)$; la elipse pasa por el punto $P(1, -1)$.
- 20) $A(3, 0)$; Centro en el origen y pasa por $P\left(1, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.
- 21) Sus ejes coinciden con los ejes coordenados, pasa por el punto $P\left(3, \frac{\sqrt{21}}{2}\right)$ y es tangente a la recta $x + 2y - 8 = 0$.
- 22) Sus ejes coinciden con los ejes coordenados y pasa por $P(1, 3)$ y $Q(2, 1)$.
- 23) Sus ejes coinciden con los ejes coordenados y pasa por $P(-1, 1)$ y $Q\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
- 24) $C(2, 1)$; $e = \frac{2}{5}$; una de sus directrices es $l \equiv x - 27 = 0$.
- 25) Tiene su centro en $C(3, 6)$ y es tangente a los dos ejes de coordenadas.
- 26) Tiene los focos en $(\pm 3, 0)$ y cada lado recto mide 9.

- 27). Tiene los focos en $F(1, 4)$ y $F'(11, 4)$ y la longitud de cada lado recto es $\frac{48}{7}$.
- 28) Está inscrita en el rectángulo que forman las rectas $l_1 \equiv x + 5 = 0$; $l_2 \equiv y - 12 = 0$; $l_3 \equiv x + 1 = 0$ y $l_4 \equiv y - 2 = 0$.
- 29) Está inscrita en el rectángulo que forman las rectas $l_1 \equiv x - 2 = 0$; $l_2 \equiv y - 4 = 0$; $l_3 \equiv x - 13 = 0$ y $l_4 \equiv y + 1 = 0$.
- 30) $C(-2, 3)$; los extremos de un lado recto son $P(6, \frac{33}{5})$ y $Q(6, -\frac{3}{5})$.
- 31) $A(1, 0)$; $C(1, -2)$; $l_1 \equiv y - 2 = 0$ y $l_2 \equiv y + 6 = 0$ son las directrices.
- 32) Sus ejes coinciden con los ejes coordenados y pasa por $P(4, 3)$ y $Q(6, 2)$.
- 33) $C(-2, -2)$; $e = \frac{4}{5}$; eje mayor horizontal; longitud del lado recto $= \frac{18}{5}$.
- 34) El eje mayor coincide con el de abscisas y el eje menor con el de ordenadas; pasa por $P(6, 4)$; $e = 0,75$.
- 35) $F(2, 3)$; $F'(2, -1)$; las directrices son $l_1 \equiv 2y - 11 = 0$ y $l_2 \equiv 2y + 7 = 0$.
- 36) $C(3, -1)$; $e = 0,6$; las directrices son $l_1 \equiv 3x - 34 = 0$ y $l_2 \equiv 3x + 16 = 0$.
- 37) Pasa por los puntos $P(-9, 5)$; $Q(-11, 2)$; $R(-1, -3)$ y $S(5, -2)$.
- 38) Pasa por los puntos $P(-1, 7)$; $Q(6, 5)$; $R(8, 2)$ y $S(-8, -1)$.
- 39) Pasa por los puntos $P(0, 1)$; $Q(1, -1)$; $R(2, 2)$ y $S(4, 0)$.
- 40) $C(3, 2)$; $F(1, 2)$; la distancia entre sus directrices es 16.
- 41) $C(0, -4)$; $e = \frac{1}{2}$; la distancia entre sus directrices es 24; eje mayor vertical.
- 42) $C(2, 5)$; la elipse es tangente a los dos ejes coordenados.
- 43) $B(-2, 4)$; la ecuación del eje mayor es $y - 1 = 0$; $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
- 44) $B(9, 2)$; $e = \frac{\sqrt{13}}{7}$; la ecuación del eje mayor es $x - 3 = 0$.
- 45) $C(2, -5)$; el eje mayor (paralelo al de abscisas) es cuatro veces el eje menor; la elipse pasa por $P(4, -3)$.
- 46) $C(3, -4)$; la suma de sus semiejes es igual a $5\sqrt{5}$ y la distancia focal, 10.
- 47) $F(-1, 2)$; $C(3, 2)$; la suma de los semiejes es igual a la distancia focal.
- 48) $l_1 \equiv 4y - 33 = 0$ y $l_2 \equiv 4y + 17 = 0$ son las directrices; la ecuación de eje mayor es $x + 1 = 0$; $e = \frac{4}{5}$.

Ejercicio 126

- 1) Demostrar que el lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de todos los puntos de una circunferencia es una elipse.
- 2) Demostrar que si la ordenada de cada punto de una circunferencia se multiplica por una constante $k \neq 0$, el lugar geométrico resultante es una elipse.
- 3) Un arco semi-elíptico tiene 24 m de base y 8 m de altura. Calcular la altura

del arco sobre un punto de la base que esté 4 m de uno de los extremos y la altura del arco sobre un punto de la base que esté a 6 m del centro.

- 4) La luz de un arco semielíptico tiene un ancho de 4 m en la base del piso y un altura de 3 m. ¿Puede pasarse a través del arco un cajón de perfil rectangular de 2 m de ancho y 2,70 m de altura? ¿Puede pasarse la caja si se le da una rotación de modo que su perfil tenga 2,70 m de ancho y 2 m de altura?
- 5) Hallar las ecuaciones de los radios focales correspondientes al punto $P(-3,1)$ en la elipse $3x^2 + 4y^2 + 30x + 16y + 43 = 0$.
- 6) La órbita de la tierra alrededor del sol es elíptica con el sol, situado en uno de los focos. Si la excentricidad es $e = 0,017$ y la longitud del eje mayor es de 299 millones de kilómetros, hallar la máxima y la mínima distancia entre la tierra y el sol.
- 7) Hallar el área del rombo que tiene dos vértices en los focos de la elipse $25x^2 + 4y^2 + 250x - 16y + 541 = 0$ y los otros dos vértices en los extremos del eje menor.
- 8) Calcular la distancia desde el origen del sistema de ejes coordenados a la recta que pasa por un foco y el extremo derecho del eje menor de la elipse $5x^2 + y^2 - 70x - 4y + 225 = 0$.
- 9) Hallar la ecuación general de la recta que pasa por el punto de menor abscisa de la elipse $7x^2 + 16y^2 - 14x - 64y - 41 = 0$ y por un punto M de abscisa 3 que se encuentra a una distancia de $5\sqrt{2}$ del foco derecho de la misma elipse.
- 10) El semieje de una elipse se ve desde los focos con un ángulo de 60° . ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?
- 11) Calcular la longitud del radio de la circunferencia que pasa por los cuatro puntos de intersección de las elipses $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
- 12) Hallar la ecuación de la tangente a la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 3 = 0$ que es paralela a la recta $3x + 2y + 7 = 0$.
- 13) Hallar la ecuación de la tangente a la elipse $x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 9 = 0$ que es perpendicular a la recta $2x + 2y + 3 = 0$.
- 14) Hallar la ecuación de la tangente a la elipse $8x^2 + y^2 - 80x + 2y + 177 = 0$ que es paralela a la recta $x - 32y + 177 = 0$.
- 15) ¿Cuál debe ser la pendiente m de la recta $y = mx + k$ para que ésta sea tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?
- 16) Calcular a qué distancia de la recta $3x - y - 6 = 0$ se encuentra la elipse $3x^2 + y^2 + 12x - 8y - 8 = 0$.

- 17) Demostrar analíticamente que las tangentes a una elipse en los extremos de un mismo diámetro son paralelas.
- 18) Determinar cuál es el punto de la elipse $x^2 + 5y^2 - 25 = 0$ que está más alejado de la recta $2x + 5y + 31 = 0$.
- 19) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $M(5,0)$ a la elipse $4x^2 + y^2 - 20 = 0$.
- 20) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $M(0, \frac{5}{2})$ a la elipse $x^2 + 9y^2 - 45 = 0$.
- 21) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $M(-3,4)$ a la elipse $5x^2 + 9y^2 + 30x + 36y - 189 = 0$.
- 22) Se han trazado tangentes a la elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ desde el punto $M(10,-8)$. Hallar la ecuación general de la cuerda que une los puntos de tangencia.
- 23) Se han trazado tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 + 10x - 32y + 69 = 0$ desde el punto $M(1,5)$. Hallar la ecuación general de la cuerda que une los puntos de tangencia.
- 24) Los ejes de una elipse coinciden con los ejes coordenados. Hallar la ecuación de la elipse sabiendo que es tangente a las rectas $l_1 \equiv x + 4y - 10 = 0$ y $l_2 \equiv x - y - 5 = 0$.
- 25) Demostrar analíticamente que el producto de las distancias de los focos de una elipse a una tangente cualquiera es igual al cuadrado del semieje menor.
- 26) Utilizando el teorema demostrado en el ejercicio anterior, hallar la ecuación general de la elipse que tiene sus focos en $(0, \pm\sqrt{14})$ y es tangente a la recta $x + 2y - 14 = 0$.
- 27) Utilizando el teorema del ejercicio 25, hallar la ecuación general de la elipse tangente a $l_1 \equiv 2x + y - 12 = 0$, con eje menor igual a $4\sqrt{6}$ y ejes coincidentes con los ejes coordenados.
- 28) Demostrar analíticamente que la tangente a una elipse en un punto M forma ángulos iguales con los radios focales FM y MF' .
- 29) Desde el foco izquierdo de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 180 = 0$ se dirige un rayo de luz de pendiente -2 . El rayo llega a la elipse y se refleja. Hallar la ecuación general del rayo reflejado.
- 30) Desde el foco derecho de la elipse $8x^2 + 17y^2 - 32x - 136y + 168 = 0$ se dirige un rayo de luz de pendiente 4 . El rayo llega a la elipse y se refleja. Hallar la ecuación general del rayo reflejado.
- 31) En la elipse $4x^2 + y^2 + 8x - 4y - 12 = 0$, $M(-\frac{3}{2}, 3)$ es el punto medio de una cuerda. Determinar la longitud de esa cuerda.
- 32) La base fija de un triángulo tiene por extremos los puntos $A(2,3)$ y $B(8,3)$.

Hallar la ecuación del lugar geométrico del tercer vértice C si éste se mueve de tal forma que el producto de las tangentes de los ángulos de la base es siempre igual a 3.

- 33) Demostrar analíticamente que la pendiente de la tangente a una elipse en el extremo de un lado recto es, en valor absoluto, igual a la excentricidad de la elipse.
- 34) Por el origen del sistema de ejes coordenados y por el centro de la elipse $x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 29 = 0$ se traza una recta. Calcular la longitud de la cuerda que la elipse determina sobre la recta.
- 35) En la elipse $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ se inscribe un triángulo equilátero haciendo coincidir uno de sus vértices con el vértice derecho del eje mayor de la elipse. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices del triángulo.
- 36) Determinar las coordenadas de los vértices del cuadrado inscrito en la elipse $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 17 = 0$.
- 37) Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$. Determinar los vértices del rectángulo sabiendo que sus lados mayores son paralelos al eje de abscisas y su longitud es el doble de la de los lados menores.
- 38) En una elipse, la distancia entre los extremos de los ejes mayor y menor es igual a la distancia focal. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?
- 39) Determinar en la elipse $9x^2 + 5y^2 - 18x - 10y - 166 = 0$ dos puntos tales que su distancia al foco inferior de la elipse sea el doble de su distancia al foco superior.
- 40) Demostrar analíticamente que el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de una elipse trazadas por un extremo del eje mayor es una elipse.
- 41) Un punto se mueve de tal forma que su distancia al punto $P(0,9)$ es siempre igual a $\frac{3}{4}$ de su distancia a la recta $y - 16 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

LA HIPERBOLA

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos, tomada en valor absoluto, es constante.

En la figura se señalan los focos F y F' de una hipérbola y cuatro puntos $P_{1,2,3,4}$ de ella.

Se verifica en la gráfica que

$$\begin{aligned} |FP_1 - P_1F'| &= |FP_2 - P_2F'| = |FP_3 - P_3F'| = \\ &= |FP_4 - P_4F'| = \text{Constante} \end{aligned}$$

Llamaremos *distancia focal* a la que separa los focos y la designaremos por $2c$:

$$\text{Distancia focal} = d_{(F,F')} = 2c$$

Al punto medio del segmento FF' lo llamaremos *centro* de la elipse:

$$\text{Centro} = \text{punto medio de } FF'$$

Cada una de las porciones iguales en las que el centro divide la distancia focal recibe el nombre de *semidistancia focal*:

$$\text{Semidistancia focal} = \frac{1}{2} d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$$

Si situamos la hipérbola en un sistema de ejes coordenados de forma que el centro de aquella coincida con el origen de ésta y los focos estén sobre el eje de abscisas, las coordenadas de los focos serán, en virtud de lo anterior:

$$F(-c, 0) \text{ y } F'(c, 0)$$

Designaremos por $2a$ el valor absoluto de la diferencia de las distancias desde un punto $P(x, y)$ cualquiera de la hipérbola a los focos:

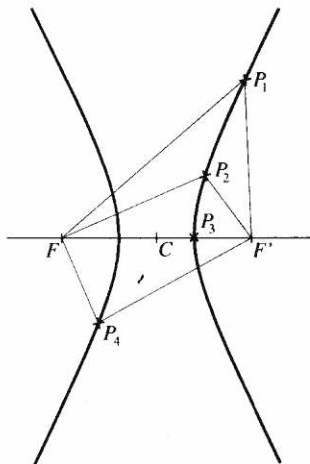
$$|d_{(F,P)} - d_{(F',P)}| = 2a \quad (I)$$

Ecuación de la hipérbola

La relación (I) expresa la condición que debe satisfacer todo punto que pertenezca al lugar geométrico: $d_{(F,P)} - d_{(F',P)} = 2a$

Calculando las distancias (prescindimos del símbolo de valor absoluto dado que posteriormente elevaremos repetidas veces al cuadrado):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



Pasando el segundo radical al miembros de la derecha y elevando al cuadrado:

$$(x+c)^2 + y^2 = \left[2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right]^2$$

Desarrollando:

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2$$

Reduciendo términos semejantes y simplificando:

$$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando nuevamente al cuadrado y desarrollando:

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$

$$x^2c^2 - 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Dividiendo todos los términos por $a^2(c^2 - a^2)$ obtenemos la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(c^2 - a^2)} = 1 \quad \text{(II)}$$

Haciendo

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{(III)}$$

(lo justificaremos a continuación) tenemos la ecuación de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{(IV)}$$

Por la definición de hipérbola tenemos que

$$|FP - PF| = 2a$$

Por otro lado

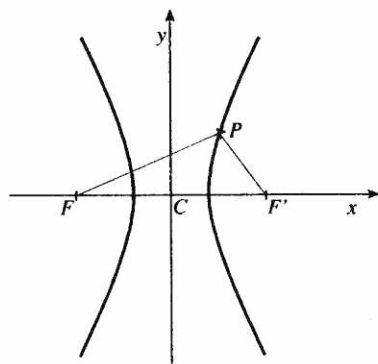
$$FF' = 2c \quad (\text{distancia focal})$$

Dado que todo lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos (geometría elemental), en el triángulo de la figura tenemos que

$$FF' > |FP - PF|$$

$$2c > 2a$$

$$c > a$$



De esta última expresión se desprende que $c^2 - a^2$ siempre será una cantidad positiva y podemos, por tanto, sustituirla por la expresión b^2 . Posteriormente constataremos la conveniencia de introducir esta expresión en la ecuación de la hipérbola.

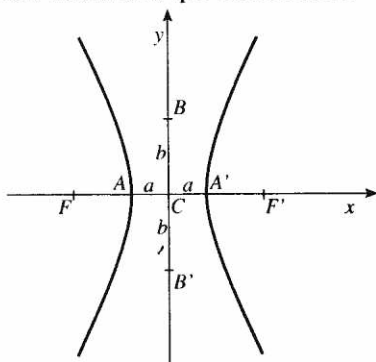
Llamaremos A y A' los puntos de intersección de la elipse y el eje de abscisas. Sus coordenadas son $A(-a,0)$ y $A'(a,0)$: se comprueba fácilmente que satisfacen la ecuación de la hipérbola.

A y A' se encuentran a una distancia a del centro y la distancia que las separa es $2a$.

Llamaremos *Eje real* (o *Eje transverso*) a esta distancia y *vértices del eje real* (o *transverso*) a los extremos A y A' :

$$\text{Eje real} = d_{(AA')} = 2a$$

$$\text{Vértices del eje real} = A \text{ y } A'$$



El centro de la hipérbola divide el eje real en dos porciones que reciben cada una el nombre de *Semieje real*.

$$\text{Semieje real} = \frac{1}{2} d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$$

Los focos F y F' se encuentran sobre la recta que contiene el eje real.

A una distancia b a ambos lados del centro señalaremos dos puntos B y B' .

La distancia entre estos puntos es $2b$ y se le designará con el nombre de *Eje imaginario* (o *Eje conjugado*). Los extremos B y B' se llamarán *vértices del eje imaginario* (o *conjugado*).

$$\text{Eje imaginario} = d_{(B,B')} = 2b$$

$$\text{Vértices del eje imaginario} = B \text{ y } B'$$

Cada una de las porciones que determina el centro sobre el eje imaginario recibe el nombre de *Semieje imaginario*:

$$\text{Semieje imaginario} = \frac{1}{2} d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$$

El centro es el punto medio de los ejes:

$$\text{Centro} = \text{Punto medio de } AA' = \text{Punto medio de } BB'$$

De la igualdad (III) obtenemos la relación entre los semiejes y la semidistancia focal:

$$\text{Relación entre } a, b \text{ y } c: c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{III})$$

Asíntotas de la hipérbola

Se dice que una recta es asíntota de una curva si los puntos de ésta, al alejarse indefinidamente del origen, se acercan cada vez más a la recta sin llegar a intersectarla nunca.

Veremos a continuación que la hipérbola tiene dos rectas asíntotas.

Consideremos una recta cualquiera que pase por el centro de la hipérbola y origen del sistema. Sea su ecuación:

$$y = mx$$

Busquemos las intersecciones de esa recta con la hipérbola resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} y = mx \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación el valor de y despejado en la primera:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx)^2}{b^2} = 1$$

Al despejar x se obtiene la siguiente igualdad:

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m^2} \quad (V)$$

Es obvio que x sólo adquiere valores reales si:

$$\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m^2} \geq 0$$

Y como el numerador de la fracción anterior siempre es positivo por tratarse de un cuadrado, para que la fracción entera sea positiva, el denominador también tiene que serlo:

$$b^2 - a^2 m^2 > 0$$

De donde:

$$m^2 < \frac{b^2}{a^2}$$

$$|m| < \frac{b}{a}$$

$$-\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}$$

Se concluye que la recta $y = mx$ sólo intersecta la hipérbola para valores de m comprendidos en el intervalo

$$\left(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right)$$

Si m toma los valores extremos, $-\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{a}$, tendremos dos rectas

$$y = \frac{b}{a} x \quad \text{y} \quad y = -\frac{b}{a} x \quad (VI)$$

que limitan el ángulo completo dentro del cual se desenvuelve la curva.

Además, si m toma esos valores, el denominador de la igualdad V se anula y el valor de la variable x tiende al infinito, dándose así la situación que describimos al hablar de asíntotas.

Las rectas anteriores (VI) son, pues, asíntotas de la hipérbola.

Las *asíntotas de la hipérbola* son dos rectas de pendientes $m = \pm \frac{b}{a}$ y que pasan por el centro de la misma.

Propiedades

1) El producto de las distancias de un punto cualquiera a las dos asíntotas es constante.

Algunos prefieren utilizar esta propiedad para definir la hipérbola. Desde este punto de vista, la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a dos rectas determinadas es constante.

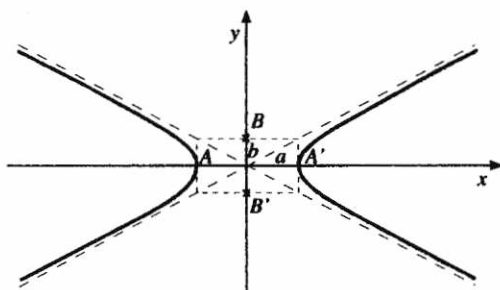
2) El producto de las pendientes de las rectas que unen los vértices del eje real de una hipérbola con un punto cualquiera de ésta es constante.

Rectángulo principal de la hipérbola

Las rectas perpendiculares a los ejes de la hipérbola en los vértices de ésta forman un rectángulo que recibe el nombre de *rectángulo principal*.

Las rectas que pasan por dos vértices opuestos del rectángulo tienen pendiente $\frac{b}{a}$ ó $-\frac{b}{a}$ y pasan por el centro de la hipérbola: son, por tanto, las asíntotas de la misma.

La construcción del rectángulo principal facilita el trazado de las asíntotas y éstas, el trazado de la hipérbola.



Puede constatarse ahora la conveniencia de haber introducido el concepto de eje imaginario y de vértices del eje imaginario.

Excentricidad de la hipérbola

Se le da el nombre de *excentricidad* a la relación entre la distancia focal y el eje real. Igual que en la elipse, se le designa por la letra e :

$$e = \frac{c}{a}$$

(VII)

Como en la hipérbola c es mayor que a , la fracción $\frac{c}{a}$ será siempre impropia y la excentricidad, por tanto, una fracción mayor que la unidad:

$$e > 1$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$ (III), podemos sustituir en VII y obtener esta otra igualdad:

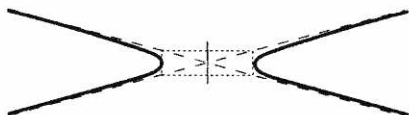
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

(VIII)

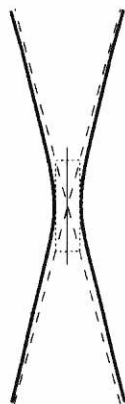
La excentricidad de una hipérbola caracteriza la forma de su rectángulo principal y de la misma hipérbola.

En la igualdad VIII podemos constatar que, si a es mucho mayor que b (el rectángulo principal se alargará en dirección del eje real, como puede apreciarse en la figura), el valor de la fracción $\frac{b}{a}$ será pequeño y el valor de la excentricidad se acercará a 1.



Si a y b son iguales, cosa que sucede en la hipérbola equilátera, que mencionaremos después, la fracción $\frac{b}{a}$ es igual a la unidad y el valor de la excentricidad es $\sqrt{2}$.

Si, por último, b es mucho mayor que a , el rectángulo principal se alargará en dirección del eje imaginario (ver figura) y el valor de la excentricidad se irá haciendo mayor.



Resumiendo:

Si el valor de la excentricidad es

$$1 < e < \sqrt{2}$$

las ramas de la hipérbola serán tanto más "achatas" cuanto menor sea el valor de e .

Si, en cambio,

$$e > \sqrt{2}$$

las ramas de la hipérbola estarán tanto más abiertas cuanto mayor sea el valor de e .

Directrices de la hipérbola

Son dos rectas perpendiculares al eje real y situadas a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro de la hipérbola. Sus ecuaciones, para la hipérbola con centro en el origen, son:

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

Como en la hipérbola $e > 1$, la fracción $\frac{a}{e}$ siempre es menor que a . En consecuencia, las directrices se encuentran una entre el centro y el vértice real A' y la otra, entre el centro y el vértice real A .

Las directrices de la hipérbola tienen, tal como vimos en el caso de la elipse, la siguiente propiedad: si r es la distancia de un punto cualquiera M de la hipérbola a uno de los focos y d la distancia de ese punto a la directriz correspondiente a tal foco, entonces la relación $\frac{r}{d}$ es igual a la excentricidad de la hipérbola:

$$\boxed{\frac{r}{d} = e}$$

Propiedad

Desde un punto cualquiera P de la hipérbola se traza un segmento PQ perpendicular al eje real. La abscisa de P es igual a la distancia entre C y Q , y su ordenada a la distancia entre P y Q :

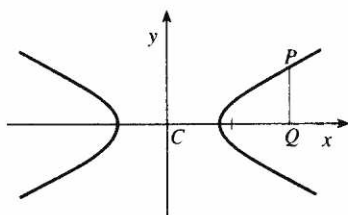
$$\text{Abscisa de } P = d_{(C,Q)}$$

$$\text{Ordenada de } P = d_{(P,Q)}$$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola, obtendremos (sustituyendo en la igualdad IV) ésta otra:

$$\boxed{\frac{[d_{(C,Q)}]^2}{a^2} - \frac{[d_{(P,Q)}]^2}{b^2} = 1}$$

(IX)



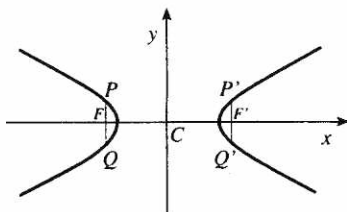
Lado recto de la hipérbola

Es la cuerda que pasa por uno de los focos y es perpendicular al eje real.

En la figura, PQ y $P'Q'$ son los lados rectos de la hipérbola y los focos son sus puntos medios.

Utilizando la propiedad IX y en forma análoga a la que empleamos con la elipse (pág. 489), podemos verificar fácilmente que la longitud del lado recto en la hipérbola es también

$$\boxed{PQ = P'Q' = \frac{2b^2}{a}}$$



Ecuación canónica de la hipérbola

En la figura se muestra una hipérbola cuyo centro es $C(x_0, y_0)$.

Desde un punto $P(x, y)$ cualquiera se traza una perpendicular PQ a la prolongación del eje real. El pie Q de la perpendicular tiene la misma abscisa x de P y la misma ordenada y_0 de C , siendo sus coordenadas, por tanto, $Q(x, y_0)$.

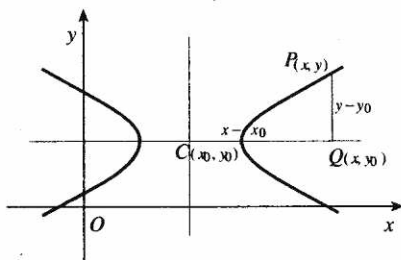
Por la propiedad (IX) podemos escribir:

$$\frac{[d_{(C,Q)}]^2}{a^2} - \frac{[d_{(P,Q)}]^2}{b^2} = 1$$

Pero $d_{(C,Q)} = x - x_0$ y $d_{(P,Q)} = y - y_0$. Sustituyendo en la igualdad anterior, tenemos la ecuación

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (X)$$

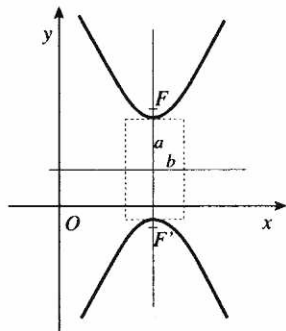
que es la ecuación canónica de una hipérbola de centro $C(x_0, y_0)$.



Hipérbola de eje real paralelo al eje de ordenadas

En el caso de que el eje real de la hipérbola sea paralelo al eje de ordenadas, la ecuación canónica se transforma (cosa fácilmente verificable) de esta forma:

$$-\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \quad (XI)$$



Observaciones:

- 1) La ecuación canónica de la hipérbola nos permite, como lo hacía la de la elipse, conocer por simple inspección la orientación de la misma: a^2 es, en la ecuación de la hipérbola, el *denominador de la fracción positiva*. Si ésta es la que contiene la variable x , el eje real es paralelo al de abscisas; si la fracción positiva es la que contiene la variable y , el eje real es paralelo al de ordenadas. (Nuevamente, por simple comodidad, hablaremos de *orientación horizontal* en el primer caso y de *orientación vertical* en el segundo).
- 2) A diferencia de la elipse, en la hipérbola el semieje real a no tiene que ser necesariamente mayor que el semieje imaginario b , pudiendo ser también igual o menor.

Hipérbola equilátera

Es aquella en la que los semiejes real e imaginario tienen igual longitud. Si una hipérbola es equilátera, su ecuación se transforma, al sustituir b por a , en una de las siguientes:

$$(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2 = a^2 \quad \text{ó} \quad -(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2$$

Propiedades

- 1) Las asíntotas de la hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí.
- 2) Como ya vimos, la excentricidad de la hipérbola equilátera es $e = \sqrt{2}$.

Hipérbolas conjugadas

Si en la hipérbola de ecuación canónica $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ (a)

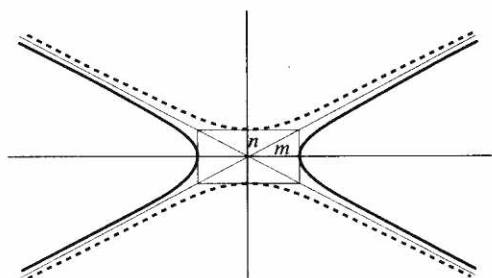
intercambiamos las variables x , y y los valores de los semiejes m y n , obtenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{n^2} - \frac{x^2}{m^2} = 1$$

que puede ser ordenada así:

$$-\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 \quad (b)$$

En estas condiciones, se dice que las hipérbolas de ecuaciones (a) y (b) son *conjugadas*.



Dos hipérbolas conjugadas comparten las mismas asíntotas.

En la figura están representadas la hipérbola de ecuación (a) con línea continua y la de ecuación (b) con línea a trazos.

Propiedad

La hipérbola conjugada de una hipérbola equilátera es también equilátera.

Ecuación de las asíntotas a partir de la ecuación canónica de la hipérbola

Si en la ecuación canónica de la hipérbola (X y XI) se anula el miembro de la derecha, se obtienen las ecuaciones de las asíntotas.

Sea la hipérbola de ecuación

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (X)$$

Anulamos el miembro de la derecha:

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0} \quad (XII)$$

Eliminando denominadores:

$$b^2(x - x_0)^2 - a^2(y - y_0)^2 = 0$$

Despejando el segundo término:

$$a^2(y - y_0)^2 = b^2(x - x_0)^2$$

Sacando raíz cuadrada:

$$a(y - y_0) = \pm b(x - x_0)$$

Dividiendo por a :

$$(y - y_0) = \pm \frac{b}{a}(x - x_0)$$

La expresión obtenida corresponde a las ecuaciones de dos rectas de pendientes $\pm \frac{b}{a}$ y que pasan por (x_0, y_0) y estas son, precisamente, las características de las asíntotas.

Idéntico resultado se obtiene si, en lugar de utilizar (X), utilizamos (XI).

En conclusión, al igualar a cero el miembro de la izquierda de la ecuación canónica de la hipérbola, se obtienen las ecuaciones de sus asíntotas.

Tangente a una hipérbola en el punto $P(x_1, y_1)$

Mediante un proceso análogo al que realizamos en el caso de la elipse (pág. 491) y que no repetiremos aquí, se deduce que la pendiente de la tangente a una hipérbola en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$m = \frac{b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$$

(si la hipérbola es horizontal)

o

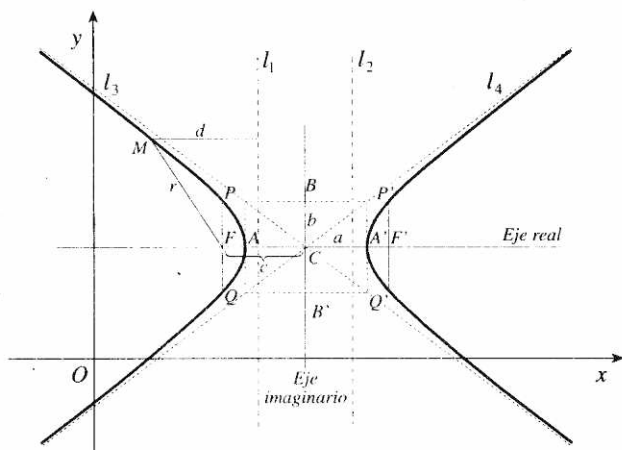
$$m = \frac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$$

(si la hipérbola es vertical)

Resumen

Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos (tomada en valor absoluto) es constante.



Elementos

Centro:	$C(x_0, y_0)$	
Focos:	F y F' (se encuentran sobre el eje real)	
Vértices:	A, A', B y B'	
Eje real:	$d_{(AA')} = 2a$	
Semieje real:	$\frac{1}{2} d_{(A,A')} = d_{(A,C)} = d_{(A',C)} = a$	(52 ^G)
Eje Imaginario:	$d_{(B,B')} = 2b$	
Semieje imaginario:	$\frac{1}{2} d_{(B,B')} = d_{(B,C)} = d_{(B',C)} = b$	(53 ^G)
Distancia focal:	$d_{(F,F')} = 2c$	
Semidistancia focal:	$\frac{1}{2} d_{(F,F')} = d_{(F,C)} = d_{(F',C)} = c$	(54 ^G)
Directrices:	l_1 y l_2	
Asíntotas:	l_3 y l_4	
Lados rectos:	PQ y $P'Q'$	
Excentricidad:	$e = \frac{c}{a} = \frac{r}{d} \quad (e > 1)$	(55 ^G)
Relación entre a, b y c:	$c^2 = a^2 + b^2$	(56 ^G)

Ecuación canónica de la hipérbola

Caso I (Eje real horizontal)		Caso II (Eje real vertical)	
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$	(57 ^G)	$-\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$	(57a ^G)

Nota: en la ecuación de la hipérbola, a^2 es siempre el denominador de la fracción positiva.

Coordenadas del Centro: C es el punto medio de AA' , BB' y FF'

Coordenadas de los vértices y de los focos:

Caso I	Caso II
de A y A' : $(x_0 \pm a, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm a)$
de F y F' : $(x_0 \pm c, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm c)$
de B y B' : $(x_0, y_0 \pm b)$	$(x_0 \pm b, y_0)$

(58^G)

(58a^G)

Ecuaciones de las directrices:

Caso I	Caso II
$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$	$y = y_0 \pm \frac{a}{e}$

(59^G)

(59a^G)

Pendientes de las asíntotas:

Caso I	Caso II
$m = \pm \frac{b}{a}$	$m = \pm \frac{a}{b}$

(60^G)

(60a^G)

Longitud del lado recto:

$$d_{(P,Q)} = d_{(P',Q')} = \frac{2b^2}{a} \quad (61^G)$$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I		Caso II
$m = \frac{-b^2(x_1 - x_0)}{a^2(y_1 - y_0)}$	(62 ^G)	$m = \frac{a^2(x_1 - x_0)}{b^2(y_1 - y_0)}$

Nota: en los ejercicios que siguen, al decir "*hacer el estudio completo*" de una hipérbola nos referiremos a señalar los siguientes aspectos:

Centro	Coordenadas de vértices y focos
Semiejes	Excentricidad
Orientación	Ecuaciones de las directrices
Representación gráfica	Ecuaciones de las asíntotas
Semidistancia focal	Longitud del lado recto

Ecuación general de la hipérbola

Si desarrollamos la ecuación canónica de la hipérbola (57^G), eliminamos los denominadores y reducimos términos semejantes, obtenemos una ecuación de la forma

$$Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0 \quad (63^G)$$

que llamaremos *Ecuación General* de la hipérbola.

Característica de la ecuación general de la hipérbola es que los términos cuadráticos son de signo opuesto:

$$(\text{Signo de } A) = -(\text{Signo de } B)$$

Estudio de la hipérbola a partir de la ecuación general

Tal como se hizo con la elipse, se lleva primero la ecuación a la forma canónica mediante el método de completación de cuadrados. La ecuación canónica proporciona los elementos necesarios para hacer el estudio de la hipérbola.

Ejemplo 26

Hacer el estudio completo de la hipérbola $2x^2 - 3y^2 + 20x + 12y + 20 = 0$.

Llevamos primero la ecuación a la forma canónica:

Agrupando por variables: $2x^2 + 20x - 3y^2 + 12y = -20$

Sacando factor común A y $-B$, respectivamente, en cada $2(x^2 + 10x) - 3(y^2 - 4y) = -20$

grupo:

$$2hx = 10x$$

$$2ky = -4y$$

$$h = 5$$

$$k = -2$$

$$h^2 = 25$$

$$k^2 = 4$$

Sumando a ambos miembros

$$2(x^2 + 10x + 25) - 3(y^2 - 4y + 4) = -20 + 50 - 12$$

Factorizando:

$$2(x+5)^2 - 3(y-2)^2 = 18$$

Dividiendo todos los términos por 18 para obtener 1 en el miembro de la derecha y simplificando:

$$\frac{(x+5)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

ESTUDIO DE LA HIPÉRBOLA

Centro

$$C(-5, 2)$$

Semieje real (a^2 es el denominador de la fracción positiva):

$$a^2 = 9$$

$$a = 3$$

Semieje imaginario:

$$b^2 = 6$$

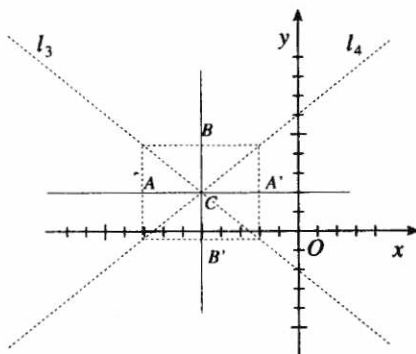
$$b = \sqrt{6} \approx 2,4$$

Orientación:

Horizontal

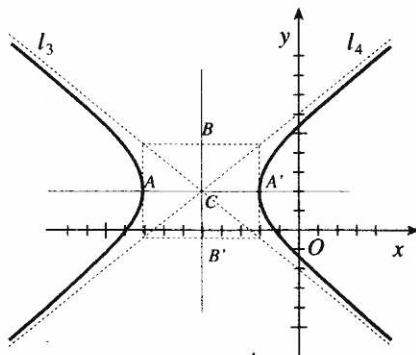
Representación Gráfica

Señalamos en el gráfico el centro; los vértices A y A' a una distancia a del centro y sobre el eje real (horizontal); los vértices B y B' a una distancia b del centro sobre el eje imaginario; el rectángulo principal de la hipérbola y, a través de los vértices opuestos del rectángulo principal, las asíntotas l_3 y l_4 .



Ya tenemos las guías para trazar las dos ramas de la hipérbola: la rama de la izquierda viene desde el infinito separándose muy poco a poco de la asíntota l_3 ,

pasa por el vértice A y, cambiando dirección, comienza a acercarse a la asíntota l_4 . La rama de la derecha hace un recorrido simétrico (como reflejado en un espejo) y pasando por A' .



Semidistancia focal: (56^o):

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 6 = 15$$

$$c = \sqrt{15} \cong 3,9$$

Vértices del eje real y focos: tienen la misma ordenada del centro; sus abscisas se calculan mediante (58^o):

$$A(-8, 2), \quad F(-5 - \sqrt{15}, 2)$$

$$A'(-2, 2), \quad F(-5 + \sqrt{15}, 2)$$

Vértices del eje imaginario: tienen la misma abscisa del centro; sus ordenadas se calculan mediante (58^o):

$$B(-5, 2 + \sqrt{6}), \quad B'(-5, 2 - \sqrt{6})$$

Excentricidad: (55^o):

$$e = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Directrices: Se encuentran a una distancia $\frac{a}{e}$ del centro:

$$\frac{a}{e} = \frac{3}{\frac{\sqrt{15}}{3}} = \frac{3\sqrt{15}}{5} \quad (\cong 2,3)$$

Sus ecuaciones son (59^o):

$$x = -5 \pm \frac{3\sqrt{15}}{5}$$

$$l_1 \equiv 5x + 25 + 3\sqrt{15} = 0$$

$$l_2 \equiv 5x + 25 - 3\sqrt{15} = 0$$

Asíntotas: sus pendientes son (60^o):

$$m = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Como pasan por el centro, sus ecuaciones serán:

$$y - 2 = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}(x + 5)$$

Primera asíntota:

$$3y - 6 = -\sqrt{6}x - 5\sqrt{6}$$

$$l_3 \equiv \sqrt{6}x + 3y - 6 + 5\sqrt{6} = 0$$

Segunda asíntota:

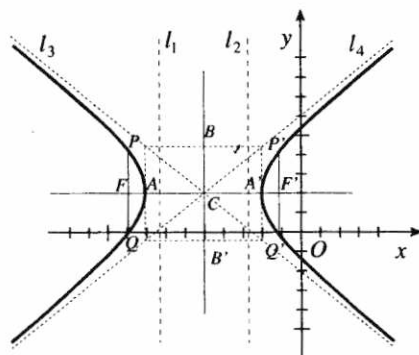
$$3y - 6 = \sqrt{6}x + 5\sqrt{6}$$

$$l_4 \equiv \sqrt{6}x - 3y + 6 + 5\sqrt{6} = 0$$

Lado Recto: mediante (61^o):

$$PQ = P'Q = 4$$

Incluimos en el gráfico los últimos elementos que hemos hallado:



Ejemplo 27

Hacer el estudio completo de la hipérbola $x^2 - 3y^2 - 8x - 42y - 101 = 0$.

Llevamos primero la ecuación a la forma canónica:

Agrupando por variables y sacando factor común A y -B, respectivamente, en cada grupo:

$$(x^2 - 8x) - 3(y^2 + 14y) = 101$$

$$2hx = -8x \quad 2ky = 14y$$

$$h = -4 \quad k = 7$$

$$h^2 = 16 \quad k^2 = 49$$

Sumando a ambos miembros

$$(x^2 - 8x + 16) - 3(y^2 + 14y + 49) = 101 + 16 - 147$$

Factorizando:

$$(x - 4)^2 - 3(y + 7)^2 = -30$$

Dividiendo todos los términos por -30 para obtener 1 en el miembro de la derecha y simplificando:

$$-\frac{(x - 4)^2}{30} + \frac{(y + 7)^2}{10} = 1$$

ESTUDIO DE LA HIPÉRBOLA

Centro

$$C(4, -7)$$

Semieje real (a^2 es el denominador de la fracción positiva):

$$a^2 = 10$$

$$a = \sqrt{10} \cong 3,2$$

Semieje imaginario:

$$b^2 = 30$$

$$b = \sqrt{30} \cong 5,5$$

Orientación:

Vertical

Representación Gráfica

Señalamos en el gráfico:

El centro

Los ejes (el real es vertical)

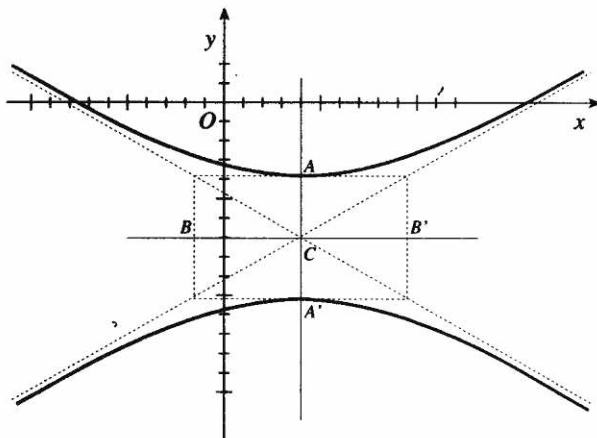
Los vértices A y A' a una distancia a del centro y sobre el eje real

Los vértices B y B' a una distancia b del centro sobre el eje imaginario

El rectángulo principal

Las asíntotas

Trazamos, finalmente, las ramas de la hipérbola que, en esta ocasión, se abren hacia arriba y hacia abajo por ser el eje real vertical.



Semidistancia focal: (56^o):

$$c^2 = 10 + 30 = 40$$

$$c = 2\sqrt{10} \cong 6,3$$

Vértices del eje real y focos: utilizando (58^a):

$$A(4, -7 + \sqrt{10}) \quad F(4, -7 + 2\sqrt{10})$$

$$A'(4, -7 - \sqrt{10}) \quad F(4, -7 - 2\sqrt{10})$$

Vértices del eje imaginario: (58^a):

$$B(4 - \sqrt{30}, -7) \quad B'(4 + \sqrt{30}, -7)$$

Excentricidad: (55^o):

$$e = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 2$$

Directrices: (59^a):

$$\frac{a}{e} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\cong 1,6)$$

Sus ecuaciones son (59^a):

$$y = -7 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$l_1 \cong 2y + 14 - \sqrt{10} = 0$$

$$l_2 \cong 2y + 14 + \sqrt{10} = 0$$

Asíntotas: sus pendientes
son (60°):

$$m = \pm \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{30}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ecuaciones:

$$y + 7 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 4)$$

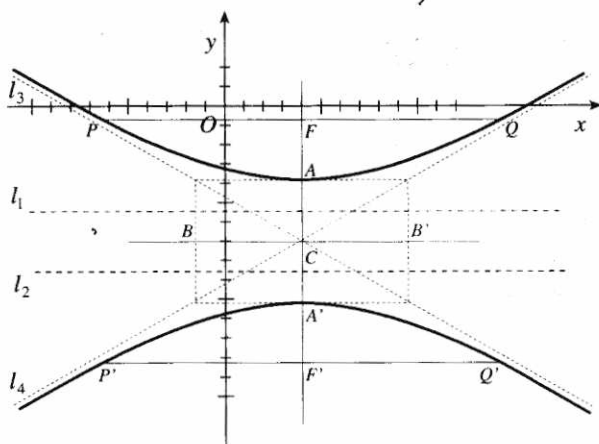
$$l_3 \equiv \sqrt{3}x + 3y + 21 - 4\sqrt{3} = 0$$

$$l_4 \equiv \sqrt{3}x - 3y - 21 - 4\sqrt{3} = 0$$

Lado recto:

$$PQ = P'Q' = 6\sqrt{10}$$

Gráfico final



Ejercicio 127

Hacer el estudio completo de las siguientes hipérbolas:

- 1) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$
- 2) $4x^2 - 25y^2 + 200y - 500 = 0$
- 3) $5x^2 - 9y^2 + 10x - 36y - 14 = 0$
- 4) $x^2 - 4y^2 - 10x + 29 = 0$
- 5) $4x^2 - 9y^2 - 56x + 198y - 929 = 0$
- 6) $2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 26 = 0$
- 7) $2x^2 - 3y^2 + 12y + 6 = 0$
- 8) $x^2 - y^2 + 4 = 0$
- 9) $36x^2 - 25y^2 + 288x - 250y - 949 = 0$
- 10) $9x^2 - 4y^2 + 90x + 48y + 117 = 0$
- 11) $x^2 - 2y^2 + 4x + 12y + 2 = 0$

$$(12) \quad 3x^2 - 5y^2 + 12x + 30y - 63 = 0$$

$$13) \quad 2x^2 - y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$$

$$14) \quad 18x^2 - y^2 - 36x - 18 = 0$$

$$15) \quad x^2 - y^2 + 6x + 18y - 65 = 0$$

$$16) \quad 27x^2 - 20y^2 - 36 = 0$$

$$17) \quad 400x^2 - 144y^2 - 400x + 216y + 919 = 0$$

$$18) \quad 18x^2 - 36y^2 + 12x + 12y - 431 = 0$$

Ejercicio 128

En cada uno de los siguientes ejercicios se dan datos de una hipérbola. Hallar en cada caso su ecuación general.

$$1) \quad A(1, 5); \quad B(3, 2); \quad C(1, 2)$$

$$2) \quad A(-6, -3); \quad B(-2, -1); \quad B'(-2, -5)$$

$$3) \quad B(-2, 3); \quad B'(-2, -5); \quad F(1, -1)$$

$$4) \quad B(1, 2); \quad C(3, 2); \quad \text{Semidistancia focal} = 2\sqrt{5}$$

$$5) \quad B(-2, -2); \quad B'(8, -2); \quad e = \frac{6\sqrt{11}}{11}$$

$$6) \quad A(2, -4); \quad C(2, 3); \quad F(2, 3 - \sqrt{58})$$

$$7) \quad F(-4, 1); \quad F'(6, 1); \quad \text{Eje imaginario} = 8$$

$$(8) \quad A(-2, -1); \quad A'(4, -1); \quad B(1, 1)$$

$$9) \quad C(2, 1); \quad e = \frac{3}{2}; \quad \text{Eje imaginario (horizontal)} = 4\sqrt{5}$$

$$(10) \quad A(0, 2); \quad A'(6, 2); \quad e = \frac{5}{3}$$

$$11) \quad e = \sqrt{5}; \quad \text{pasa por } P(-3, 2); \quad \text{los ejes coinciden con los ejes coordenados}$$

$$12) \quad \text{Pasa por } P(3, 4) \text{ y } Q(-5, 6); \quad \text{los ejes coinciden con los ejes coordenados}$$

$$13) \quad C(-5, -2); \quad \text{pasa por } P(-1, 0) \text{ y } Q(1, 5); \quad \text{Eje real horizontal}$$

$$14) \quad C(1, -1); \quad \text{pasa por } P(2, 3) \text{ y } Q(4, 4); \quad \text{Eje real vertical}$$

$$15) \quad F(-7, -1); \quad F'(5, -1); \quad \text{una de las directrices es } l_1 \equiv 3x - 5 = 0$$

$$16) \quad A(-2, 5); \quad A'(-2, 1); \quad \text{una de las directrices es } l_1 \equiv 5y - 11 = 0$$

$$17) \quad A(2, 4); \quad C(2, 1); \quad \text{pasa por } P(4, 3\sqrt{2} + 1)$$

$$18) \quad A(-1, 1); \quad B(3, -2); \quad \text{una de las directrices es } l_1 \equiv 5y + 1 = 0$$

$$19) \quad F(2, 4); \quad F'(2, -2); \quad \text{Lado recto} = 5$$

$$20) \quad A(-2, 4); \quad C(0, 4); \quad \text{Lado recto} = 12$$

$$21) \quad B(-3, -3); \quad B'(1, -3); \quad \text{Lado recto} = 2$$

- 22) $C(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$; Lado recto = 10; Distancia focal = 12; Orientación horizontal
- 23) $F(-9, -2)$; los extremos de un lado recto son $P'(3, 3)$ y $Q'(3, -7)$
- 24) El rectángulo principal está formado por las rectas $x - 2 = 0$; $y - 4 = 0$; $x - 5 = 0$; $y + 1 = 0$
- 25) $C(\frac{5}{2}, 0)$; los extremos de un lado recto son $P(1, 3\sqrt{5})$ y $Q(4, 3\sqrt{5})$
- 26) $C(-3, -9)$; $e = \sqrt{3}$; una directriz es $l_1 \equiv x + 5 = 0$
- 27) El centro está sobre la recta $l \equiv x - 2 = 0$; las directrices son $l_1 \equiv y + 4 = 0$ y $l_2 \equiv y + 6 = 0$
- 28) $C(3, 0)$; directrices: $l_{1,2} \equiv y \pm 1 = 0$; pasa por $M(9, 4)$
- 29) $A(-3, 0)$; las asíntotas son $l_{3,4} \equiv 2x \pm 3y = 0$
- 30) $B(1, 5)$; las asíntotas son $l_3 \equiv 2x - 5y + 13 = 0$ y $l_4 \equiv 2x + 5y - 7 = 0$
- 31) Las asíntotas son $l_{3,4} \equiv 2x \pm y \mp 2 = 0$; la distancia focal es $4\sqrt{5}$; el eje real es vertical
- 32) $F(6, 4)$; las asíntotas son $l_3 \equiv 4x - 3y - 27 = 0$ y $l_4 \equiv 4x + 3y - 21 = 0$
- 33) Una directriz es $l_2 \equiv 13x - 131 = 0$; las asíntotas son $l_3 \equiv 5x - 12y - 31 = 0$ y $l_4 \equiv 5x + 12y + 41 = 0$
- 34) Una directriz es $l_1 \equiv 17y - 81 = 0$; las asíntotas son $l_{3,4} \equiv 8x \pm 15y \mp 15 = 0$
- 35) Las asíntotas son $l_3 \equiv x - y + 8 = 0$ y $l_4 \equiv x + y - 2 = 0$; la hipérbola pasa por $P(0, 4)$
- 36) Las asíntotas son $l_3 \equiv 3x - 2y + 1 = 0$ y $l_4 \equiv 3x + 2y - 7 = 0$; la hipérbola pasa por $P(6, 5)$
- 37) $A(5, 2)$; $C(5, -4)$; pasa por $P(4, 8)$
- 38) $A(2, -3)$; $C(-2, -3)$; una asíntota es $l_3 \equiv x - 4y - 10 = 0$
- 39) Las asíntotas son $l_3 \equiv x - 2y - 6 = 0$ y $l_4 \equiv x + 2y - 10 = 0$; Lado recto = 6
- 40) $C(1, 5)$; $F(-1, 5)$; una asíntota es $l_3 \equiv \sqrt{3}x - 2y + 10 - \sqrt{3} = 0$
- 41) $C(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$; la hipérbola es equilátera con orientación horizontal; el lado recto mide 6
- 42) $C(3, 4)$; el eje imaginario es 4 unidades mayor que el eje real; los lados rectos son paralelos al eje de ordenadas y miden 18 cada uno.
- 43) $C(1, -2)$; el eje real es 3 unidades mayor que el imaginario; los vértices reales están sobre la recta $l_0 \equiv y + 2 = 0$; el lado recto mide $\frac{8}{5}$
- 44) $A(5, 0)$; Centro en el origen; pasa por $P(6, 1)$
- 45) $C(2, -3)$; $A'(2, -8)$; pasa por $P(0, 3)$
- 46) $C(2, -2)$; pasa por $P(3, 1)$ y $Q(6, 4)$; eje real vertical

- 47) $C(2,1)$; pasa por $P(-3,5)$ y $Q(-1,2)$; eje real horizontal
- 48) $C(-2,3)$; $F(3,3)$; una de las asíntotas pasa por $P(6,9)$
- 49) Las directrices son $l_1 \equiv x - 2 = 0$ y $l_2 \equiv x - 6 = 0$; el centro está sobre la recta $l \equiv x + 5y - 19 = 0$; $e = \sqrt{3}$
- 50) Las rectas que contienen el eje real y el eje imaginario son, respectivamente, $x - 2 = 0$ y $y - 4 = 0$; una asíntota pasa por $P(0,2)$; $2c = 6\sqrt{2}$
- 51) $C(4,-3)$; pasa por $P(1,-1)$; eje real horizontal; lado recto = $\frac{8\sqrt{6}}{3}$
- 52) $C(5,2)$; la hipérbola es equilátera; pasa por $P(1,5)$ y su eje real es horizontal
- 53) $A(-1,-1)$; $C(-1,-3)$; los vértices reales equidistan del centro y del foco correspondiente
- 54) $C(-5,2)$; $F(-1,2)$; la distancia entre las directrices es $\frac{9}{2}$
- 55) $C(2,4)$; eje imaginario (horizontal) = $4\sqrt{3}$; la distancia entre las directrices es 2
- 56) $C(3,1)$; $e = \frac{4}{3}$; distancia entre las directrices = 9; eje real horizontal
- 57) Las asíntotas son $l_3 \equiv x - 3y + 1 = 0$ y $l_4 \equiv x + 3y + 7 = 0$; la distancia entre las directrices es $\frac{\sqrt{10}}{5}$; el eje imaginario es horizontal
- 58) $C(1,2)$; $F(1,-4)$; la hipérbola es equilátera.
- 59) $F(-3,7)$; $F'(-3,1)$; las asíntotas forman entre sí un ángulo de 90°

Ejercicio 129

- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $(-2,2)$ y $(8,2)$ es 4.
- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a las rectas $l_1 \equiv 3x - 4y = 0$ y $l_2 \equiv 3x + 4y - 24 = 0$ es siempre $\frac{144}{25}$ y verificar que se trata de una hipérbola.
- Un punto se mueve de tal forma que el producto de las pendientes de las rectas que lo unen a los puntos $(-2\sqrt{6}, 0)$ y $(2\sqrt{6}, 0)$ es siempre igual a $\frac{5}{4}$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos de plano cuya diferencia de distancias a los puntos $(-2,3)$ y $(6,3)$ es siempre igual a 1.
- Un punto se mueve de tal forma que su distancia al punto $P(8,2)$ es siempre el doble de su distancia a la recta $l \equiv x - 2 = 0$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- ¿Cuál es el ángulo que forman las asíntotas de una hipérbola (el ángulo cuya bisectriz es el eje real) si la excentricidad de la hipérbola es $e = 1,5$?

- 7) ¿Y si la excentricidad es $e = \frac{5}{3}$?
- 8) ¿Y si la excentricidad es $e = \sqrt{2}$?
- 9) ¿Y si la excentricidad es $e = 1,002$?
- 10) Hallar las intersecciones de la bisectriz del 1º y 3º cuadrantes con las asíntotas de la hipérbola $2x^2 - y^2 - 12x - 2y + 7 = 0$.
- 11) Hallar la distancia del foco superior de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 + 36x + 108 = 0$ a una cualquiera de sus asíntotas.
- 12) Hallar las coordenadas del punto de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ cuya distancia al foco izquierdo es el doble de la distancia al derecho.
- 13) Hallar los puntos de intersección de la hipérbola $2x^2 - y^2 - 4 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.
- 14) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuyo producto de distancias a las rectas $2x - 3y - 8 = 0$ y $2x + 3y + 4 = 0$ es $-\frac{36}{13}$.
- 15) Un punto se mueve de tal forma que el producto de las pendientes de las rectas que lo unen a los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(4, 5)$ es siempre igual a 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- 16) Un punto se mueve de tal forma que el producto de las pendientes de las rectas que lo unen a los puntos $P(-\sqrt{5}, \sqrt{2})$ y $Q(\sqrt{5}, -\sqrt{2})$ es siempre igual a $\frac{2}{3}$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- 17) Calcular el área del triángulo que forman las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$ y la recta $l \equiv 9x + 2y - 24 = 0$.
- 18) Un punto P de una hipérbola de excentricidad $\frac{6}{5}$ está a una distancia de 9 unidades del foco más cercano. ¿A qué distancia está el punto de la directriz correspondiente?
- 19) Calcular la distancia de los puntos de abscisa $\frac{9}{2}$ a la directriz más cercana en la hipérbola de centro $C(-2, 2)$, foco en $F(4, 2)$ y excentricidad $e = 2$.
- 20) Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 20 = 0$ que son paralelas a la recta $l \equiv 3x - 4y + 19 = 0$.
- 21) Hallar las ecuaciones de las rectas paralelas a $l \equiv 4x - 2y + 7 = 0$ y que son tangentes a la hipérbola $2x^2 - 3y^2 + 12x - 6y - 45 = 0$.
- 22) Hallar las ecuaciones de las rectas perpendiculares a $l \equiv 15x - 5y + 4 = 0$ y que son tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 - 4x - 12y = 0$.
- 23) Determinar en cada rama de la hipérbola $7x^2 - y^2 - 4y - 67 = 0$ cuál es el punto más cercano a la recta $l \equiv 4x + y - 1 = 0$ y calcular la distancia que separa esos puntos de la recta.
- 24) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $M(2, -4)$ a la hipérbola $3x^2 - 2y^2 - 18x - 4y - 5 = 0$.

- 25) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $M(-9, 3)$ a la hipérbola $x^2 - y^2 + 4x + 4y + 16 = 0$ y el ángulo agudo que forman entre sí.
- 26) Desde el punto $M(-7, 3)$ se trazan tangentes a cada una de las ramas de la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 6x + 8y + 15 = 0$; determinar las ecuaciones de las tangentes y la distancia que separa los dos puntos de tangencia.
- 27) Una hipérbola de eje real horizontal y centro en $C(-3, -1)$ pasa por el punto $P(0, 2)$ y es tangente a la recta $l \equiv 3x - y + 14 = 0$. Hallar su ecuación.
- 28) Una hipérbola de eje imaginario horizontal y centro en $C(-1, 2)$ pasa por el punto $P(4, -4)$ y es tangente a la recta $l \equiv 5x + 7y - 26 = 0$. Hallar su ecuación.
- 29) Una hipérbola de eje real vertical y centro en $C(1, -2)$ es tangente a las rectas $l_1 \equiv x - 3y = 0$ y $l_2 \equiv 3x + 5y + 14 = 0$. Hallar su ecuación.
- 30) Hallar la ecuación general de la hipérbola que tiene sus focos en $F(-5, 3)$ y $F'(1, 3)$ y es tangente a la recta $l \equiv 2x - y + 3 = 0$.
- 31) Hallar la ecuación general de la hipérbola que tiene sus vértices en $A(-5, 0)$ y $A'(1, 0)$ y es tangente a la recta $l \equiv 4x - y - 1 = 0$.
- 32) Demostrar que si e_1 y e_2 son las excentricidades de dos hipérbolas conjugadas, entonces $(e_1)^2 + (e_2)^2 = (e_1 \cdot e_2)^2$.
- 33) Demostrar que una asíntota, una directriz y la recta trazada por el foco correspondiente y perpendicular a la asíntota concurren en un punto.
- 34) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las abscisas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.
- 35) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de las ordenadas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$.
- 36) Dadas las ecuaciones
$$\begin{cases} x = a \sec \alpha \\ y = b \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$
 demostrar que esas son las ecuaciones de una hipérbola.
- 37) Demostrar que los focos de un par de hipérbolas conjugadas son concíclicos.
- 38) Demostrar que la distancia de un foco de la hipérbola a una cualquiera de sus asíntotas es igual al semieje imaginario.
- 39) Un observador estacionado en el punto P oye el estampido de un rifle y el golpe de la bala sobre el objetivo en el mismo instante. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola.
- 40) Hallar la dependencia entre la excentricidad de la hipérbola y el ángulo que forma la asíntota con el eje real.
- 41) Por un punto cualquiera de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se trazan rectas paralelas a las asíntotas. Demostrar que el área del paralelogramo limitado por las asíntotas y las rectas trazadas es $\frac{1}{2}ab$.

- 42) Sea P el punto de intersección con el eje de abscisas de una tangente cualquiera a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; sea Q el pie de la perpendicular trazada sobre el mismo eje desde el punto de tangencia y O el origen del sistema. Demostrar que $OP \cdot OQ = a^2$.
- 43) Demostrar que el producto de las distancias de los focos de una hipérbola a cualquier tangente es igual a b^2 .
- 44) Demostrar que el punto de tangencia es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las dos asíntotas.
- 45) Demostrar que la pendiente de la tangente a una hipérbola en cualquier extremo de cualquier lado recto es igual a la excentricidad de la hipérbola.

LA PARABOLA

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto llamado *foco* y una recta llamada *directriz*.

En la figura se señalan el foco F y la directriz l de una parábola y cuatro puntos $P_{1,2,3,4}$ de ella.

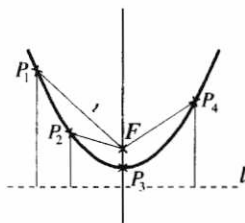
Se verifica en la gráfica que

$$d_{(P_1, F)} = d_{(P_1, l)}$$

$$d_{(P_2, F)} = d_{(P_2, l)}$$

$$d_{(P_3, F)} = d_{(P_3, l)}$$

$$d_{(P_4, F)} = d_{(P_4, l)}$$



Llamaremos *Eje de simetría* o, simplemente, *Eje de la parábola* a la perpendicular a la directriz trazada por el foco.

Llamaremos *Vértice* de la parábola al punto en el que el eje intersecta la parábola. En la figura anterior el punto P_3 es el vértice de la parábola. Designaremos el vértice con la letra V .

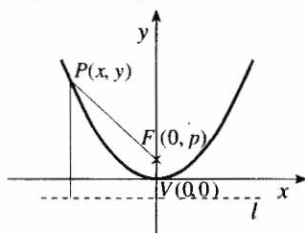
Llamaremos *Parámetro* a la distancia del foco al vértice y lo designaremos por $p^\dagger$

$$\text{Parámetro} = d_{(F, V)} = p$$

Si elegimos el eje de ordenadas como el eje de la parábola y el origen del sistema como vértice de la misma, tendremos la parábola ubicada como se muestra en la figura.

El foco está a una distancia p del vértice, por lo que sus coordenadas son $F(0, p)$.

La directriz es una recta paralela al eje de abscisas que está a una distancia p de ella. Su ecuación es, entonces, $l \equiv y + p = 0$.



Ecuación de la parábola

La condición que, por definición, debe satisfacer todo punto $P(x, y)$ de la parábola es que su distancia al foco debe ser igual a su distancia a la directriz: $d_{(P, F)} = d_{(P, l)}$

Calculando las distancias:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p$$

[†] En algunos textos se le da el nombre de *parámetro* a la distancia desde el foco hasta la directriz y se le designa también por p . Esto hace que en las fórmulas y relaciones haya aparentes diferencias. Es importante, por tanto, que al usar fórmulas que contengan p se verifique primero qué se entiende por parámetro.

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

Desarrollando:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

Reduciendo términos semejantes:

$$x^2 = 4py$$

(I)

Si invertimos las posiciones del foco y de la directriz, obtenemos, mediante un proceso análogo, la ecuación

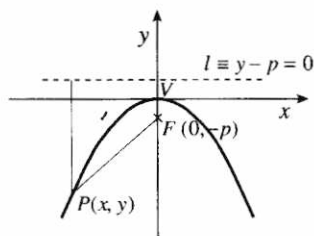
$$x^2 = -4py$$

(II)

Las igualdades (I) y (II) son, en definitiva, las ecuaciones de una parábola:

Si, como en (I), $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y su vértice es el punto de menor ordenada.

Si, por el contrario, como en (II), $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo y el vértice es el punto de máxima ordenada.



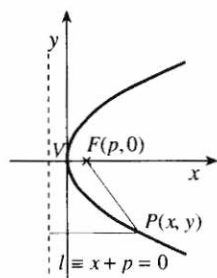
Parábola de eje paralelo al de abscisas

Si elegimos el eje de abscisas como eje de la parábola, vértice en el origen, foco a una distancia p del vértice en $F(p, 0)$ y directriz paralela al eje de ordenadas y de ecuación $x + p = 0$, tendremos la parábola de la figura.

Efectuando el mismo proceso por el que obtuvimos las ecuaciones (I) y (II), obtendremos la igualdad

$$y^2 = 4px$$

(III)



Invertiendo las posiciones relativas del foco y de la directriz (ver figura) se obtiene

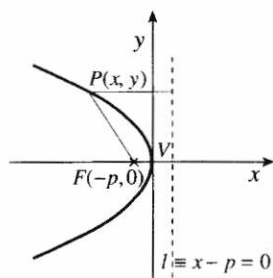
$$y^2 = -4px$$

(IV)

Las igualdades (III) y (IV) corresponden, pues, a parábolas de eje paralelo al de abscisas.

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha y su vértice es el punto de menor abscisa.

Si, por el contrario, $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda y su vértice es el punto de máxima abscisa.



Excentricidad de la parábola

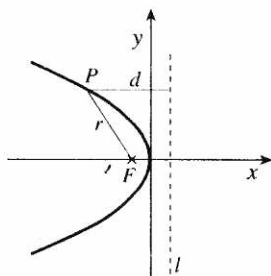
Dado que la parábola, a diferencia de las otras cónicas, carece de centro, no podemos hablar de distancia focal ni de longitud de ejes. La relación, por tanto, $e = \frac{c}{a}$ que hemos utilizado hasta ahora para determinar la excentricidad no nos es útil en esta oportunidad.

Sin embargo, hemos visto, al estudiar la elipse y la hipérbola, que la excentricidad es también la relación entre la distancia de un punto de la curva al foco y la distancia de ese mismo punto a la directriz:

$$e = \frac{r}{d}$$

Pero en la parábola, por definición, todo punto equidista del foco y de la directriz, siendo $r = d$. En consecuencia, la excentricidad de la parábola es siempre

$$e = 1$$



Propiedad

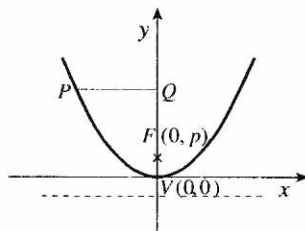
Desde un punto cualquiera P de la parábola se traza un segmento PQ perpendicular al eje. La abscisa de P es igual a la distancia entre P y Q , y su ordenada a la distancia entre Q y V :

$$\text{Abscisa de } P = d_{(P,Q)}$$

$$\text{Ordenada de } P = d_{(Q,V)}$$

Como las coordenadas del punto deben satisfacer la ecuación de la parábola, tendremos (sustituyendo en la igualdad I):

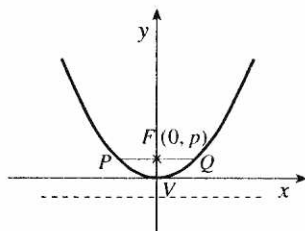
$$\left[d_{(P,Q)} \right]^2 = 4p \left[d_{(Q,V)} \right] \quad (V)$$



Lado recto de la parábola

Es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje.

En la figura, PQ es el lado recto de la parábola y el foco su punto medio. Su longitud la podemos calcular tal como hicimos con la elipse:



Por la propiedad (V) podemos afirmar que:

$$\left[d_{(P,F)} \right]^2 = 4p \left[d_{(F,V)} \right]$$

Pero $d_{F,V} = p$, por tanto:

$$\left[d_{(P,F)} \right]^2 = 4p^2$$

De donde:

$$d_{(P,F)} = 2p$$

Y como

$$d_{(P,F)} = d_{(F,Q)}$$

tenemos que:

$$d_{(P,Q)} = 4p$$

Ecuación canónica de la parábola

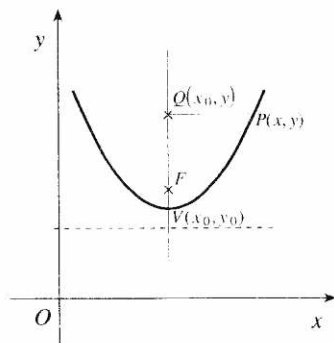
En la figura se muestra una parábola de vértice $V(x_0, y_0)$.

Desde un punto $P(x, y)$ cualquiera se traza una perpendicular PQ al eje de la parábola. El pie Q de la perpendicular tiene la misma abscisa de V y la misma ordenada de P , siendo sus coordenadas, por tanto, $Q(x_0, y)$.

Por la propiedad (V) podemos escribir:

$$\left[d_{(P,Q)} \right]^2 = 4p \left[d_{(Q,V)} \right]$$

Pero $d_{(P,Q)} = x - x_0$ y $d_{(Q,V)} = y - y_0$.



Sustituyendo en la igualdad anterior, tenemos la ecuación

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$$

(VI)

que es la ecuación canónica de una parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ y eje paralelo al de abscisas.

Nota: Nuevamente, por razones de comodidad, hablaremos de eje "vertical" en el primer caso (VI) y de eje "horizontal" en el segundo (VII).

Tangente a una parábola en el punto $P(x_1, y_1)$

Siguiendo criterios similares a los utilizados en la pág. 491, se deduce que la pendiente de la tangente a una parábola en el punto $P(x_1, y_1)$ es

$$m = \frac{x_1 - x_0}{2p}$$

(si el eje es vertical)

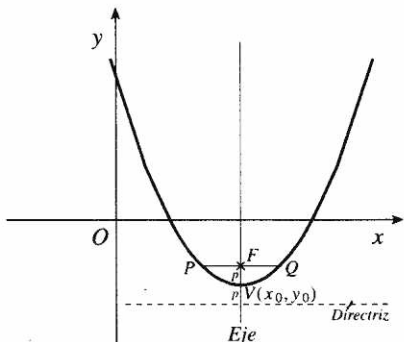
o

$$m = \frac{2p}{y_1 - y_0}$$

(si el eje es horizontal)

Parábola

Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado *foco* y de una recta llamada *directriz*.



Elementos

Vértice:

$$V(x_0, y_0)$$

Foco:

F

Parámetro:

$A, A', B \text{ y } B'$

Eje real:

(distancia del foco al vértice)

$$p = d_{(F,V)}$$

Eje:

(Contiene a F y V)

Directriz

Lado recto:

PQ

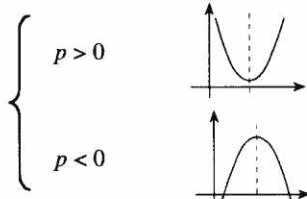
Excentricidad:

$$e = 1$$

Ecuación canónica de la parábola

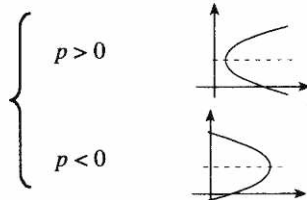
Caso I (Eje vertical)

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0) \quad (63^G)$$



Caso II (Eje real horizontal)

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \quad (63a^G)$$



Coordenadas del foco:

Caso I

$$(x_0, y_0 + p) \quad (64^G)$$

Caso II

$$(x_0 + p, y_0)$$

Ecuación del eje:

Caso I

$$x = x_0 \quad (65^G)$$

Caso II

$$y = y_0 \quad (65a^G)$$

Ecuación de la directriz

Caso I

$$y = y_0 - p \quad (66^G)$$

Caso II

$$x = x_0 - p \quad (66a^G)$$

Longitud del lado recto: $d_{(P,Q)} = 4p \quad (67^G)$

Pendiente de la tangente en el punto $P(x_1, y_1)$

Caso I

$$m = \frac{x_1 - x_0}{2p} \quad (68^G)$$

Caso II

$$m = \frac{2p}{y_1 - y_0} \quad (68a^G)$$

Ecuación general de la parábola

Si desarrollamos la ecuación canónica (63^G) y (63a^G) de la parábola obtenemos una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0 \quad (69^G)$$

o de la forma $Ay^2 + By + Cx + D = 0 \quad (69a^G)$

que llamaremos *Ecuación general de la parábola*.

Característica de la ecuación general de la parábola es que es cuadrática en una de las variables y lineal respecto a la otra.

Estudio de la parábola a partir de la ecuación general

Nota: por "estudio completo de la parábola" entendemos señalar

Vértice

Representación gráfica

Orientación

Coordenadas del foco

Parámetro

Ecuación de la directriz

Llevando como hemos hecho hasta ahora, la ecuación general a su forma canónica mediante completación de cuadrados, dispondremos de los elementos necesarios para hacer el gráfico de la parábola.

En el caso particular de la parábola, dado que su ecuación es cuadrática en una sola de sus variables, sólo completaremos el cuadrado correspondiente a esa variable y expresaremos la otra en una de las formas $4p(x - x_0)$ ó $4p(y - y_0)$.

Ejemplo 28

Hacer el estudio completo de la parábola $x^2 - 10x - 12y - 11 = 0$.

Llevamos la ecuación a la forma canónica.

Agrupamos a la izquierda los términos que contienen la variable cuadrática y a la derecha la lineal:

$$x^2 - 10x = 12y + 11$$

Completamos el cuadrado en el miembro de la izquierda:

$$2hx = -10x$$

$$h = -5$$

$$h^2 = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 = 12y + 11 + 25$$

Factorizando y reduciendo términos:

$$(x-5)^2 = 12y + 36$$

$$(x-5)^2 = 4(3)(y+3) \quad (1)$$

ESTUDIO DE LA PARABOLA

Hemos obtenido la ecuación canónica de una parábola con los siguientes elementos:

$$V(5, -3)$$

$$p = 3$$

Eje vertical

y, dado que $p > 0$,

Abierta hacia arriba

REPRESENTACION GRAFICA

Señalamos en un sistema cartesiano el vértice V .

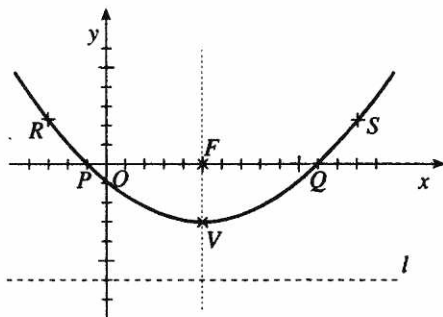
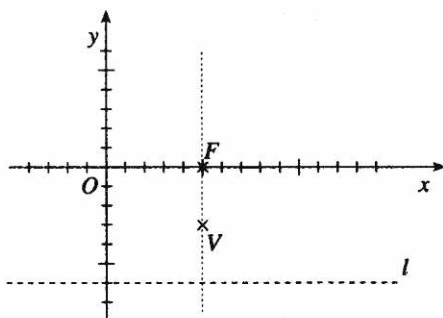
Por el vértice y paralelo al eje de ordenadas, pasa el eje de la parábola.

Sobre el eje y a una distancia de 3 unidades por encima del vértice ($p = 3$), señalamos el foco F .

Paralela al eje de abscisas y 3 unidades por debajo del vértice, pasa la directriz l .

El lado recto de la parábola es paralelo a la directriz y pasa por el foco (en esta oportunidad coincide con el eje de abscisas). Su longitud es igual a $4p$ (12 unidades en nuestro caso). Señalamos sus extremos P y Q a 6 unidades a la izquierda y a la derecha, respectivamente, del foco.

Con el vértice y el lado recto tenemos lo necesario para trazar la parábola, pero, si se



desea más precisión, pueden calcularse puntos adicionales por tabulación, dándole valores a la variable cuadrática y hallando el valor correspondiente de la variable lineal. Si se eligen valores equidistantes del eje, se tiene la ventaja de que se obtiene el mismo valor para la variable lineal, pues la parábola es simétrica con respecto al eje.

En nuestro caso, si se le dan a la variable x los valores -3 y 13 (equidistantes del eje), se obtiene en ambas ocasiones el mismo valor $\frac{7}{3}$ para la variable y . La parábola pasa, pues, por los puntos (ya señalados en la figura anterior)

$$R\left(-3, \frac{7}{3}\right) \text{ y } S\left(13, \frac{7}{3}\right)$$

Coordenadas del foco (64^G):

$$F(5, -3 + 3)$$

$$F(5, 0)$$

Ecuación de la directriz (66^G):

$$l \equiv y = -3 - 3$$

$$l \equiv y + 6 = 0$$

Ejemplo 29

Hacer el estudio completo de la parábola $x^2 - 6x + 5y - 26 = 0$.

Llevamos la ecuación a la forma canónica.

Agrupando términos:
$$x^2 - 6x = -5y + 26$$

Completando el cuadrado de la izquierda:

$$2hx = -6x$$

$$h = -3$$

$$h^2 = 9$$

$$x^2 - 6x + 9 = -5y + 35$$

Factorizando y reduciendo términos:

$$(x - 3)^2 = -5(y - 7)$$

$$(x - 3)^2 = 4\left(-\frac{5}{4}\right)(y - 7)$$

ESTUDIO DE LA PARABOLA

La ecuación obtenida corresponde a una parábola con los siguientes elementos:

$$V(3, 7)$$

$$p = -\frac{5}{4}$$

Eje vertical

y, dado que $p < 0$,

Abierta hacia abajo

REPRESENTACION GRAFICA

Señalamos el vértice V .

Por el vértice y paralelo al eje de ordenadas, trazamos el eje de la parábola.

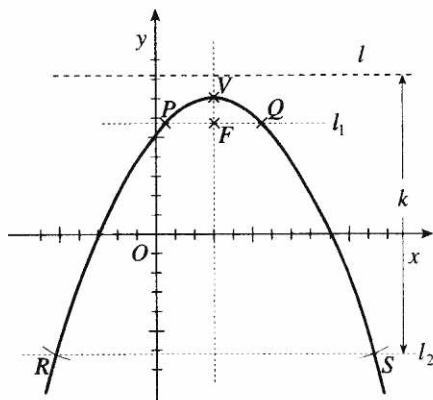
Sobre el eje y a una distancia de $\frac{5}{4}$ por debajo del vértice ($p = -\frac{5}{4}$), señalamos el foco.

Paralela al eje de abscisas y a $\frac{5}{4}$ por encima del vértice, trazamos la directriz l .

Por el foco y perpendicular al eje trazamos la recta l_1 . El lado recto es un segmento de esa recta. Como la longitud del lado recto es en este caso de 5 unidades, señalamos los puntos P y Q a 2,5 unidades a la izquierda y a la derecha, respectivamente, del foco.

Para hallar puntos adicionales que le den más precisión al gráfico, puede utilizarse también el siguiente método: se traza una recta l_2 a una distancia k de la directriz (Véase la figura). Con un compás, con centro en F y radio $= k$, se intersecta la recta l_2 en los puntos R y S .

Trazamos, por último, la parábola.



Coordenadas del foco (64^o):

$$F\left(3, 7 - \frac{5}{4}\right)$$

$$F\left(3, \frac{23}{4}\right)$$

Ecuación de la directriz (66^o):

$$l \equiv y = 7 - \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$l \equiv 4y - 33 = 0$$

Ejemplo 30

Hacer el estudio completo de la parábola $y^2 - 2y + 2x - 11 = 0$.

Llevamos la ecuación a la forma canónica.

$$\text{Agrupando términos: } y^2 - 2y = -2x + 11$$

Completando el cuadrado de la izquierda:

$$2ky = -2y$$

$$k = -1$$

$$k^2 = 1$$

$$y^2 - 2y + 1 = -2x + 12$$

$$(y-1)^2 = -2(x-6)$$

$$(y-1)^2 = 4\left(-\frac{1}{2}\right)(x-6)$$

ESTUDIO DE LA PARABOLA

La ecuación obtenida corresponde a una parábola con los siguientes elementos:

$$V(6,1)$$

$$p = -\frac{1}{2}$$

Eje horizontal

y, dado que $p < 0$,

Abierta hacia la izquierda

REPRESENTACION GRAFICA

Señalamos el vértice V .

Por el vértice y paralelo esta vez al eje de abscisas, trazamos el eje de la parábola.

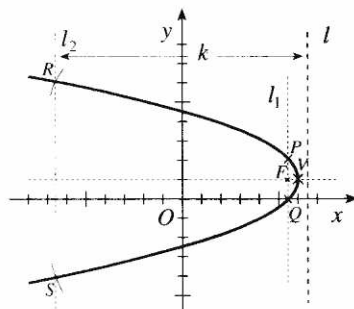
Sobre el eje y a una distancia de 0,5 a la izquierda del vértice ($p = -\frac{1}{2}$), señalamos F .

Paralela al eje de ordenadas y a 0,5 a la derecha del vértice, trazamos la directriz l .

Por el foco y perpendicular al eje trazamos la recta l_1 a la que pertenece el lado recto. La longitud de éste es de 2 unidades. Señalamos, entonces, los extremos P y Q a 1 unidad por encima y por debajo, respectivamente, del foco.

Para hallar puntos adicionales, trazamos la recta l_2 a una distancia k de la directriz. Haciendo centro en F y con radio $= k$, cortamos la recta l_2 en R y S .

Trazamos, por último, la parábola.



Coordenadas del foco
(64a⁶):

$$F\left(6 - \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$F\left(\frac{11}{2}, 1\right)$$

Ecuación de la directriz
(66a⁶):

$$l \equiv x = 6 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$l \equiv 2x - 13 = 0$$

Ejercicio 130

Hacer el estudio completo de las siguientes parábolas:

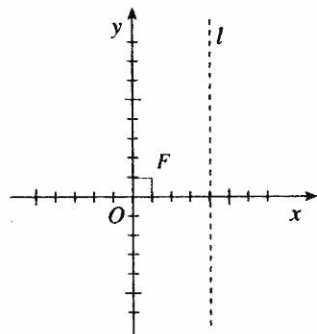
- 1) $x^2 + 4x - 4y + 8 = 0$
- 2) $y^2 - 6y - 6x - 3 = 0$
- 3) $x^2 - 10x + y + 26 = 0$
- 4) $x^2 - 8x + 3y + 25 = 0$
- 5) $y^2 + 6y + 8x - 63 = 0$
- 6) $4x^2 - 4x - 20y + 61 = 0$
- 7) $3y^2 - 12y - 8x - 44 = 0$
- 8) $5y^2 + 60y + 16x + 20 = 0$
- 9) $3x^2 + 42x + 28y + 175 = 0$
- 10) $2y^2 - 15x - 165 = 0$
- 11) $x^2 + y = 0$
- 12) $6y^2 - 18y + 22x + 19 = 0$
- 13) $\begin{cases} x = \cos 2\alpha \\ y = 2 \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$
- 14) $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} \alpha \\ y = 3 \sec^2 \alpha \end{cases}$

Ejemplo 31

Hallar la ecuación general de la parábola que tiene su foco en $F(1,1)$ y cuya directriz es la recta $l \equiv x - 4 = 0$.

Para construir la ecuación de una parábola se necesita conocer tres datos: el vértice, el parámetro (con su signo) y la orientación del eje de la parábola.

Siendo la directriz vertical, se desprende de inmediato que el eje de la parábola es horizontal, y, estando el foco a la izquierda, el parámetro debe darnos negativo y la parábola debe abrir hacia la izquierda.



Cálculo del parámetro:

$$2p = d_{(F,l)} = 1 - 4 = -3$$

$$p = -\frac{3}{2}$$

Coordenadas del vértice: el vértice, en este caso, tiene la misma ordenada del foco.

La abscisa del foco es, por (64a⁶):

$$x_F = x_0 + p$$

Sustituyendo:

$$1 = x_0 - \frac{3}{2}$$

Despejando:

$$x_0 = \frac{5}{2}$$

Las coordenadas del vértice son, pues:

$$V\left(\frac{5}{2}, 1\right)$$

Y, utilizando (63a⁶), hallamos la ecuación de la parábola:

$$(y-1)^2 = 4\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$

En forma general:

$$y^2 - 2y + 6x - 14 = 0$$

Ejemplo 32

Hallar la ecuación general de la parábola que pasa por los puntos $P(-2,1)$ y $Q(-1,6)$, cuyo vértice está sobre la recta $l \equiv 4x - 3y + 7 = 0$ y cuyo eje es paralelo al de ordenadas.

Sean las coordenadas del vértice:

$$V(h, k)$$

y la ecuación de la parábola:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k) \quad (I)$$

Como el punto P pertenece a la parábola, debe satisfacer su ecuación:

$$(-2-h)^2 = 4p(1-k) \quad (II)$$

Lo mismo podemos decir con respecto a Q :

$$(-1-h)^2 = 4p(6-k) \quad (III)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (II) y (III):

$$\frac{(-2-h)^2}{(-1-h)^2} = \frac{4p(1-k)}{4p(6-k)}$$

Simplificando, desarrollando el miembro de la izquierda y cambiando signos en el de la derecha:

$$\frac{h^2 + 4h + 4}{h^2 + 2h + 1} = \frac{k-1}{k-6} \quad (IV)$$

Como el vértice pertenece a la recta l , debe satisfacer su ecuación:

$$4h - 3k + 7 = 0$$

Despejando k :

$$k = \frac{3h+7}{3} \quad (V)$$

Sustituyendo en (IV) el valor obtenido en (V) para k :

$$\frac{h^2 + 4h + 4}{h^2 + 2h + 1} = \frac{\frac{3h+7}{3} - 1}{\frac{3h+7}{3} - 6}$$

$$\frac{h^2 + 4h + 4}{h^2 + 2h + 1} = \frac{4h + 4}{4h - 11}$$

Trasponiendo denominadores y multiplicando:

$$4h^3 + 5h^2 - 28h - 44 = 4h^3 + 12h^2 + 12h + 4$$

Reduciendo términos:

$$7h^2 + 40h + 48 = 0$$

La ecuación anterior tiene dos raíces:

$$h_1 = -4 \quad h_2 = -\frac{12}{7}$$

Sustituyendo en (V) se obtienen los valores correspondientes para k :

$$k_1 = -3, \quad k_2 = -\frac{1}{21}$$

Despejando en (II) se tiene que:

$$4p = \frac{(-2-h)^2}{1-k} \quad (VI)$$

Sustituyendo en (VI) los valores primero de h_1 y k_1 y, después, de h_2 y k_2 se obtiene

$$4p_1 = 1 \quad 4p_2 = \frac{3}{35}$$

Tenemos, pues, dos parábolas que cumplen las condiciones dadas. Sus ecuaciones son, utilizando (63^a):

$$1) \quad (x+4)^2 = 1(y+3)$$

$$x^2 + 8x - y + 13 = 0$$

$$2) \quad \left(x + \frac{12}{7}\right)^2 = \frac{3}{35}\left(y - \frac{1}{21}\right)$$

$$735x^2 + 2520x - 63y + 2163 = 0$$

Ejemplo 33

Desde $P(-6,1)$ se trazan tangentes a la parábola $y^2 - 6y - 6x - 15 = 0$. Calcular la longitud de la cuerda que tiene por extremos los puntos de tangencia.

Llevamos primero la ecuación dada a la forma canónica para conocer el valor de p y las coordenadas de V :

$$y^2 - 6y = 6x + 15$$

$$y^2 - 6y + 9 = 6x + 15 + 9$$

$$(y-3)^2 = 6(x+4)$$

El vértice es:

$$V(-4, 3)$$

Calculamos p :

$$4p = 6$$

$$p = \frac{3}{2}$$

Sea $Q(r, s)$ el punto de tangencia. La pendiente de la tangente en ese punto es, por (68a⁶):

$$m = \frac{2\left(\frac{3}{2}\right)}{s-3} = \frac{3}{s-3}$$

Por otra parte, la tangente pasa por $P(-6, 1)$ y $Q(r, s)$. Su pendiente es, por (5⁶):

$$m = \frac{s-1}{r+6}$$

Iguando los dos valores obtenidos para m :

$$\frac{3}{s-3} = \frac{s-1}{r+6}$$

Trasponiendo denominadores:

$$3r + 18 = s^2 - 4s + 3$$

Despejando r :

$$r = \frac{s^2 - 4s - 15}{3} \quad (I)$$

El punto $Q(r, s)$ pertenece a la parábola. Debe, por tanto, satisfacer su ecuación:

$$s^2 - 6s - 6r - 15 = 0 \quad (II)$$

Sustituyendo en (II) el valor de r obtenido en (I):

$$s^2 - 6s - 6\left(\frac{s^2 - 4s - 15}{3}\right) - 15 = 0$$

Desarrollando y reduciendo términos se obtiene:

$$s^2 - 2s - 15 = 0$$

cuyas raíces son:

$$s_1 = 5 \quad s_2 = -3$$

Sustituyendo en (I) se obtienen los valores correspondientes de r :

$$r_1 = -\frac{10}{3} \quad r_2 = 2$$

Los puntos de tangencia son:

$$Q_1\left(-\frac{10}{3}, 5\right) \text{ y } Q_2(2, -3)$$

La longitud L de la cuerda que tiene esos puntos por extremos es:

$$L = d_{(Q_1, Q_2)} = \sqrt{\left(2 + \frac{10}{3}\right)^2 + (-3 - 5)^2} = \boxed{\frac{8\sqrt{13}}{3}}$$

Ejercicio 131

Hallar la ecuación general de la parábola con los datos que se dan:

- 1) $F(1, 3)$; $l \equiv y + 1 = 0$ (directriz)
- 2) $V(0, 3)$; $F(\frac{3}{2}, 3)$
- 3) $V(3, 5)$; $l \equiv 4x - 21 = 0$ (directriz)
- 4) $F(-2, 5)$; $p = -\frac{3}{4}$; eje vertical
- 5) $l_0 \equiv y - 3 = 0$ (eje); $p = 1$; $l \equiv x + 1 = 0$ (directriz)
- 6) $V(-2, \frac{3}{2})$; $F(-2, 1)$
- 7) $F(-\frac{3}{2}, 3)$; $l \equiv 4x - 5 = 0$ (directriz)
- 8) $V(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$; $l \equiv 2y - 3 = 0$ (directriz)
- 9) $F(-2, 3)$; $p = \frac{5}{3}$; eje horizontal
- 10) $V(3, 1)$; la parábola pasa por $P(0, 3)$
- 11) $V(-3, 3)$; pasa por $P(1, 1)$
- 12) $F(-5, 5)$; pasa por $P(3, -1)$; eje vertical
- 13) $F(2, -2)$; pasa por $P(6, -6)$; eje horizontal
- 14) Pasa por $P(-2, -2)$; $Q(0, -5)$ y $R(2, -10)$; eje vertical
- 15) Pasa por $P(-\frac{5}{2}, 5)$; $Q(\frac{3}{2}, 1)$ y $O(0, 0)$; eje horizontal
- 16) $V(-2, 0)$; el lado recto mide 12 unidades y está a la derecha del vértice
- 17) $V(2, 7)$; el lado recto mide 3,5 unidades y está por debajo del vértice
- 18) Los extremos de su lado recto son $P(1, 2)$ y $Q(5, 2)$
- 19) Los extremos de su lado recto son $P(-1, 5)$ y $Q(-1, -1)$
- 20) Pasa por $M(3, 0)$ y $N(4, 3)$; el eje es vertical; el vértice está sobre la recta $l \equiv 5x - 3y - 13 = 0$
- 21) Pasa por $M(-2, -1)$ y $N(4, 2)$; el eje es vertical; el vértice está sobre la recta $l \equiv x - 3y + 7 = 0$
- 22) Pasa por $M(5, 0)$ y $N(0, -5)$; el eje es horizontal; el vértice está sobre la recta $l \equiv x - 2y - 2 = 0$
- 23) Pasa por $P(0, 2)$ y es tangente al eje de abscisas en el punto $Q(1, 0)$
- 24) Pasa por $P(1, 0)$ y es tangente al eje de ordenadas en el punto $Q(10, 1)$

Ejercicio 132

- 1) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $P(1, 4)$ y de la recta $l \equiv y - 2 = 0$.
- 2) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $P(3, 3)$ y de la recta $l \equiv 2x - 11 = 0$.

- 3) Un punto se mueve de tal forma que su distancia a la recta $l \equiv x + 6 = 0$ es siempre una unidad mayor que su distancia al punto $P(4,0)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
- 4) Una recta que pasa por el foco de la parábola $x^2 - 6x - 2y + 5 = 0$ la intersecta en el punto $P(7,6)$. Hallar las coordenadas del otro punto en el que la recta y la parábola se cortan.
- 5) Hallar la longitud de la cuerda común de las parábolas $y^2 - 4x = 0$ y $x^2 - 4y = 0$.
- 6) Hallar la longitud de la cuerda que la recta $l \equiv x - y + 3 = 0$ determina sobre la parábola $x^2 - 7x - y + 10 = 0$.
- 7) Hallar la longitud de la cuerda que la recta $l \equiv x - 3y - 13 = 0$ determina sobre la parábola $y^2 + 8y - x + 7 = 0$.
- 8) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 - 6x - 8y + 17 = 0$ en el punto $P(9, \frac{11}{2})$.
- 9) Hallar las ecuaciones de las tangentes a la parábola $x^2 - 4x - y + 3 = 0$ en los puntos en que ésta intersecta los ejes coordenados.
- 10) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 + 2x + y - 3 = 0$ en el punto de abscisa -2 .
- 11) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $2x^2 - 3x - 2y - 2 = 0$ trazada desde el punto $P(-4,5)$.
- 12) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 - y - 1 = 0$ paralela a la recta $l \equiv 2x - y - 1 = 0$.
- 13) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $3x^2 + 2x + y = 0$ perpendicular a la recta $l \equiv x + 3y + 5 = 0$.
- 14) Hallar la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 - 8y - x + 7 = 0$ paralela a la recta $l \equiv x - 2y + 11 = 0$.
- 15) Hallar las ecuaciones de las tangentes a la parábola $y^2 - 4y - 2x + 2 = 0$ en los puntos de abscisa 3 .
- 16) Hallar la ecuación de la tangente trazada desde el punto $P(10,-2)$ a la parábola $y^2 + 2y + 6x - 11 = 0$.
- 17) Determinar las coordenadas del punto de la parábola $y^2 - 6y - 2x + 7 = 0$ más cercano a la recta $l \equiv x + 4y + 23 = 0$.
- 18) Se trazan tangentes a la parábola $y^2 - 5x = 0$ desde el punto $P(5,9)$. Hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de tangencia.
- 19) Demostrar que las parábolas $y^2 - 4x = 0$ y $x^2 - 3x + y = 0$ son tangentes entre sí en uno de sus puntos comunes.

- 20) Hallar el ángulo agudo que forman entre sí las tangentes trazadas desde el punto $P(1,4)$ a la parábola $y^2 - 6y + 3x + 9 = 0$.
- 21) Un arco tiene forma de parábola. El ancho de la base, al igual que la altura a la que se encuentra el vértice, es de 16 m. ¿Cuál es el ancho del arco a 12 m de altura? ¿A qué altura tiene el arco 4m de ancho?
- 22) Las dos torres de un puente colgante están separadas por una distancia de 120 m. El cable de suspensión está sujeto a las torres a una altura de 30 m y, en su parte más baja, toca la superficie del tablero, describiendo una trayectoria parabólica. ¿A qué altura está el cable a 12 m del centro del puente? ¿A qué distancia del centro del puente alcanza el cable una altura de 7,5 m? (Considérese rectilínea la superficie del tablero).
- 23) En un punto en el que el río tiene 80 m de ancho, se desea construir un puente cuya luz sea un arco parabólico. La base del arco debe tener la anchura del río y el vértice debe estar a una altura de 20 m sobre el nivel del agua. Si se considera que el vértice del arco coincide con el origen de un sistema de ejes coordenados, ¿cuál es la ecuación de la parábola que describe el arco?
- 24) En el reflector parabólico, la fuente de luz se coloca en el foco. Si un reflector parabólico tiene un diámetro de 24 cm en el borde y una profundidad de 14 cm, ¿a qué distancia del vértice está la fuente luminosa?
- 25) El cable de suspensión de un puente colgante describe una trayectoria parabólica. Las torres del puente tienen una altura de 38 m y están separadas por una distancia de 110 m. El cable de suspensión está, en su parte más baja, a 11 m de altura sobre la superficie del tablero. ¿Qué longitud tienen las varas verticales de soporte que están a 36 m del centro del puente? ¿Qué separación existe entre las varas de soporte de 30 m de longitud?
- 26) En el cañón de un río se levanta un puente con arco parabólico. En condiciones normales, la base del arco, al nivel del agua, tiene 6 m de ancho y el vértice está a 7 m de altura. En una crecida, el nivel del agua subió y la base del arco, al nivel del agua, se redujo en un 10%. ¿Cuánto subió el nivel del agua?
- 27) En una calle hay un arco parabólico cuyo vértice está a una altura de 6 m sobre el piso y cuya base, al igual que la calle, tiene un ancho de 5 m. ¿Cuál es la altura máxima que puede tener el depósito de un camión cuya anchura es 2,2 m para poder pasar por debajo del arco?
- 28) Cuando se hace rotar un líquido en un envase cilíndrico, el vacío que se forma en su superficie al desplazarse el líquido hacia las paredes es parabólico. Al accionar una centrifugadora de 50 cm de diámetro, la altura del líquido en la circunferencia es 10 cm mayor que en el centro. ¿A qué distancia del centro es la altura del líquido 0,4 cm mayor que en el centro? ¿Qué altura por encima de la del centro alcanza el líquido a 15 cm del centro?
- 29) Cierta cometa no periódica se desplaza en una órbita parabólica con el sol como foco. La mayor cercanía que alcanza con respecto al sol es de

24.000.000 km. ¿Cuál es la ecuación de la órbita? ¿A qué distancia del sol se encuentra el cometa cuando éste pasa por el extremo del lado recto?

- 30) En la azotea de un edificio hay un tanque de agua con un aliviadero de emergencia en uno de los bordes de la azotea y dirigido hacia la calle. La salida del tubo de alivio está a 49 m del piso. Cuando se abre la llave de paso, sale el agua con fuerza describiendo, al caer, una parábola. En un punto a 3 m por debajo de la salida, el chorro de agua pasa a 4 m de la vertical del aliviadero. ¿A cuántos metros del edificio llega el agua al piso?
- 31) Un dispositivo para regar, lanza el agua a una distancia de 21 m. El agua describe una parábola de parámetro $p = -3,9375$. ¿Qué altura alcanza el agua en su trayecto?
- 32) El disparo de un obús, después de describir una trayectoria parabólica con $p = -\frac{75}{16}$, da en un blanco situado a 15.000 m de distancia. ¿Qué altura alcanzó la granada en su recorrido?
- 33) Demostrar que las tangentes a una parábola en los extremos del lado recto son perpendiculares entre sí.
- 34) Demostrar que si dos tangentes cualesquiera de una parábola son perpendiculares entre sí, entonces se intersectan sobre la directriz de la parábola.
- 35) Demostrar que dos parábolas que tienen el eje y el foco común y los respectivos vértices a lados distintos del foco se cortan formando un ángulo recto.
- 36) Demostrar que, si dos parábolas de ejes perpendiculares entre sí se cortan en cuatro puntos, los puntos de intersección son concíclicos.
- 37) Por un punto P se traza una tangente a la parábola $y^2 = 4px$. La tangente intersecta en Q a la directriz de la parábola. Si F es el foco de la parábola, demostrar que FP y FQ son perpendiculares.
- 38) Demostrar que una tangente de una parábola y la perpendicular trazada desde el foco se intersectan sobre la perpendicular al eje que pasa por el vértice.
- 39) Demostrar que cualquier tangente a una parábola (excepto la tangente en el vértice), corta la directriz y al lado recto (o a la prolongación de éste) en puntos equidistantes del foco.

Ejercicio 133

Ejercicios de recapitulación

- 1) Hallar la ecuación de la hipérbola de excentricidad $e = \frac{4}{3}$ sabiendo que sus focos coinciden con los de la elipse $5x^2 + 9y^2 - 20x - 54y - 79 = 0$.
- 2) Los focos de una elipse están sobre los vértices reales de una hipérbola y sus vértices del eje mayor, sobre los focos de la hipérbola. Si la ecuación de la hipérbola es $5x^2 - 4y^2 + 10x - 24y - 51 = 0$, hallar la de la elipse.
- 3) Hallar la ecuación general de la parábola que tiene su vértice en el centro de la elipse $4x^2 + y^2 + 24x - 2y + 33 = 0$ y su foco en uno de los vértices del

eje menor de la elipse.

- 4) Hallar la ecuación general de la parábola que tiene su vértice en el centro de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 10 = 0$ y pasa por los puntos en los que la circunferencia intersecta la elipse $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 17 = 0$.
- 5) Los focos de una hipérbola coinciden con los vértices del eje mayor de la elipse $9x^2 + 8y^2 + 36x + 32y - 4 = 0$ y sus directrices pasan por los focos de la elipse. Hallar la ecuación general de la hipérbola.
- 6) Calcular el área del rectángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de la elipse $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.
- 7) Hallar el área del pentágono irregular convexo formado por el punto $(12, -1)$ y los puntos en los que la parábola $y^2 - 3x = 0$ intersecta la hipérbola $x^2 - 4y^2 - 20 = 0$.
- 8) Una elipse de excentricidad $\frac{2}{3}$ y una hipérbola de excentricidad $\frac{3}{2}$ tienen sus focos en los puntos $F(-12, 0)$ y $F'(12, 0)$. Determinar los puntos de intersección.
- 9) Hallar el ángulo que forman la parábola $x^2 - 12x - 2y + 11 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 12x + 28y + 187 = 0$ en cualquiera de los dos puntos en los que se intersectan.
- 10) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $P(0, 3)$ y a la recta $l \equiv y - 1 = 0$ están en la relación 4:1.
- 11) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $P(4, 0)$ y a la recta $l \equiv x + 2 = 0$ están en la relación $\frac{1}{3}$.
- 12) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al punto $P(c, 0)$ y a la recta $l \equiv cx - a^2 = 0$ están en la relación $\frac{c}{a}$.
- 13) Hallar la ecuación del diámetro de la elipse $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ que pasa por los puntos medios de las cuerdas de pendiente 3.
- 14) Hallar las coordenadas de los puntos en los que las directrices de la hipérbola cuya ecuación es $3x^2 - y^2 - 24x + 4y - 4 = 0$ intersectan la elipse de ecuación $5x^2 + y^2 - 40x + 2y + 36 = 0$.
- 15) El centro de una hipérbola de eje real horizontal y excentricidad $\frac{5}{4}$ está en $C(2, 3)$. Hallar su ecuación general sabiendo que la distancia que separa los focos de los vértices imaginarios es $\sqrt{34}$.
- 16) Una elipse de eje mayor horizontal tiene su centro en $C(0, 5)$; hallar su ecuación general sabiendo que los focos son los puntos medios de los semiejes mayores y que el eje menor mide $6\sqrt{3}$.
- 17) La circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0$ está inscrita en una elipse de eje mayor horizontal y biseca las semidistancias focales. Hallar la ecuación de la elipse.

- 18) Hallar la longitud de los lados del triángulo equilátero inscrito en la parábola $y^2 - 4x = 0$.
- 19) En la parábola $x^2 - 4x - y + 5 = 0$ se inscribe un triángulo isósceles de base perpendicular al eje de la parábola. Si los lados del triángulo miden cada uno $3\sqrt{10}$, hallar las coordenadas de los extremos de la base.
- 20) La ecuación del eje real de una hipérbola es $y - 3 = 0$; una de sus asíntotas pasa por los puntos $M(2,0)$ y $N(8,9)$ y sus focos están en la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 0$. Hallar la ecuación general de la hipérbola.
- 21) La circunferencia $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 14 = 0$ tiene su centro en el vértice de una parábola que se abre hacia la derecha y pasa por los extremos del lado recto de ésta. Hallar la ecuación general de la parábola.
- 22) Desde la azotea de un edificio y paralelamente al horizonte, se lanza una piedra que, en su recorrido hasta caer a tierra, describe una trayectoria parabólica de ecuación $x^2 + 125y = 0$. Determinar a qué distancia de la vertical cayó si la altura del edificio es de 20 m.
- 23) Un cañón dispara una bala que, después de describir un arco de parábola, da en el blanco a 8.000 m de distancia. Si la altura máxima que alcanzó la bala fue de 1.000 m, ¿con qué ángulo de elevación se realizó el disparo?
- 24) Calcular con qué ángulos se ven desde los extremos del lado recto de la parábola $x^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ los puntos de trisección de la cuerda cuya ecuación es $x - y - 2 = 0$.
- 25) Una circunferencia de radio 3, cuyo centro coincide con el vértice de la parábola $x^2 - 8x - 8y + 40 = 0$, la intersecta en dos puntos. La cuerda que esos puntos determinan es el lado de un rectángulo inscrito en la circunferencia. ¿Cuánto miden los lados del rectángulo?
- 26) Un meridiano del globo terráqueo es una elipse en la que $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{300}$. Determinar su excentricidad.
- 27) Determinar la excentricidad de una hipérbola en la que los vértices son los puntos de trisección de la distancia focal.
- 28) Hallar la ecuación general de la elipse que pasa por el punto $P(4,6)$ y tiene los mismos focos que la hipérbola $x^2 - y^2 - 8 = 0$.
- 29) Hallar las ecuaciones de los diámetros de la elipse $x^2 + 6y^2 - 2 = 0$ que miden 2 unidades.
- 30) Demostrar que una elipse y una hipérbola que tienen focos comunes se intersectan formando ángulos rectos.
- 31) Demostrar que los radios focales de un punto de una elipse forman ángulos iguales con la tangente a la elipse en ese punto.
- 32) Por un punto P de una hipérbola se traza una paralela al eje real que corta las asíntotas en M y N . Demostrar que $MN \cdot NP = a^2$.
- 33) Demostrar que la circunferencia que tiene como diámetro el lado recto de una parábola es tangente a la directriz de la misma.

- 34) Demostrar que una circunferencia que tiene como diámetro cualquier cuerda focal de una parábola (cuerda que pasa por el foco) es tangente a la directriz de la misma.
- 35) Demostrar que la cuerda común de dos circunferencias distintas cuyos diámetros son cuerdas focales de una misma parábola pasa por el vértice de la parábola.
- 36) Sencillo problemita de *Suvorov (Matemáticas superiores)*: Si el origen de coordenadas O sirve de centro a una circunferencia, que es tangente a la recta $3x - y - 10 = 0$, y de vértice de una parábola, cuyo parámetro (distancia del foco a la directriz) es $\frac{3}{2}$, y su eje coincide con el eje Ox , y si desde el punto M de intersección de estas curvas, situado en el primer cuadrante, se traza una circunferencia, tangente al eje Ox , que corta a la primera circunferencia en los puntos P y Q , en ese caso, el punto de intersección de la cuerda PQ con la ordenada del punto M pertenece a una elipse, cuyo eje mayor es el diámetro de la primera circunferencia, y el eje menor es igual al radio de la misma circunferencia. Demuéstrese esto.
- ... y el que lo desconstantinopolice, buen desconstantinopolizador será. (!)
- 37) AB y CD son dos segmentos perpendiculares que se bisecan. Un punto P se mueve de tal forma que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Demostrar que el lugar geométrico de P es una hipérbola equilátera.
- 38) Demostrar que el ortocentro de cualquier triángulo inscrito en una hipérbola equilátera pertenece a la misma hipérbola.
- 39) Demostrar que, si un triángulo rectángulo está inscrito en una hipérbola equilátera, la altura correspondiente a la hipotenusa es tangente a la hipérbola.
- 40) Sean P y Q , respectivamente, los puntos medios de dos cuerdas cualesquiera de una hipérbola equilátera. Por el punto P se traza una paralela a la segunda cuerda y por el punto Q una paralela a la primera: sea R el punto de intersección de estas rectas. Demostrar que los puntos P , Q , R y el centro C de la hipérbola son concíclicos.
- 41) Demostrar que las dos tangentes trazadas desde un punto P a una elipse, o a una hipérbola forman ángulos iguales con las rectas que unen el punto P con los focos.
- 42) Por el foco de una elipse se traza una cuerda y, por el mismo foco, una recta l perpendicular a la cuerda. Por los extremos de la cuerda se trazan las tangentes T_1 y T_2 . Demostrar que las rectas l , T_1 y T_2 son concurrentes.
- 43) Demostrar que las tangentes trazadas desde un punto P a una parábola forman ángulos iguales, respectivamente, con la recta que une a P con el foco y con la paralela al eje que pasa por P .
- 44) Demostrar que el lugar geométrico del vértice del ángulo recto de los triángulos cuyos catetos son tangentes a una parábola, es la directriz de la misma parábola.

Generalidades

Una *igualdad* es la comparación de dos cantidades equivalentes. Por ejemplo

$$3 + 5 = 8$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^7 \cdot a^9 = a^{16}$$

son igualdades.

Si se establece, en cambio, una comparación entre cantidades que no son equivalentes, se obtiene una *desigualdad*.

Los signos de la desigualdad son *mayor que* ($>$) y *menor que* ($<$):

$$7 + 4 > 10$$

$$9 - 14 < 0$$

El concepto de *mayor* o *menor* implica el de ordenamiento. Sólo los números reales se pueden ordenar: no tiene sentido decir que un número complejo es mayor que otro. Nuestro estudio se limitará, por tanto, al campo de los números reales.

Se dice que dos desigualdades son *del mismo sentido* si sus símbolos apuntan en la misma dirección: $a > b$ y $c > d$ son desigualdades del mismo sentido. Si los símbolos no apuntan en la misma dirección diremos, en cambio, que las desigualdades son *de sentido contrario*: $a > b$ y $c < d$ son desigualdades de sentido contrario.

Principales propiedades de las desigualdades

- 1) Si $a > b$, entonces $b < a$. Si $a < b$, entonces $b > a$.

$$\begin{array}{ll} \text{Ejemplo A.} & \text{si} \quad -3 > 2 - 7 \\ & \text{entonces} \quad 2 - 7 < -3 \end{array}$$

- 2) Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$; si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

3) Si se suman miembro a miembro dos desigualdades de igual sentido se obtiene una desigualdad del mismo sentido (Ejemplos B_1 y B_2). Si se restan, el resultado puede ser una desigualdad del mismo sentido, una de sentido contrario (Ejemplo B_3) o una igualdad (B_4):

$$\begin{array}{ll} \text{Ejemplo B} & \begin{array}{ll} 1) & 7 > 5 \\ & 2 > -3 \\ \hline & 9 > 2 \end{array} & \begin{array}{ll} 2) & -3 < 7 \\ & 9 < 10 \\ \hline & 6 < 17 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 3) & 6 > 5 & \\ & \underline{5 > 1} & \\ & 6 - 5 < 5 - 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4) & 8 > 6 & \\ & \underline{7 > 5} & \\ & 8 - 7 = 6 - 5 & \end{array}$$

4) Pueden restarse miembro a miembro dos desigualdades de sentido contrario: el resultado será una desigualdad del mismo sentido del minuendo:

Ejemplo C

$$\begin{array}{rcl} 1) & 7 > 5 & \\ & \underline{2 < 6} & \\ & 7 - 2 > 5 - 6 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2) & -6 < 3 & \\ & \underline{8 > -5} & \\ & -6 - 8 < 3 + 5 & \end{array}$$

5) Puede sumarse (o restarse) una misma cantidad a ambos miembros de una desigualdad sin que cambie el sentido de ésta.

Ejemplo D

$$\begin{array}{rcl} 1) & 7 > -3 & \\ & 7 + 10 > -3 + 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2) & 8 < 13 & \\ & 8 - 10 < 13 - 10 & \end{array}$$

Consecuencia: Cualquier término puede trasponerse de un miembro a otro de la desigualdad cambiando el signo del término.

Ejemplo E

$$\begin{array}{rcl} & 3 - 7 < 8 + 6 & \\ & 3 - 8 < 6 + 7 & \end{array}$$

6) Pueden multiplicarse (o dividirse) por una misma cantidad **positiva** ambos miembros de una desigualdad sin que cambie el sentido de ésta.

Ejemplo F

$$\begin{array}{rcl} 1) & 5 > -3 & \\ & (5) \cdot 7 > (-3) \cdot 7 & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2) & 6 < 11 & \\ & 3 < \frac{11}{2} & \end{array}$$

7) Si ambos miembros de una desigualdad se multiplican (o dividen) por una misma cantidad **negativa**, la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplo G

$$\begin{array}{rcl} 1) & 6 > 2 & \\ & 6(-3) < 2(-3) & \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 2) & -12 < 18 & \\ & \frac{-12}{-6} > \frac{18}{-6} & \\ & 2 > -3 & \end{array}$$

Consecuencia: Pueden cambiarse los signos a todos los términos de una desigualdad si se cambia el sentido de ésta.

Ejemplo H

$$\begin{array}{rcl} & 7 - 5 < 8 - 1 & \\ & -7 + 5 > -8 + 1 & \end{array}$$

8) Pueden elevarse a un mismo **exponente impar positivo** ambos miembros de una desigualdad sin que cambie el sentido de ésta.

Ejemplo I

$$\begin{array}{rcl} & -2 < 3 & \\ & (-2)^3 < 3^3 & \end{array}$$

Consecuencia: Puede sacarse raíz de **índice impar** a ambos miembros de una desigualdad sin que cambie el sentido de ésta.

Ejemplo J

$$\begin{array}{rcl} & -8 < 64 & \\ & \sqrt[3]{-8} < \sqrt[3]{64} & \end{array}$$

9) Si ambos miembros de una desigualdad son positivos, pueden elevarse a un mismo **exponente par positivo** sin que cambie el sentido de la desigualdad

(Ejemplo K_1). De no ser del mismo signo, puede resultar una desigualdad de sentido contrario (K_2) o una igualdad (K_3).

$$\begin{array}{lll} \text{Ejemplo K} & 1) & 7 > 4 \qquad 2) \quad -5 < 2 \qquad 3) \quad -3 < 3 \\ & & 7^2 > 4^2 \qquad (-5)^2 > 2^2 \qquad (-3)^2 = 3^2 \end{array}$$

Consecuencia: Si ambos miembros de una desigualdad son positivos, las raíces positivas de índice par de cada uno de ellos forman una desigualdad del mismo sentido que la primera.

$$\begin{array}{ll} \text{Ejemplo L} & 4 < 9 \\ & +\sqrt{4} < +\sqrt{9} \end{array}$$

10) Si ambos miembros de una desigualdad son del mismo signo, sus inversos forman una desigualdad de sentido contrario.

$$\begin{array}{ll} \text{Ejemplo M} & 1) \quad 7 < 10 \qquad 2) \quad -2 > -7 \\ & \frac{1}{7} > \frac{1}{10} \qquad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{7} \end{array}$$

Igualdades y ecuaciones

La comparación de cantidades equivalentes da origen, como hemos visto, a una igualdad. Si esas cantidades contienen una o más variables y la igualdad es cierta sólo para determinados valores de esa o esas variables, la igualdad pasa a llamarse *ecuación*. Por ejemplo

$$\begin{array}{l} 3x - 5 = x + 7 \\ x^2 + 7x + 10 = 0 \\ 3x - 2y + 7 = 0 \end{array}$$

son ecuaciones.

Desigualdades e inecuaciones

En forma análoga, si las cantidades no equivalentes que se comparan en una desigualdad contienen variables y la expresión es cierta sólo para algunos valores de las variables, la desigualdad pasa a llamarse *inecuación*. Por ejemplo

$$\begin{array}{l} 3x + 11 < 8x + 1 \\ 5x^2 - 6x + 1 > 0 \\ 3x^2 + 5y - 7 < 0 \end{array}$$

son inecuaciones.

Signos de las inecuaciones

Además de los signos *mayor que* ($>$) y *menor que* ($<$) de las desigualdades, en las inecuaciones se utilizan los signos *mayor o igual* ($\geq$) y *menor o igual* ($\leq$). Por ejemplo, la expresión

$$x \leq 7$$

se lee "x menor o igual que 7" y la condición se satisface si la variable toma el valor 7 o cualquier valor real menor que 7.

Soluciones de una inecuación

Es el conjunto de valores de la variable que satisfacen la condición expresada en la inecuación. A los valores que satisfacían una ecuación se les llamaba *soluciones, raíces o ceros* de la ecuación. En el caso de las inecuaciones no se utiliza la palabra raíz o cero, sino sólo *soluciones*.

Resolver, pues, una inecuación es hallar los valores que verifican la desigualdad planteada.

Resolución de las inecuaciones

Las propiedades de las desigualdades nos permiten trabajar con las inecuaciones en forma similar a la que se utilizó al resolver ecuaciones. Sin embargo hay algunas diferencias muy importantes que no pueden ser descuidadas: nos referimos en especial a las propiedades 7, 9 y 10.

Formas de expresar las soluciones de una inecuación

A menos que existan otras condiciones simultáneas, la solución de una inecuación es un conjunto infinito de valores. Para expresarla se utilizan las siguientes formas:

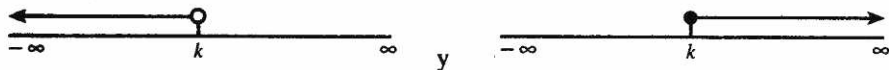
a) **Forma analítica:** es la inecuación en su forma más reducida. Ejemplos:

$$x < k$$

ó

$$x \geq k$$

b) **Forma gráfica:** consiste en señalar k sobre la recta real indicando hacia dónde se encuentran los valores que satisfacen la inecuación. Para los ejemplos anteriores, los gráficos serían:



Nótese que en el primer caso para que quede satisfecha la condición, la variable sólo puede tomar valores que sean menores que k . Señalaremos esta circunstancia en el gráfico mediante un círculo vacío y la flecha dirigida hacia donde están los valores menores que k , es decir, hacia la izquierda.

En el segundo caso, la variable puede tomar cualquier valor mayor que k o también el valor k , pues la condición expresa que x debe ser *mayor o igual que k* . Señalaremos esto gráficamente mediante un círculo lleno y la flecha hacia la derecha.

c) **Forma de intervalo:** consiste en señalar el mínimo y el máximo valor real que puede tomar la variable de la siguiente forma:

$(-\infty, k)$, en el primer caso

$[k, \infty)$, en el segundo

Estas expresiones reciben el nombre de *Intervalos de solución*.

El uso del paréntesis en uno o en ambos límites indica que la variable puede tomar cualquier valor intermedio pero no el de los extremos que tengan paréntesis.

El uso del corchete indica que la variable puede tomar cualquier valor intermedio y también el de los extremos que tengan corchete.

∞ y $-\infty$ no son valores definidos por lo que siempre se indican con un paréntesis.

Si un extremo de un intervalo tiene un paréntesis, se dice que el intervalo es *abierto* en ese extremo; si, en cambio, tiene un corchete, se dice que es *cerrado*.

Existen numerosas modalidades tanto para la forma gráfica de señalar las soluciones como para la forma de intervalo. En la que hemos adoptado, un paréntesis en el intervalo corresponderá siempre a un círculo vacío en el gráfico y un corchete a un círculo lleno. A los extremos ∞ y $-\infty$ les corresponderá siempre la punta de la flecha.

INECUACIONES CON UNA VARIABLE

INECUACIONES LINEALES

Para resolver las inecuaciones seguiremos estos pasos:

- 1) Llevaremos la inecuación a su mínima expresión (Forma analítica).
- 2) Señalaremos gráficamente la solución. El señalamiento gráfico de la solución sólo es indispensable en las inecuaciones de varias variables. Sin embargo, siempre es útil para determinar los intervalos de solución.
- 3) Señalaremos el o los intervalos de solución.

Ejemplo 1

Resolver la siguiente inecuación: $5x - \frac{2}{3} \leq 2x + \frac{1}{6}$

Trasponiendo términos: $5x - 2x \leq \frac{1}{6} + \frac{2}{3}$

Reduciendo términos semejantes: $3x \leq \frac{5}{6}$

Aislado x : $x \leq \frac{5}{18}$

En forma gráfica:



En forma de intervalo, la solución de la inecuación es:

$$\left(-\infty, \frac{5}{18}\right]$$

Ejemplo 2

Resolver $\frac{9x-5}{4} + 3 < \frac{7x+1}{3} + 1$

Multiplicando todos los términos por 12 para eliminar denominadores:

$$27x - 15 + 36 < 28x + 4 + 12$$

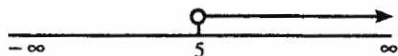
Trasponiendo términos y reduciendo términos semejantes:

$$-x < -5$$

Cambiando signos (y, por tanto, el sentido de la inecuación):

$$x > 5$$

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$(5, \infty)$$

Ejemplo 3

Resolver: $(x+5)(x+6)(x-7) \leq (x+2)^3 - (2x+1)(x-3) + 35$

Desarrollando:

$$x^3 + 4x^2 - 47x - 210 \leq x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (2x^2 - 5x - 3) + 35$$

Reduciendo términos semejantes:

$$-64x \leq 256$$

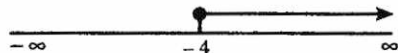
Cambiando signos y sentido de la inecuación:

$$64x \geq -256$$

Aislado x:

$$x \geq -4$$

En forma gráfica:



En forma de intervalo:

$$[-4, \infty)$$

Ejercicio 134

Señalar el intervalo de solución de las siguientes inecuaciones:

- 1) $x + 9 < 11$
- 2) $x - 5 \geq 4$
- 3) $x + 7 > 2$
- 4) $3x - 2 \leq 4$
- 5) $5x + 1 \geq 4$
- 6) $7x + 3 > -4$

- 7) $5x+2 < 2x+7$
- 8) $10x+11 \geq 6x-7$
- 9) $\frac{3x-2}{5} \leq 3$
- 10) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2} < -3$
- 11) $\frac{2x+1}{3} + 2 > \frac{x-5}{7} - 9$
- 12) $5x + \frac{1}{3} \geq \frac{2x-19}{6}$
- 13) $2x-9 < 7x+6$
- 14) $(x-3)^2 + 7 \leq (x+1)^2 - 5$
- 15) $3(x-4) + 9 - 2x \geq 4(3x-1) + 6(x+3)$
- 16) $(x-2)^3 < x^3 - 2(3x+1)(x-5)$
- 17) $(2x+1)(3x-2) + (4x+3)(x-7) > (3x-1)(x+2) + (7x-3)(x+1)$
- 18) $\frac{(x+1)(x+3)}{3} + \frac{(x+5)(x+7)}{2} \geq \frac{(5x-3)(x-1)}{6} - \frac{3}{2}$
- 19) $(x+1)(x+3)(2x+3) < (x-5)(2x-1)(x+4) + 2(7x-1)(x+1)$
- 20) $\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \leq (x+3)(x-2) + \frac{4}{15}$
- 21) $\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)$
- 22) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 7$
- 23) $\frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} \leq 2 + \frac{3x-1}{15}$
- 24) $\frac{1}{2}\left[x - \left(1 + \frac{25}{26}\right)\right] - \frac{2}{13}(1-3x) > x$
- 25) $(x+1)^2 > [6-(1-x)]x-2$
- 26) $(5x-2)^2 - (3x+1)^2 \geq (4x+5)^2$
- 27) $(2x+1)^2 - 7 > (2x-1)^2$
- 28) $(0,2x+0,3)^2 > 4(0,1x-1,2)^2$
- 29) $(1250x+90)^2 + 68400 \leq 500[(25x+28)^2 + (25x+36)(100x+9)]$
- 30) $2(x+3\sqrt{2})^2 \leq (x+7\sqrt{2})(x-5) + (x+5\sqrt{2})(x+7)$
- 31) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{2-\sqrt{2}} - \frac{x}{4-\sqrt{2}} < 24$
- 32) $x + \sqrt{2}x + \sqrt{3}x > 4$

$$33) \quad x + \lg 2 + \frac{x + \lg 3}{3} - \frac{5x + \lg 4}{4} \leq \lg \sqrt[4]{6}$$

$$34) \quad x \lg 15 - x \lg 10 \geq x \lg 6 + \lg 4$$

$$35) \quad 2x + \sqrt{6} - \sqrt{2}x \geq 2 - \sqrt{6}x + \sqrt{2}$$

$$36) \quad 5 - \sqrt[3]{4}x > \sqrt[3]{9}x - \sqrt[3]{6}x$$

$$37) \quad x \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha + \cos 2\alpha \leq \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha - x \operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$38) \quad \frac{x \operatorname{sen} 7\alpha - x \operatorname{sen} 5\alpha}{\cos 7\alpha + \cos 5\alpha} - \frac{\cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{\operatorname{sen} 5\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha} \geq 0$$

$$39) \quad (x+1)(x+2)(x+3) < (x+3)(x-4)(x+7)$$

$$40) \quad (x+1)(x-2)(x+4)(x+5) - 8(x+2)(x-3)(x-4) - (7x-3)(7x+10) > x^4 + 11$$

Discusión de inecuaciones con parámetros (inecuaciones literales)

Si una inecuación contiene parámetros o coeficientes literales y en la resolución de la inecuación es preciso multiplicar o dividir por expresiones que contengan esos parámetros, se hace necesario discutir los resultados para el caso de que dichas expresiones sean de signo positivo y para el caso de que sean de signo negativo.

Los siguientes ejemplos ilustrarán este concepto.

Ejemplo 4

Discutir la siguiente inecuación: $4a\left(x - \frac{15}{4}\right) + 2(x + 5a) \geq 4x + 7a$

Desarrollando: $4ax - 15a + 2x + 10a \geq 4x + 7a$

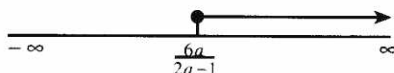
Trasponiendo términos y reduciendo: $4ax - 2x \geq 12a$

Simplificando: $2ax - x \geq 6a$

Sacando factor común en el primer miembro: $x(2a - 1) \geq 6a$

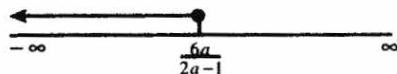
Para aislar la variable x debemos dividir ambos miembros por $(2a - 1)$, expresión que contiene el parámetro a . Si esta expresión es positiva, el sentido de la inecuación no cambia y podemos escribir:

$$x \geq \frac{6a}{2a-1} \quad \left(\text{Si } a > \frac{1}{2}\right)$$



Si la expresión, por el contrario, es negativa, el sentido de la inecuación cambia y tendremos:

$$x \leq \frac{6a}{2a-1} \quad \left(\text{Si } a < \frac{1}{2}\right)$$



Tenemos que verificar todavía qué sucede si a toma el valor $\frac{1}{2}$: si sustituimos a por $\frac{1}{2}$, la expresión original queda reducida a la siguiente:

$$-\frac{5}{2} \geq \frac{7}{2}$$

Esta expresión es obviamente falsa.

Resumiendo los resultados obtenidos, las soluciones de la inecuación son:

$\left[\frac{6a}{2a-1}, \infty\right)$	Si $a > \frac{1}{2}$
$\left(-\infty, \frac{6a}{2a-1}\right]$	Si $a < \frac{1}{2}$
Si $a = \frac{1}{2}$, no hay solución	

Ejemplo 5

Discutir la inecuación: $1 + \frac{x+a}{2} > 2x - \frac{2a(x-1)}{3}$

Multiplicando por 6 para eliminar denominadores:

$$6 + 3x + 3a > 12x - 4ax + 4a$$

Trasponiendo términos:

$$4ax - 9x > a - 6$$

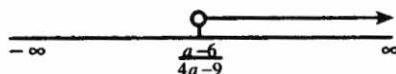
Sacando factor común:

$$x(4a - 9) > a - 6$$

Nuevamente, para aislar la variable x tenemos que dividir por una expresión que contiene el parámetro a .

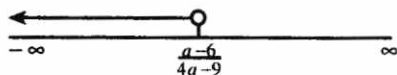
Si la expresión es positiva, la inecuación mantiene el sentido:

$$x > \frac{a-6}{4a-9} \quad \left(\text{Si } a > \frac{9}{4}\right)$$



De ser negativa, el sentido de la inecuación cambia:

$$x < \frac{a-6}{4a-9} \quad \left(\text{Si } a < \frac{9}{4}\right)$$



Para $a = \frac{9}{4}$, la expresión original se reduce a ésta:

$$-\frac{27}{4} < -3$$

Esta expresión es cierta independientemente del valor que tome la variable.

Soluciones:

$\left(\frac{a-6}{4a-9}, \infty\right)$	Si $a > \frac{9}{4}$
$\left(-\infty, \frac{a-6}{4a-9}\right)$	Si $a < \frac{9}{4}$
$\mathcal{R}$	Si $a = \frac{9}{4}$

Ejemplo 6

Discutir la siguiente inecuación:

$$\frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b} \leq \frac{2}{a+b} \quad (a \text{ y } b \text{ son ambos negativos})$$

Para eliminar denominadores, debemos multiplicar ambos miembros de la inecuación por $(a+b)(a-b)$; el primero de estos factores, siendo a y b ambos negativos, es obviamente negativo. Si el segundo factor también lo es (si $a-b < 0$), el producto será positivo y no cambiará el sentido de la inecuación:

$$x(a-b) + x(a+b) \leq 2(a-b)$$

Reduciendo términos:

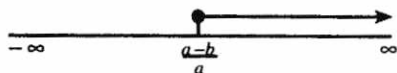
$$2ax \leq 2(a-b)$$

Simplificando:

$$ax \leq a-b$$

Para aislar x debemos dividir por a , cuyo signo es negativo. Por tanto:

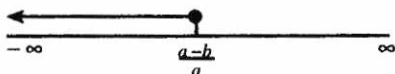
$$x \geq \frac{a-b}{a} \quad (\text{Si } a < b)$$



Si el factor $a - b$ es positivo (si $a - b < 0$), el producto $(a + b)(a - b)$ será negativo y hará que la inecuación cambie de sentido:

$$x(a - b) + x(a + b) \geq 2(a - b)$$

$$x \leq \frac{a - b}{a} \quad (\text{Si } a > b)$$



Dado que $a - b$ no puede anularse, pues en ese caso el segundo término de la expresión original carecería de sentido, podemos resumir así las soluciones:

$\left[\frac{a-b}{a}, \infty \right)$	Si $a < b$
$\left(-\infty, \frac{a-b}{a} \right]$	Si $a > b$

Ejercicio 135

Discutir las siguientes inecuaciones:

- $a(x - 2) \geq 2(x + a)$
- $ax - 1 > x + a$
- $x(a + 2) + \frac{ax + 2}{4} \geq 3a - 7$
- $3(a + 7) + ax < 5a^2 + 38a + 21 - 7x$
- $\frac{a(a - x)}{15} + \frac{3a}{5} > \frac{x - 4}{3}$
- $(a - b)x + b^2 < a^2$
- $a^2bx + ab^2x \leq a + b$ (a y b son de igual signo)
- $\frac{x - a}{b} + \frac{x - b}{a} > 2$ (a y b son de igual signo)
- $\frac{x + a}{b} + \frac{x + b}{a} \leq -2$ (a y b son de signos opuestos)
- $\frac{x}{a + b} + 1 < \frac{x + a}{a - b}$ (a y b son positivos)
- $\frac{a(x - a)}{b} + \frac{b(x - b)}{a} \leq x$ (a y b son de igual signo)
- $(x - a)(x + b) > (x + a)(x - b)$
- $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} > \frac{b}{a} - \frac{a}{b}$ (a y b son de signos opuestos)

- 14) $\frac{x}{a+b} + \frac{x}{a-b} \geq 2a$ (a y b son de igual signo; $|a| > |b|$)
- 15) $\frac{ax}{b} - \frac{bx-1}{a} < \frac{1}{b}$ (a y b son de igual signo)
- 16) $\frac{x-a}{a} + \frac{x-b}{b} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ (a y b son de signos opuestos)
- 17) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} > a+b$ (a y b son de igual signo)
- 18) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} < a-b$ (a y b son positivos)
- 19) $\frac{x+2a}{a} > x$
- 20) $\frac{x}{a+b} - \frac{x}{a-b} \geq 2a$ (a y b son positivos)
- 21) $\frac{x}{a+b} - \frac{x}{a-b} \geq \frac{b}{a+b}$ (a y b son positivos)
- 22) $\frac{x}{a+b} - \frac{x}{a-b} \geq \frac{2}{a-b}$ (a y b son negativos)
- 23) $\frac{x+b}{a+b} - \frac{x}{a-b} < 1$ (a y b son positivos)
- 24) $\frac{x-a}{a-b} + \frac{x+a}{a+b} > \frac{2a}{a+b}$ (a y b son negativos)
- 25) $\frac{x}{a+b} + 1 < \frac{x+a}{a-b}$ (a y b son positivos)
- 26) $\frac{a+x}{a} < \frac{b+x}{b}$
- 27) $\frac{x+3a}{b} + \frac{x+2a}{a} > \frac{b}{a}$
- 28) $3x + \frac{2a-5b}{a} \leq 4x + \frac{3a-6b}{a}$
- 29) $\frac{3x-5}{2a} + 3 > \frac{2(1+x)}{a^2}$
- 30) $\frac{x+a}{a-b} - \frac{x+b}{a+b} \leq \frac{2(x-b)}{a-b} - \frac{x-a}{a+b}$ (a y b son positivos)
- 31) $\frac{a+x}{(a-2)^2} - \frac{1}{a-3} + \frac{x+3}{a^2-5a+6} \geq 0$
- 32) $\frac{(a-3b)x}{b^2-ab} - \frac{b-a}{ab+b^2} + \frac{2(b-a-2bx)}{a^2-b^2} \geq 0$ (a y b son negativos)

Sistemas de inecuaciones lineales

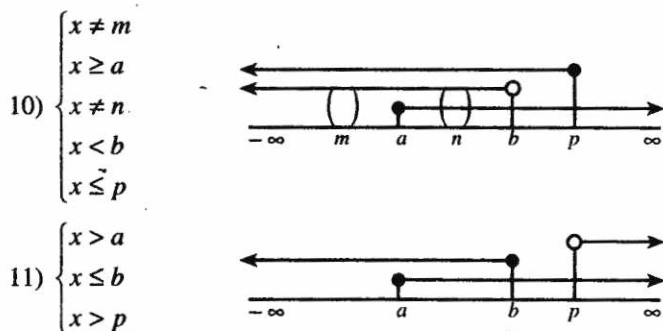
Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones simultáneas. Resolver el sistema consiste en hallar el valor o los valores de la variable que satisfacen *todas y cada una* de las desigualdades planteadas o, por el contrario, en constatar que dichos valores no existen.

Para hallar la solución de un sistema de inecuaciones, se resuelve por separado cada una de las inecuaciones que lo conforman y se analiza al final (aquí será de mucha utilidad la gráfica de las soluciones) si existen soluciones comunes a todas las inecuaciones del sistema.

En el siguiente cuadro damos ejemplos de la expresión analítica, gráfica y de intervalo de las soluciones de algunos sistemas. (Para todos los ejemplos $m < a < n < b < p$).

Ejemplos de solución de sistemas

Forma analítica	Forma gráfica	Forma de intervalo
1) $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \end{cases}$		$[a, b]$
2) $\begin{cases} x > a \\ x \leq b \end{cases}$		$(a, b]$
3) $\begin{cases} x \geq a \\ x < b \end{cases}$		$[a, b)$
4) $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$		(a, b)
5) $\begin{cases} x > a \\ x \geq b \end{cases}$		$[b, \infty)$
6) $\begin{cases} x < a \\ x \leq b \end{cases}$		$(-\infty, a)$
7) $\begin{cases} x \geq m \\ x > a \\ x \leq b \end{cases}$		$[a, b]$
8) $\begin{cases} x \geq a \\ x \leq b \\ x \neq n \end{cases}$		$[a, b] - \{n\}$
9) $\begin{cases} x > m \\ x > a \\ x \neq n \\ x \neq p \end{cases}$		$(a, \infty) - \{n, p\}$



$[a, b) - \{n\}$

NO HAY
SOLUCION

Ejemplo 7

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{2} \leq 3 - \frac{2x-1}{6} \\ \frac{4x-1}{6} + 2x > 13 - \frac{x+1}{4} \end{cases}$$

Llevaremos por separado a su mínima expresión cada una de las inecuaciones del sistema.

Primera inecuación:

$$\frac{x-2}{4} - \frac{x-3}{2} \leq 3 - \frac{2x-1}{6}$$

Multipliquemos la inecuación por 12 para eliminar denominadores:

$$3x - 6 - 6x + 18 \leq 36 - 4x + 2$$

De donde:

$$x \leq 26 \quad (I)$$

Segunda inecuación:

$$\frac{4x-1}{6} + 2x > 13 - \frac{x+1}{4}$$

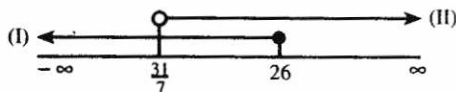
Multipliquemos nuevamente por 12 para eliminar denominadores:

$$8x - 2 + 24x > 156 - 3x - 3$$

De donde:

$$x > \frac{31}{7} \quad (II)$$

Llevamos a un gráfico común las condiciones obtenidas en I y II:



Obviamente, los valores que satisfacen simultáneamente ambas condiciones son los que están en el espacio con doble rayado y corresponden al intervalo:

$$\left(\frac{31}{7}, 26 \right]$$

Ejemplo 8

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{3x-3}{2} - \frac{2-6x}{3} > x \\ \frac{x+1}{4} + \frac{x-4}{3} \leq \frac{x+5}{2} \\ \frac{2-2x}{3} - \frac{5x-15}{2} \geq 1 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$\frac{3x-3}{2} - \frac{2-6x}{3} > x$$

Eliminando denominadores
y reduciendo términos semejantes:

$$9x - 9 - 4 + 12x > 6x$$

$$15x > 13$$

$$x > \frac{13}{15} \quad (I)$$

Segunda inecuación:

$$\frac{x+1}{4} + \frac{x-4}{3} \leq \frac{x+5}{2}$$

$$3x + 3 + 4x - 16 \leq 6x + 30$$

$$x \leq 43 \quad (II)$$

Tercera inecuación:

$$\frac{2-2x}{3} - \frac{5x-15}{2} \geq 1$$

$$4 - 4x - 15x + 45 \geq 6$$

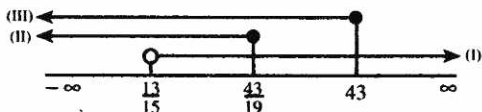
$$-19x \geq -43$$

Cambiando signos y sentido:

$$19x \leq 43$$

$$x \leq \frac{43}{19} \quad (III)$$

Llevamos a un gráfico común las condiciones obtenidas en I, II y III:



Los valores que satisfacen simultáneamente las tres condiciones son los del espacio con triple rayado y corresponden al intervalo:

$$\left(\frac{13}{15}, \frac{43}{19} \right]$$

Ejemplo 9

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x+5)^3 \geq (x+7)(x+2)(x+1) + (x+3)(5x-1) \\ \frac{2x-1}{2} + \frac{3x-1}{3} > \frac{4x-1}{4} + \frac{5x-1}{5} + \frac{6x-1}{6} \\ (x+1)(x+2) + (x+3)(x+4) \leq (x+5)(x+6) + (x+7)(x+8) \\ 2x^2 + 7x + 6 \neq 0 \end{cases}$$

Primera inecuación: $(x+5)^3 \geq (x+7)(x+2)(x+1) + (x+3)(5x-1)$

Desarrollando: $x^3 + 15x^2 + 75x + 125 \geq x^3 + 10x^2 + 23x + 14 + 5x^2 + 14x - 3$

$$38x \geq -114$$

$$x \geq -3 \quad (\text{I})$$

Segunda inecuación: $\frac{2x-1}{2} + \frac{3x-1}{3} > \frac{4x-1}{4} + \frac{5x-1}{5} + \frac{6x-1}{6}$

Eliminando denominadores: $60x - 30 + 60x - 20 > 60x - 15 + 60x - 12 + 60x - 10$

Reduciendo términos: $-60x > 13$

Cambiando signos: $60x < -13$

$$x < -\frac{13}{60} \quad (\text{II})$$

Tercera inecuación: $(x+1)(x+2) + (x+3)(x+4) \leq (x+5)(x+6) + (x+7)(x+8)$

Desarrollando: $x^2 + 3x + 2 + x^2 + 7x + 12 \leq x^2 + 11x + 30 + x^2 + 15x + 56$

Reduciendo términos: $-16x \leq 72$

Cambiando signos: $16x \geq -72$

$$x \geq -\frac{9}{2} \quad (\text{III})$$

El sistema tiene un cuarta condición: $2x^2 + 7x + 6 \neq 0$

Para que la expresión anterior sea distinta de cero, la variable no debe tomar valores que anulen la expresión. Calculamos, por tanto, las raíces o ceros de la expresión para descartar esos valores.

Factorizando:

$$\frac{(2x+4)(2x+3)}{2} \neq 0$$

Simplificando:

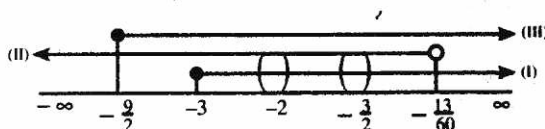
$$(x+2)(2x+3) \neq 0$$

De donde:

$$x \neq -2 \quad x \neq -\frac{3}{2}$$

(IV)

Llevamos a un gráfico común las condiciones obtenidas en I, II y III y señalamos también los valores obtenidos en IV y que deben ser descartados:



Los valores que satisfacen todas las condiciones dadas son las del espacio con triple rayado, a excepción de los obtenidos en IV. La solución del sistema es:

$$\left[-3, -\frac{13}{60}\right] - \left\{-2, -\frac{3}{2}\right\}$$

Ejercicio 136

Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$1) \begin{cases} \frac{3x-5}{2} + 9 \geq \frac{2x+4}{3} + 1 \\ \frac{2x-3}{4} + \frac{x-7}{6} < \frac{x-9}{12} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x+4}{3} - \frac{x-4}{5} > 2 + \frac{3x-2}{15} \\ \frac{3x-4}{7} + x > 2 + \frac{5x-2}{3} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x-1 < x-4 \\ \frac{3x-4}{3} + \frac{x+1}{2} > \frac{3(x+1)}{4} \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x-7 > 3+x \\ \frac{15x-35}{6} \geq \frac{14}{3} + \frac{3x}{4} \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{x+1}{4} + 2x \geq \frac{1-4x}{6} + 13 \\ \frac{x-2}{4} + \frac{2x-1}{6} \leq 3 + \frac{x-3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
6) & \begin{cases} \frac{2(6-x^2)}{3} \leq \frac{x(3-2x)}{3} - 1 \\ \left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) > (x+2)(x-3) + \frac{2}{3} \end{cases} \\
7) & \begin{cases} \frac{3x^2+x-1}{3} \geq (x+1)(x-2) - \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 - \frac{5}{3} < x\left(x + \frac{3}{5}\right) \end{cases} \\
8) & \begin{cases} x(x-1)(x+2) + 5(x-1)^2 \geq (x+2)^3 \\ (3x+2)(2x-1) > (6x+7)(x-2) \\ x^2 - 3x - 4 \neq 0 \end{cases} \\
9) & \begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{x}{4} + x > 23 \\ 3(4-x) - 18x < 5 \\ \frac{5x+30}{3} > x + \frac{10x}{9} \end{cases} \\
10) & \begin{cases} \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6} \leq \frac{1-x}{2} \\ \frac{x-1}{6} \leq \frac{2-x}{3} - \frac{x+1}{4} \\ \frac{x}{20} \geq \frac{x-4}{5} + \frac{x-5}{4} \end{cases} \\
11) & \begin{cases} \frac{x+1}{4} - \frac{x-2}{3} \leq 1 \\ 3(x-2) - 4(x-1) < 9x \\ 5(x-3) + 3(x-5) \geq 15(x-15) + 6x \\ x^2 + 66 \neq 17x \end{cases} \\
12) & \begin{cases} 6(x+3)(x+2) + 4x \leq (2x+7)(3x+8) + 1 \\ \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \frac{x+3}{4} \geq \frac{77}{4} \\ (x-1)^2 + (x-2)^2 < (2x+1)(x-3) \\ (2x+3)(3x-1) > (x+4)^2 + (5x+1)(x+3) \end{cases} \\
13) & \begin{cases} \frac{x+1}{2} + \frac{3x-4}{5} + \frac{1}{8} \leq \frac{6x+7}{8} \\ \frac{10x+1}{3} - \frac{3x-1}{5} > 2x+2 \\ 29x \neq 6x^2 + 35 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$14) \begin{cases} \frac{2x-6}{5} - \frac{x-1}{10} < \frac{x}{5} \\ \frac{2-x}{3} - \frac{2x-3}{6} \leq 0 \\ x^2 - 10x - 24 \neq 0 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + x\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) - x^3 \geq \frac{x}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{8}{27} \\ (x-1)^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(2x-1) + x + \frac{7}{2} > 3 \\ \frac{3x-7}{8} - \frac{x+5}{4} \geq \frac{x}{3} - 4 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} -\frac{x+5}{15} + \frac{2}{3} - \frac{x+1}{3} \geq -\frac{4x-5}{15} - \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \\ \frac{x}{3} - \left\{ -\frac{x}{2} - \left[\frac{x-1}{3} - \left(\frac{x+1}{2} - \frac{2x}{3} \right) \right] \right\} \leq 0 \\ 2x^2 + 13x - 7 \neq 0 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - x\left(x + \frac{5}{3}\right) + \frac{x}{2} \leq 3\left(x - \frac{4}{3}\right) + \frac{x-8}{8} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + x + \frac{1}{6} > \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{9} \\ \frac{3x}{10} - 2 < \frac{x}{5} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \frac{3x-2}{4} - \frac{2x-1}{6} \leq \frac{2x+1}{2} + \frac{1}{3} \\ (x+2)(x+5) + x \leq (x-2)^2 + 18 \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 137

Discutir los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$1) \begin{cases} ax > 0 \\ 2x - 3 < 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 3 < a + 1 \\ ax > a \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{x-5}{a} + 3 \geq \frac{4}{a} \\ \frac{x+2}{b} - 1 \geq \frac{2x}{b} \end{cases} \quad (a \text{ y } b \text{ negativos})$$

$$4) \begin{cases} x-1 > \frac{x}{a} \\ \frac{x+1}{a} > x \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{a-x}{b} > \frac{x-b}{a} \\ bx > ax \end{cases} \quad (a \text{ y } b \text{ positivos})$$

$$6) \begin{cases} \frac{x+1}{a+b} < \frac{x-1}{a-b} \\ \frac{a-x}{a} > \frac{b-x}{b} \end{cases} \quad (a \text{ y } b \text{ positivos})$$

$$7) \begin{cases} \frac{x-ab}{ab} > 1 \\ \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} < \frac{a^4-b^4}{a^2b^2} \end{cases} \quad (a \text{ y } b \text{ positivos})$$

$$8) \begin{cases} 3x-4a > x-a \\ x-2a < 2x-3a \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 5x-a \geq x+5a \\ 7x+a \leq x-7a \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{x+a}{2} \geq \frac{x-a}{3} \\ \frac{x+2a}{4} < \frac{x+3a}{3} \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \frac{2x+a}{3} + 1 < \frac{3x-a}{4} \\ \frac{3x-a}{3} + 1 > \frac{x+a}{2} \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{5x-a+2}{3} > \frac{x+a-1}{2} \\ 4x+a-1 \leq \frac{x-2a+3}{2} \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 5ax-3a^2 < 4ax+3a^2 \\ 7a^2-2ax < 5a^2+ax \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{x+3}{a} < \frac{x-3}{b} \\ \frac{x-4}{b} < \frac{x+4}{a} \end{cases} \quad (a \text{ y } b \text{ de igual signo})$$

$$15) \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{x}{a+1} > \frac{1}{a} \\ \frac{x+2}{a+1} < 1 + \frac{1}{a+1} \end{cases} \quad (a > 0)$$

$$16) \begin{cases} \frac{x}{a+1} - \frac{x}{a-1} < \frac{1}{a^2-1} \\ \frac{x}{(a+1)^2} + \frac{3x}{2(a+1)} > \frac{5}{2(a+1)} \end{cases} \quad (a > 1)$$

INECUACIONES DE VALOR ABSOLUTO

Recordemos que el valor absoluto de una cantidad se determina de acuerdo con lo que sigue:

$ a = a$	si $a > 0$
$ a = -a$	si $a < 0$

Por ejemplo

$$|8| = 8$$

$$|-11| = -(-11) = 11$$

$$|9| = 9$$

$$|-\frac{3}{2}| = \frac{3}{2}$$

Los valores que satisfacen la ecuación elemental

$$|x| = k$$

son $x = k$ y $x = -k$

$ x = k$	$\rightarrow$	$x = \pm k$
-----------	---------------	-------------

Por ejemplo, la ecuación $|x| = 10$ tiene dos soluciones, que son $x = \pm 10$.

Lo dicho anteriormente es aplicable también a un polinomio $P_{(x)}$:

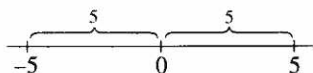
$ P_{(x)} = k$	$\rightarrow$	$P_{(x)} = \pm k$
-----------------	---------------	-------------------

Por ejemplo la ecuación $|x-3| = 5$ tiene dos soluciones:

$$x-3 = 5, \quad \text{de donde } x = 8$$

$$\text{y } x-3 = -5, \quad \text{de donde } x = -2.$$

El valor absoluto de un número real x puede interpretarse geoméricamente como la distancia del punto representado por x al origen de la recta real. Por ejemplo, si $|x| = 5$, existen dos puntos, -5 y 5 , cuya distancia al origen es igual a 5.



Inecuaciones de la forma $|x| < k$

Si x es un número real que satisface la condición

$$|x| < 5 \quad (\text{I})$$

x puede ser cualquier número del intervalo $(-5, 5)$. Cualquier número que sea simultáneamente menor que 5 y mayor que -5 es solución de la inecuación (I). Podemos, pues, plantear lo que sigue:

$$|x| < 5 \rightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x > -5 \end{cases} \quad \text{o también} \quad -5 < x < 5$$

Generalizando,

$$|x| < k \rightarrow \begin{cases} x < k \\ x > -k \end{cases} \quad \text{o también} \quad -k < x < k$$

y, obviamente, entonces:

$$|x| \leq k \rightarrow \begin{cases} x \leq k \\ x \geq -k \end{cases} \quad \text{o también} \quad -k \leq x \leq k$$

Geométricamente, la inecuación $|x| < 5$ se interpreta como la condición que debe satisfacer todo punto de la recta real cuya distancia al origen es menor que 5.

Análogamente

$$|P_{(x)}| \leq k \rightarrow \begin{cases} P_{(x)} \leq k \\ P_{(x)} \geq -k \end{cases} \quad \text{o también} \quad -k \leq P_{(x)} \leq k \quad (1^a)$$

y así mismo

$$|P_{(x)}| \leq Q_{(x)} \rightarrow \begin{cases} P_{(x)} \leq Q_{(x)} \\ P_{(x)} \geq -Q_{(x)} \end{cases} \quad \text{o también} \quad -Q_{(x)} \leq P_{(x)} \leq Q_{(x)} \quad (1a^1)$$

Inecuaciones de la forma $|x| > k$

Si x es un número real que satisface la condición

$$|x| > 5 \quad (\text{II})$$

x puede ser cualquier número mayor que 5, es decir, perteneciente al intervalo $(5, \infty)$, o cualquier número menor que -5 , es decir, perteneciente al intervalo $(-\infty, -5)$.

Podemos expresar esto de la siguiente forma:

$$|x| > 5 \rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < -5 \end{cases}$$

Obsérvese que no utilizamos la llave con la que usualmente se indica un sistema, pues en este caso **no se trata de un sistema**: solución de la inecuación $|x| > 5$ son los valores que satisfacen la condición $x > 5$ y, **además**, los que satisfacen la condición $x < -5$.

Generalizando,

$$|x| > k \rightarrow \begin{cases} x > k \\ x < -k \end{cases}$$

y también:

$$|x| \geq k \rightarrow \begin{cases} x \geq k \\ x \leq -k \end{cases}$$

Geoméricamente, la inecuación $|x| > 5$ se interpreta como la condición que debe satisfacer todo punto de la recta real cuya distancia al origen es mayor que 5.

Análogamente

$$|P_{(x)}| \geq k \rightarrow \begin{cases} P_{(x)} \geq k \\ P_{(x)} \leq -k \end{cases} \quad (2^1)$$

y también

$$|P_{(x)}| \geq Q_{(x)} \rightarrow \begin{cases} P_{(x)} \geq Q_{(x)} \\ P_{(x)} \leq -Q_{(x)} \end{cases} \quad (2a^1)$$

Observación: Hablando en términos de unión y de intersección, siempre que utilicemos el símbolo $\{$, se tratará de un sistema y la solución será la intersección de los conjuntos-solución de cada una de las inecuaciones del sistema, es decir, los elementos comunes a todos ellos.

En cambio, cuando utilicemos el símbolo $[$, las inecuaciones agrupadas no formarán sistema y la solución será la unión de los conjuntos-solución de cada una de las inecuaciones. Para hacer una distinción, en este último caso no hablaremos de sistema sino de *agrupación*.

Propiedad: Dado que

$$|k| = |-k| \quad \text{y también que} \quad |P_{(x)}| = |-P_{(x)}|,$$

podemos cambiar el signo de la expresión que está entre las barras de valor absoluto sin que se altere por eso el conjunto-solución de la inecuación.

Por ejemplo, la inecuación $|5 - 2x| \geq 4$ es equivalente a esta otra: $|2x - 5| \geq 4$.

Ejemplo 10

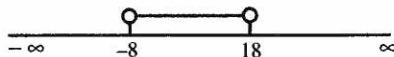
Resolver la inecuación: $|x - 5| < 13$

Utilizando (1¹): $-13 < x - 5 < 13$

Sumando 5 a cada uno de los tres miembros de la inecuación:

$$-8 < x < 18$$

Gráficamente:



Solución:

$$(-8, 18)$$

Ejemplo 11

Resolver: $\left| \frac{7-9x}{2} \right| \leq 19$

Para trabajar con más comodidad, cambiamos el signo de la expresión entre barras:

$$\left| \frac{9x-7}{2} \right| \leq 19$$

Utilizando (1):

$$-19 \leq \frac{9x-7}{2} \leq 19$$

Multiplicando por 2:

$$-38 \leq 9x-7 \leq 38$$

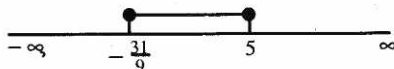
Sumando 7:

$$-31 \leq 9x \leq 45$$

Dividiendo por 9:

$$-\frac{31}{9} \leq x \leq 5$$

Gráficamente:



Solución:

$$\left[-\frac{31}{9}, 5 \right]$$

Ejemplo 12

Resolver: $|7x-3| \leq 3x+2$

Utilizando la primera forma de expresión de (1a), transformamos la inecuación en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 7x-3 \leq 3x+2 \\ 7x-3 \geq -3x-2 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$7x-3 \leq 3x+2$$

$$4x \leq 5$$

$$x \leq \frac{5}{4} \quad (\text{I})$$

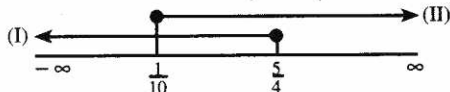
Segunda inecuación:

$$7x-3 \geq -3x-2$$

$$10x \geq 1$$

$$x \geq \frac{1}{10} \quad (\text{II})$$

Gráficamente:



Solución (espacio con doble rayado):

$$\left[\frac{1}{10}, \frac{5}{4} \right]$$

Ejemplo 13

$$\text{Resolver: } \left| \frac{3x+17}{5} \right| > 3$$

Utilizando (2^f) transformamos la inecuación en la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} \frac{3x+17}{5} > 3 \\ \frac{3x+17}{5} < -3 \end{cases}$$

Primera inecuación

$$\frac{3x+17}{5} > 3$$

$$3x+17 > 15$$

$$3x > -2$$

$$x > -\frac{2}{3}$$

Intervalo de solución:

$$\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Segunda inecuación

$$\frac{3x+17}{5} < -3$$

$$3x+17 < -15$$

$$3x < -32$$

$$x < -\frac{32}{3}$$

Intervalo de solución:

$$\left(-\infty, -\frac{32}{3}\right)$$

La solución de la agrupación es la unión de las soluciones de cada inecuación:

$$\left(-\infty, -\frac{32}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$$

Ejemplo 14

$$\text{Resolver: } |5x+1| \geq |2x-3|$$

Utilizando (2a^f) transformamos la inecuación en la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} 5x+1 \geq |2x-3| \\ 5x+1 \leq -|2x-3| \end{cases}$$

Primera inecuación

$$5x+1 \geq |2x-3|$$

Leyendo de derecha a izquierda:

$$|2x-3| \leq 5x+1$$

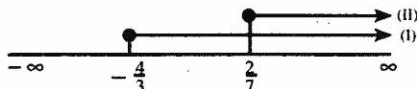
Utilizando (1a^f) transformamos la inecuación en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x-3 \leq 5x+1 \\ 2x-3 \geq -5x-1 \end{cases}$$

Reduciendo a la mínima expresión:

$$\begin{cases} x \geq -\frac{4}{3} & \text{(I)} \\ x \geq \frac{2}{7} & \text{(II)} \end{cases}$$

Llevamos a un gráfico las condiciones I y II:



Solución: $\left[\frac{2}{7}, \infty\right)$

Segunda inecuación: $5x + 1 \leq -|2x - 3|$

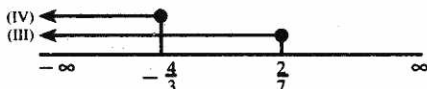
Trasponiendo términos: $|2x - 3| \leq -5x - 1$

Utilizando (1a¹): $\begin{cases} 2x - 3 \leq -5x - 1 \\ 2x - 3 \geq 5x + 1 \end{cases}$

Reduciendo a la mínima expresión:

$$\begin{cases} x \leq \frac{2}{7} & \text{(III)} \\ x \leq -\frac{4}{3} & \text{(IV)} \end{cases}$$

Gráficamente:



Solución: $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$

La solución de la inecuación original es la unión de los conjuntos-solución de las inecuaciones de la agrupación:

$$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{7}, \infty\right)$$

Ejemplo 15

Resolver: $5 \leq |6x - 7| < 8$

Descomponemos la triple desigualdad en el siguiente sistema:

$$\begin{cases} |6x - 7| < 8 \\ |6x - 7| \geq 5 \end{cases} \quad \text{(A)}$$

Primera inecuación: $|6x - 7| < 8$

Utilizando (1¹): $-8 < 6x - 7 < 8$

Sumando 7 a cada miembro: $-1 < 6x < 15$

Dividiendo por 6 cada miembro y simplificando:

$$-\frac{1}{6} < x < \frac{5}{2}$$

(I)

Segunda inecuación:

$$|6x - 7| \geq 5$$

Utilizando (24):

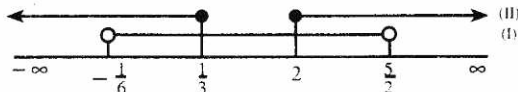
$$\begin{cases} 6x - 7 \geq 5 \\ 6x - 7 \leq -5 \end{cases}$$

Reduciendo a la mínima expresión:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$$

(II)

Gráficamente:



La solución del sistema (A) es:

$$\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right)$$

Ejercicio 138

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $|x| < 7$

2) $|x| \geq 2$

3) $|x - 3| < 9$

4) $|x + 5| \leq 3$

5) $|x - 4| > 2$

6) $|x + 3| \geq 0$

7) $|2x + 5| \geq 11$

8) $|3x + 1| < 7$

9) $|5x - 1| < -3$

10) $\left|\frac{2x + 5}{3}\right| \leq 7$

11) $\left|\frac{5x - 2}{4}\right| \geq 3$

12) $\left|\frac{7x + 1}{3}\right| > 2$

13) $|-x| \leq 7$

14) $|3 - x| > 5$

15) $|5 - 2x| < 0,4$

16) $|11 - x| \leq 15$

17) $|3 - 4x| \leq 0,002$

18) $\left|\frac{4x - 3}{7}\right| \geq 1$

19) $\left|\frac{5(x - 3) + 2(x + 4)}{3}\right| > 7$

20) $\left|\frac{2(5 - x) - 3(x + 5)}{5}\right| \leq 10$

21) $|(x + 2)^2 - (x + 3)(x - 4) + 10| < 4$

22) $|3x - 2| > 2x + 1$

23) $|x + 5| \leq 4x - 8$

24) $|5x - 2| < 2x + 4$

25) $|x + 11| \geq 3x - 2$

26) $\left|\frac{2 - 3x}{5}\right| \leq \frac{5 - x}{2}$

27) $\left|\frac{5 + 4x}{3}\right| > \frac{5 + 7x}{5}$

$$28) \left| \frac{2x+1}{3} \right| \geq -3x-7$$

$$29) \frac{9x-2}{4} > |4x-3|$$

$$30) x+4 \leq |x+3|$$

$$31) x+4 \geq |x+3|$$

$$32) |x+4| \geq |x+3|$$

$$33) |x+4| \leq |x+3|$$

$$34) |3-2x| \leq |x+4|$$

$$35) |5x-2| \leq |3x+1|$$

$$36) |7x+3| \leq |2-3x|$$

$$37) |7x+3| \leq 3x-2$$

$$38) 2 < |x| < 5$$

$$39) 1 < |x| \leq 4$$

$$40) 4 \leq |x+3| \leq 8$$

$$41) 5 \leq |2x-4| < 6$$

$$42) 3 < \left| \frac{1-4x}{3} \right| \leq 11$$

$$43) 3-x < |2x+5| \leq 5x-1$$

$$44) 3 < 5-x \leq |2x-1|$$

$$45) |5x-4| \leq 3x+2 \leq 4x-1$$

$$46) |3x+7| > |2x-1| + 2$$

$$47) |9x-3| \geq |2x+5| - x + 2$$

$$48) |5-7x| + |2x+3| \geq 10x+1$$

$$49) |x| + |x+1| \leq |x+2|$$

$$50) |2x+1| + |2x+3| + |2x+5| \geq 7$$

Ejercicio 139

Resolver los siguientes sistemas y agrupaciones:

$$1) \begin{cases} 3|2x-3| + x \geq 5 \\ |3x-2| - x < 4 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{5-3x}{2} < 3x+2 \\ |8-5x| \geq 2x+1 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \left| 3x + \frac{1}{2} \right| - \frac{7}{2} \leq x \\ |4x-1| \geq 5 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} |6x+1| \geq |2x+3| \\ |5x-7| < 3x+5 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3 \leq |4x+2| < 10 \\ |2x-3| < 7 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} |2x-1| \leq x+11 \\ |x+4| - |x+2| \leq |x+3| \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} |3x+4| \geq 2x+6 \\ |4x-8| < 3x+6 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} |x+4| < |x+5| \\ |x+6| \geq 2 \end{cases}$$

INECUACIONES CUADRATICAS

Son inecuaciones en la forma

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

$$(a > 0)$$

Estudiaremos sólo los casos en los que a es una cantidad positiva, pues en los

casos en los que sea negativa basta cambiar signo a la expresión y sentido a la inecuación y estamos en uno de los casos señalados arriba.

Estudiaremos las inecuaciones cuadráticas a través de ejemplos concretos.

1) Inecuaciones con expresiones cuadráticas que tienen dos raíces reales.

a) PRIMER METODO: mediante el estudio de los signos de los factores

Por álgebra elemental sabemos que toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ en la que se cumple que $b^2 - 4ac > 0$, tiene dos raíces reales x_1 y x_2 que son los valores que anulan la expresión. Si lo anterior es cierto, la expresión puede ser factorizada y esto permite analizar la inecuación cuadrática.

Ejemplo 16

Resolver: $x^2 - 6x + 8 > 0$

Factorizamos el miembro de la izquierda:

$$(x - 4)(x - 2) > 0$$

Razonamos de la siguiente forma: para que el producto de dos factores (que es lo que tenemos en el miembro de la izquierda) sea positivo, es necesario que los dos factores sean del mismo signo, ambos positivos o ambos negativos.

Los valores que satisfacen la inecuación son, por tanto, los que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

y el sistema

$$\begin{cases} x - 4 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

En otras palabras, los que satisfacen la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 4 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 4 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Llevando a la mínima expresión:

$$\begin{cases} \begin{cases} x > 4 \\ x > 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4 \\ x < 2 \end{cases} \end{cases}$$

Soluciones de los sistemas son, respectivamente, los intervalos:

$$(4, \infty) \text{ y } (-\infty, 2)$$

Y la solución de la inecuación original:

$$(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$$

Ejemplo 17

Resolver: $x^2 - 9x + 18 \leq 4$

Reduciendo términos: $x^2 - 9x + 14 \leq 0$

Factorizando: $(x - 7)(x - 2) \leq 0$

Para que el producto de dos factores sea negativo o nulo, éstos deben ser de distinto signo o nulos. La solución de la inecuación es, pues, la de la agrupación

$$\begin{cases} x - 7 \geq 0 \\ x - 2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x - 7 \leq 0 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases}$$

Llevando a la mínima expresión:

$$\begin{cases} x \geq 7 \\ x \leq 2 \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} x \leq 7 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

El primer sistema de la agrupación no tiene solución. El del segundo sistema y, en definitiva, de la agrupación, es el intervalo

$$[2, 7]$$

Ejemplo 18

Resolver: $2 + x - 6x^2 > 0$

Ordenamos y cambiamos signo para que el término cuadrático sea positivo:

$$6x^2 - x - 2 < 0$$

Factorizando: $(3x - 2)(2x + 1) < 0$

La solución de la inecuación es la de la agrupación

$$\begin{cases} 3x - 2 > 0 \\ 2x + 1 < 0 \end{cases}$$

Llevando a la mínima expresión:

$$\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución:

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$$

b) SEGUNDO METODO: mediante el estudio de la función cuadrática

Mucho más práctico es resolver las inecuaciones cuadráticas mediante el estudio de la función cuadrática. Este método será casi indispensable cuando estudiemos las inecuaciones de grado superior al segundo.

Ejemplo 19

Resolver: $x^2 + 3x - 18 \geq 0$

Estudiamos el comportamiento de la parábola

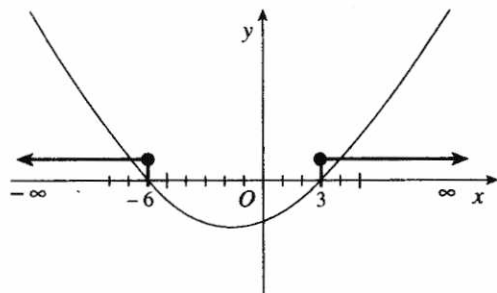
$$y = x^2 + 3x - 18$$

Factorizamos el miembro de la derecha:

$$y = (x + 6)(x - 3)$$

Las raíces -6 y 3 del miembro de la derecha son las que anulan la función y determinan los puntos en los que la parábola corta el eje de abscisas. Eso significa que la parábola tiene aproximadamente la forma que se ve en la figura.

La gráfica nos permite verificar por simple inspección que la función es positiva en los intervalos $(-\infty, -6)$ y $(3, \infty)$, negativa en el intervalo $(-6, 3)$ y nula en los puntos de intersección con el eje de abscisas.



Como la expresión original es

$$x^2 + 3x - 18 \geq 0$$

la solución de la inecuación serán los intervalos en los que la función es positiva o nula.

Solución:

$$(-\infty, -6] \cup [3, \infty)$$

Nota: Obsérvese que nuestro gráfico es aproximado porque lo único que nos interesa es conocer en qué puntos la función cambia de signo. En lo sucesivo prescindiremos hasta de señalar los ejes coordenados.

Ejemplo 20

Resolver: $2 - 3x^2 - 5x > 0$

Ordenamos y cambiamos signos para que el término cuadrático sea positivo:

$$3x^2 + 5x - 2 < 0$$

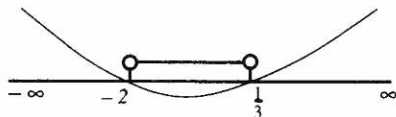
Estudiamos el comportamiento de la parábola

$$y = 3x^2 + 5x - 2$$

Factorizando:

$$y = (x + 2)(3x - 1)$$

La parábola corta el eje de abscisas en -2 y $\frac{1}{3}$. Su gráfica aproximada se muestra en la figura.



La función es positiva en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(\frac{1}{3}, \infty)$; negativa en el intervalo $(-2, \frac{1}{3})$ y se anula en los puntos de intersección con el eje de abscisas.

Como la inecuación que estamos resolviendo es

$$3x^2 + 5x - 2 < 0$$

la solución de la inecuación es el intervalo en el que la función es negativa.

Solución:

$$(-2, \frac{1}{3})$$

Ejemplo 21

Resolver: $2x^2 - 8x + 3 \geq 0$

Estudiamos el comportamiento de la parábola

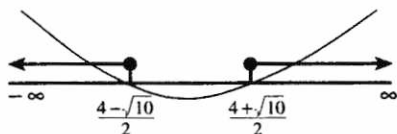
$$y = 2x^2 - 8x + 3$$

Las raíces del miembro de la derecha son

$$\frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

(no pudimos factorizar por simple inspección y tuvimos que recurrir a la fórmula de la ecuación de segundo grado para hallarlas).

La gráfica aproximada de la parábola se muestra en la figura.



Solución de la inecuación son los intervalos en los que la función es positiva o se anula:

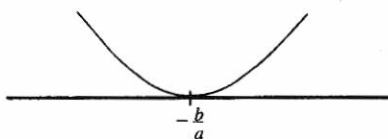
$$\left(-\infty, \frac{4-\sqrt{10}}{2}\right] \cup \left[\frac{4+\sqrt{10}}{2}, \infty\right)$$

2) Inecuaciones con expresiones cuadráticas que tienen una sola raíz real repetida

Tienen la forma $(ax+b)^2 \geq 0$ ó $(ax+b)^2 \leq 0$.

El miembro de la izquierda de estas inecuaciones, por tratarse de un cuadrado perfecto, es siempre positivo.

En consecuencia, la gráfica de la función $y = (ax+b)^2$ se desarrolla por encima del eje de abscisas y sólo se anula para $x = -\frac{b}{a}$, tal como se aprecia en la figura.



Los casos posibles se reducen a los cuatro siguientes:

$$(ax+b)^2 > 0 \quad \text{Solución:} \quad \mathbb{R} - \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

$$(ax+b)^2 \geq 0 \quad \text{Solución:} \quad \mathbb{R}$$

$$(ax+b)^2 < 0 \quad \text{No hay solución}$$

$$(ax+b)^2 \leq 0 \quad \text{Solución:} \quad \left\{-\frac{b}{a}\right\}$$

Ejemplo 22

Resolver: $12x < 4x^2 + 9$

Trasponiendo términos: $-4x^2 + 12x - 9 < 0$

Cambiando signos: $4x^2 - 12x + 9 > 0$

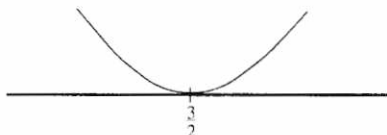
Factorizando: $(2x-3)^2 > 0$

Estudiamos la parábola

$$y = (2x - 3)^2$$

La parábola tiene una sola raíz repetida.

Su gráfica aproximada:



La función es siempre positiva a excepción del punto en el que se anula. Como la inequación que estamos resolviendo es

$$(2x - 3)^2 > 0$$

la solución es el intervalo $(-\infty, \infty)$ con la excepción del valor $\frac{3}{2}$ que anula la función.

Solución:

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

Ejemplo 23

Resolver: $25x^2 - 10\sqrt{2}x + 2 \leq 0$

Factorizando:

$$(5x - \sqrt{2})^2 \leq 0$$

El miembro de la izquierda en ningún momento es negativo y sólo se anula para

$$x = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

La solución, por tanto, es:

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{5} \right\}$$

3) Inecuaciones con expresiones cuadráticas que no tienen raíces reales

Una función $y = ax^2 + bx + c$ en la que $b^2 - 4ac$ es menor que cero, no tiene raíces reales y, en consecuencia, no interseca el eje de abscisas. Eso significa que la parábola que la representa se desarrolla por encima o por debajo del eje de abscisas dependiendo de que a sea positiva o negativa, respectivamente. Como en nuestro estudio hacemos siempre las transformaciones necesarias para que a sea positiva, la parábola se desarrolla por encima del eje horizontal y la función es siempre positiva. Las consecuencias son obvias.

Ejemplo 24

Resolver: $x^2 + 2x + 7 \geq 0$

Al estudiar la función

$$y = x^2 + 2x + 7$$

constatamos que el miembro de la derecha no tiene raíces reales. La parábola, por tanto, se desarrolla por encima del eje de abscisas y la función es siempre positiva. Cualquier valor de x satisface, entonces, la inecuación y la solución es:

$\mathbb{R}$



Ejemplo 25

Resolver: $2x^2 - x + 11 \leq 0$

Nuevamente, la función

$$y = 2x^2 - x + 11$$

no tiene raíces reales y la función es siempre positiva.

No hay, en consecuencia, valores que satisfagan la inecuación.

No hay solución

4) Inecuaciones de la forma $x^2 \geq a$ ($a > 0$)

La expresión $x^2 - a$ tiene dos raíces reales por lo que estas inecuaciones pueden resolverse como las del primer tipo (pág. 583). Sin embargo es más sencillo resolverlas si se considera que

$x^2 \geq a$	$\rightarrow$	$ x \geq \sqrt{a}$	(3')
$x^2 \leq a$	$\rightarrow$	$ x \leq \sqrt{a}$	

Ejemplo 26

Resolver: $4x^2 - 9 < 0$

Despejando x :

$$x^2 < \frac{9}{4}$$

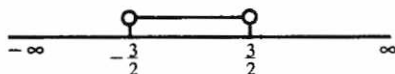
Utilizando (3') transformamos la inecuación dada en ésta:

$$|x| < \frac{3}{2}$$

Utilizando (1'):

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2}$$

Gráficamente:



Solución:

$$\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo 27

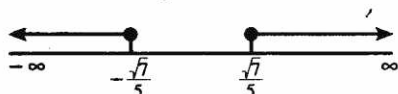
Resolver: $25x^2 - 7 \geq 0$

Despejando x : $x^2 \geq \frac{7}{25}$

Utilizando (3^a): $|x| \geq \frac{\sqrt{7}}{5}$

Utilizando (2^a):
$$\begin{cases} x \geq \frac{\sqrt{7}}{5} \\ x \leq -\frac{\sqrt{7}}{5} \end{cases}$$

Gráficamente:



Solución:

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{5} \right] \cup \left[\frac{\sqrt{7}}{5}, \infty \right)$$

Ejercicio 140

Resolver las siguientes inecuaciones:

- | | |
|----------------------------|--|
| 1) $x^2 - 8x + 15 < 0$ | 19) $16x^2 - 25 \geq 0$ |
| 2) $x^2 + 6x - 6 \geq 1$ | 20) $\frac{1}{4} > x - x^2$ |
| 3) $9x^2 + 9x + 2 > 0$ | 21) $\frac{x^2 - 7x - 3}{7} \leq 3$ |
| 4) $4x^2 + 2x + 3 > 0$ | 22) $\frac{x^2 + x + 2}{7} > \frac{1 - x^2}{3}$ |
| 5) $4x^2 + 2x - 3 \leq 0$ | 23) $\left[\frac{x-1}{6} - \frac{2x+3}{2} - \frac{1-x}{3} \right]^2 < \frac{x}{12}$ |
| 6) $49x^2 - 9 \leq 0$ | 24) $\frac{x-1}{3} - \frac{x(x+1)}{6} \leq \frac{x-1}{2}$ |
| 7) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ | 25) $(x-1)(x-3) \geq (2x+1)^2$ |
| 8) $12x < x^2 + 25$ | 26) $(x-2)^2 - (2x+1)^2 < 0$ |
| 9) $x^2 + x + 1 \geq 0$ | 27) $x(x-2) - x + 6 < x(2x-1)$ |
| 10) $4x^2 - 11 > 0$ | 28) $\frac{3x}{5} - \frac{(x+1)^2}{4} \geq \frac{x}{5}$ |
| 11) $30x - 9x^2 - 25 < 0$ | 29) $\frac{x(x-1)}{3} + \frac{1}{7} \leq \frac{x(2x-1)}{7} - \frac{1}{21}$ |
| 12) $x^2 - 10x + 25 < 0$ | 30) $\frac{(x+6)^2 - (x+2)^2}{4} > \frac{(x+4)^2}{3} - 2x$ |
| 13) $5 - 7x^2 > 0$ | |
| 14) $x^2 + 17 \leq 0$ | |
| 15) $x + 110 \geq x^2$ | |
| 16) $5x^2 + 3x - 4 \geq 0$ | |
| 17) $2x + 11 - x^2 > 0$ | |
| 18) $66x < 9 + 11x^2$ | |

$$31) \quad x(x-1)^2 + x^2 > (x-1)^3 - (x-2)$$

$$32) \quad \frac{x-5}{5} - \frac{x-3}{3} \leq \frac{2x+3}{10} - \frac{5}{6} - \frac{x^2}{30}$$

$$33) \quad (x-1)(x+2)(x+1) > (x-2)(x-3)(x+2)$$

$$34) \quad x^2 + \frac{7}{4} - \frac{10x}{3} > \frac{2x}{3} - 2x^2 - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$35) \quad (x+3)\left[(x-1)^2 - x\left(x + \frac{3}{4}\right)\right] + \frac{x(29+7x)}{4} \geq -6$$

Ejemplo 28

Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} x^2 + 4x - 77 \leq 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$x^2 + 4x - 77 \leq 0$$

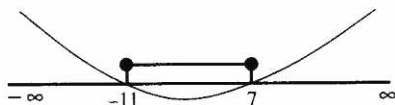
Estudiamos la función

$$y = x^2 + 4x - 77$$

Factorizamos:

$$y = (x+11)(x-7)$$

Gráfica:



Solución (valores negativos):

$$[-11, 7]$$

(I)

Segunda inecuación:

$$x^2 - 2x > 0$$

Estudiamos la función

$$y = x^2 - 2x$$

Factorizamos:

$$y = x(x-2)$$

Gráfica:

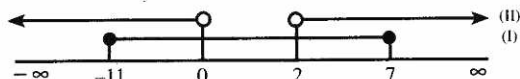


Solución (valores positivos):

$$(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$$

(II)

Llevamos a un mismo gráfico los intervalos I y II:



Solución del sistema:

$$[-11, 0) \cup (2, 7]$$

Ejemplo 29

Resolver la siguiente ecuación: $|x^2 + 2x - 18| \geq 17$

Utilizando (2^a) transformamos la inecuación en la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 18 \geq 17 \\ x^2 + 2x - 18 \leq -17 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$x^2 + 2x - 18 \geq 17$$

Reduciendo términos:

$$x^2 + 2x - 35 \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = x^2 + 2x - 35$$

Factorizamos:

$$y = (x + 7)(x - 5)$$

Gráfica:



Solución (valores positivos):

$$(-\infty, -7] \cup [5, \infty) \quad (I)$$

Segunda inecuación:

$$x^2 + 2x - 18 \leq -17$$

Reduciendo términos:

$$x^2 + 2x - 1 \leq 0$$

Estudiamos la función

$$y = x^2 + 2x - 1$$

Hallamos los puntos de intersección usando la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

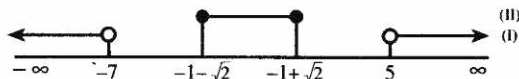
Gráfica:



Solución (valores negativos):

$$[-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \quad (II)$$

Llevamos a un mismo gráfico los intervalos I y II:



La solución de la inecuación original es la de la agrupación:

$$(-\infty, -7] \cup [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \cup [5, \infty)$$

Ejercicio 141

Resolver las inecuaciones, los sistemas y las agrupaciones que se proponen en los siguientes ejercicios:

$$1) \begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x^2 + 3x - 2 \leq 0 \\ 12x^2 - 7x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - 3x < 0 \\ x^2 + x - 20 \geq 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x^2 + 8x - 16 > 0 \\ 2x^2 + x - 1 \leq 0 \end{cases}$$

$$5) |x^2 - 3x| \leq x - 3$$

$$6) |x^2 - 5x + 4| < 1$$

$$7) \begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ x^2 - 7x < (x-2)^2 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x^2 - 7x + 12 > 0 \\ x^2 - 7x + 10 \leq 0 \end{cases}$$

$$9) |x^2 + 7x + 11| \geq 1$$

$$10) \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 + 3x - 28 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$11) |2x^2 - 15x + 11| > 7$$

$$12) \begin{cases} x^2 \geq -x \\ x^2 < 4 \\ x^2 < 3 - 2x \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2x^2 - x - 15 \geq 0 \\ 2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 2x^2 - x - 15 \geq 0 \\ 2x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$15) 1 \leq |x^2 + x - 7| \leq 5$$

$$16) \begin{cases} (x+4)(x-4) < 33 \\ (x-3)^2 + (1-2x)^2 > 5(27-2x) \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \frac{2x-3}{2} - \frac{5x-2}{3} < 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{x-4}{2} + \frac{x+2}{4} < 3 \\ x(x-2) > 3 \end{cases}$$

$$18) 1 < |x^2 + x - 5| \leq 2x + 1$$

$$19) \begin{cases} \frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} > 1 \\ x^2 - 6x + 7 < 0 \\ x^2 - 8x + 15 > 0 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 2x(x+5) > 3(x+1)^2 \\ x^2 + 4x + 3 > 3(x-1)^2 \\ x^2 - 16 < (2x-7)^2 \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} (3x-5)(2x-5) \geq (x+3)(x-1) \\ 4(x^2-1) < 4x-1 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 2x(x-\frac{1}{2}) + 2x - \frac{1}{3} > 4(x-\frac{1}{3}) \\ (x-1)^2 + 1 < 3(1-x) \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} x(x-3) > 3\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \\ x\left(x-\frac{7}{3}\right) + 2 \geq 5 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$24) 3x - 10 < |x^2 + 3x - 35| \leq 25 - x$$

Ejercicio 142

Discutir las siguientes inecuaciones:

1) $x^2 - 5ax > 0$

2) $x^2 + 3ax \leq 0$

3) $x^2 - 7ax + 12a^2 < 0$

4) $x^2 - a > 0$

5) $(x-a)(x-b) > 0$

6) $(x-a)(x-b) \leq 0$

7) $x^2 - 9a^2 > 0$

8) $x^2 - 25a^2 \leq 0$

9) $x^2 - 2(a-b)x - 3(a-b)^2 < 0$

10) $x^2 - b^2 < a^2$

11) $-x^2 < (a-b)x$

12) $ax^2 - b > 0$

13) $x^2 - (a+b)x > 0$

14) $x^2 - (a-b)x < 0$

15) $x^2 - 8ax + 16a^2 > 0$

16) $\frac{x^2}{a} + b \geq 0$

17) $(a-1)x^2 > a^2 - 1$

18) $(x+a)(x-a) + (x+b)(x-b) > (x+c)(x-c)$

INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Son inecuaciones de la forma

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px^2 + qx + r > 0 \quad \text{ó}$$

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px^2 + qx + r < 0$$

siendo n un número entero positivo ($n \in \mathbb{N}$) y a el coeficiente de x^n y siempre una cantidad positiva ($a > 0$).

Procesar estas inecuaciones mediante el estudio de los signos de los factores puede resultar impracticable pues si p es el número de factores de la expresión, 2^{p-1} es el número de sistemas que hay que resolver para hallar la solución de la ecuación.

Piénsese que para una inecuación de séptimo grado habría que resolver 64 sistemas de siete inecuaciones cada uno (!!).

Resolveremos, pues, estas inecuaciones mediante el estudio de las funciones correspondientes.

Enunciamos (sin demostración, ya que ésta escapa de los alcances de este estudio) algunas características de las funciones de la forma

$$y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + px^2 + qx + r \quad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ a > 0 \end{cases}$$

1) La gráfica de la función corta o toca el eje de abscisas tantas veces como raíces reales distintas tenga la ecuación.

2) Si k es el número de raíces reales distintas que posee la ecuación, el número de intervalos que se forman es de $k + 1$.

3) En un mismo intervalo la función no cambia de signo.

4) Si una raíz aparece en la ecuación una sola vez o repetida un número impar de veces, la función interseca el eje de abscisas en ese punto y los intervalos adyacentes al punto son de distinto signo.

5) Si una raíz aparece repetida un número par de veces, la gráfica es tangente al eje de abscisas en ese punto y los intervalos adyacentes al punto son del mismo signo.

6) El primer intervalo de la izquierda (*suponiendo siempre que el primer coeficiente es positivo*) es positivo si n es par y negativo si n es impar.

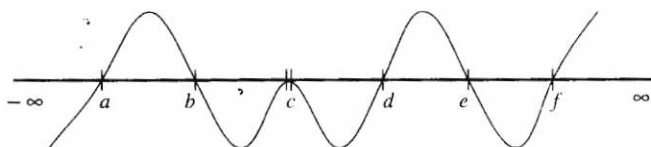
7) El último intervalo de la derecha es en ambos casos positivo.

Ejemplos

El comportamiento típico de una función de noveno grado

$$y = (x-a)(x-b)(x-c)^2(x-d)(x-e)^3(x-f) \quad (a < b < c < d < e < f)$$

es el siguiente:



Obsérvese que se forman siete intervalos (hay seis raíces reales distintas).

En el primero de la izquierda la función es negativa ($n = 9 = \text{impar}$).

En el punto c la gráfica es tangente al eje (la raíz c está repetida un número par de veces) y en los intervalos adyacentes la función tiene el mismo signo.

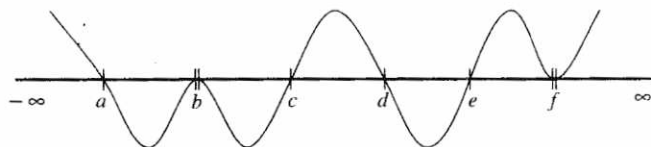
En todos los demás puntos la gráfica interseca el eje (inclusive en el punto e , raíz que está repetida un número impar de veces) y en los intervalos adyacentes a cada uno de esos puntos la función tiene signo contrario.

En el último intervalo de la derecha la función es positiva.

El comportamiento típico de una función de duodécimo grado

$$y = (x-a)(x-b)^4(x-c)(x-d)^3(x-e)(x-f)^2$$

es el siguiente:



Se forman siete intervalos (las raíces reales distintas siguen siendo seis).

La función es positiva en el primer intervalo de la izquierda ($n = 12 = \text{par}$).

En los puntos b y f la gráfica es tangente al eje (b y f son raíces de multiplicidad par) y en los intervalos adyacentes a esos puntos la función tiene el mismo signo (negativo en los intervalos adyacentes a b , positivo en los adyacentes a f).

En todos los demás puntos la gráfica intersecta al eje (inclusive en el punto d , raíz de multiplicidad impar) y en los intervalos adyacentes a cada uno de esos puntos la función tiene signo contrario.

En el último intervalo de la derecha la función es positiva.

Ejemplo 30

Resolver: $x^5 + 5x^4 - 19x^3 - 101x^2 + 42x + 360 > 0$

Estudiamos la función:

$$y = x^5 + 5x^4 - 19x^3 - 101x^2 + 42x + 360$$

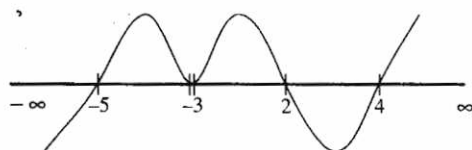
Utilizando Ruffini, factorizamos el miembro de la derecha:

$$y = (x-2)(x-4)(x+3)^2(x+5)$$

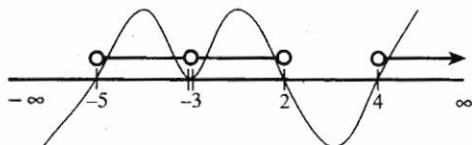
Colocamos ordenadamente las raíces en el eje de abscisas, señalando las que estén repetidas un número par de veces (una en este caso):



Comportamiento de la función: la función es negativa en el primer intervalo (n = impar) e intersecta en todos los puntos marcados a excepción del -3 donde sólo toca:



Los valores que satisfacen la inequación son los que pertenecen a los intervalos donde la función es positiva. Las raíces anulan la función por lo que no se incluyen.



Solución:

$$(-5, 2) \cup (4, \infty) - \{-3\}$$

Ejemplo 31

Resolver: $x^8 - 13x^7 + 58x^6 - 82x^5 - 119x^4 + 491x^3 - 516x^2 + 180x \leq 0$

Estudiamos la función

$$y = x^8 - 13x^7 + 58x^6 - 82x^5 - 119x^4 + 491x^3 - 516x^2 + 180x$$

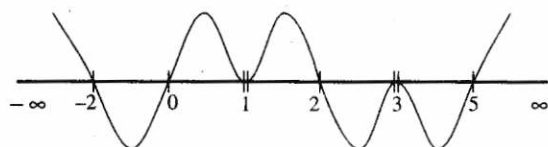
Factorizamos por Ruffini:

$$y = x(x-1)^2(x-2)(x-3)^2(x-5)(x+2)$$

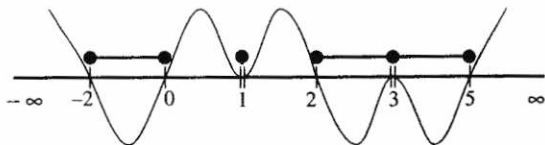
Colocamos las raíces en el eje señalando las de multiplicidad par:



Comportamiento de la función: es positiva en el primer intervalo (n = par) e intersecta el eje en todos los puntos marcados, a excepción de 1 y 3 donde sólo toca:



Los valores que satisfacen la inecuación son los que pertenecen a los intervalos donde la función es negativa o a los puntos donde se anula.



Solución:

$$[-2, 0] \cup \{1\} \cup [2, 5]$$

Ejemplo 32

Resolver: $x^7 - 2x^6 - 5x^5 + 18x^4 - 25x^3 + 26x^2 - 19x + 6 < 0$

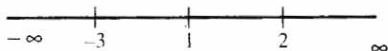
Estudiamos la función:

$$y = x^7 - 2x^6 - 5x^5 + 18x^4 - 25x^3 + 26x^2 - 19x + 6$$

Factorizamos por Ruffini:

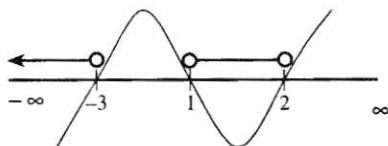
$$y = (x-1)^3(x-2)(x+3)(x^2+1)$$

Señalamos en el eje de abscisas las únicas tres raíces reales distintas. (No habiendo raíces de multiplicidad par, no habrá puntos de tangencia. Por otra parte, el factor $x^2 + 1$ no tiene raíces reales por lo que lo obviaremos).



Comportamiento de la función: es negativa en el primer intervalo de la izquierda ($n = \text{impar}$) e intersecta el eje en los puntos señalados.

Los valores que satisfacen la inecuación son los que pertenecen a los intervalos donde la función es negativa.



Solución:

$$(-\infty, -3) \cup (1, 2)$$

Ejemplo 33

Resolver: $x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 52x - 15 \leq 0$

Estudiamos la función:

$$y = x^4 - 12x^3 + 16x^2 - 52x - 15$$

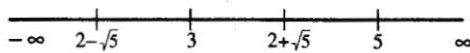
Factorizamos por Ruffini:

$$y = (x-3)(x-5)(x^2-4x-1)$$

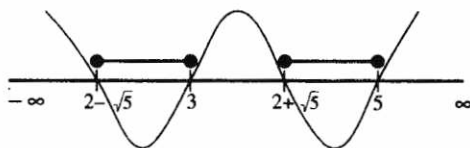
El último factor sí tiene raíces reales; Las hallamos utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Señalamos en orden las raíces en el eje de abscisas:



Comportamiento de la función: es positiva en el primer intervalo de la izquierda ($n = \text{par}$) e intersecciona el eje en todos los puntos señalados.



Solución:

$$[-\infty, 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}, 5]$$

Nota: Nos parece importante insistir en que los gráficos que aparecen en los ejemplos anteriores y en los ejemplos de los estudios que siguen, **no son el gráfico de la función** sino tan sólo un gráfico referencial que indica dónde la función es positiva y dónde es negativa, sin ninguna otra pretensión. La gráfica real de las funciones coincide con la de los ejemplos sólo en que corta o toca el eje horizontal en los mismos puntos y en que tiene el mismo signo en los intervalos que se forman.

Ejercicio 143

Resolver las siguientes inecuaciones:

- 1) $x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x \leq 0$
- 2) $2x^5 - 7x^4 - 11x^3 + 61x^2 - 63x + 10 > 0$
- 3) $x^4 - 11x^2 + 2x + 12 \geq 0$
- 4) $x^4 + 11x^3 + 11x^2 + 10x < 0$
- 5) $20x - x^3 - 14x^2 - 8 + 4x^4 - x^5 < 0$
- 6) $x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 21x^4 - 36x^3 + 32x - 16 \geq 0$
- 7) $x^8 - x^7 - x^6 - x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 < 0$
- 8) $x^8 - 36x^6 + 16x^5 + 438x^4 - 288x^3 - 2052x^2 + 1926x + 2673 \geq 0$
- 9) $x^7 - 6x^6 + 9x^5 + 10x^4 - 45x^3 + 54x^2 - 29x + 6 < 0$
- 10) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 > 0$
- 11) $x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 8x - 1 \leq 0$
- 12) $x^6 + 4x^5 + 8x^4 + 16x^3 + 20x^2 + 16x + 16 \geq 0$
- 13) $x^8 - 4x^7 + 3x^6 + 4x^5 - 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \leq 0$
- 14) $x^5 - 24x^3 + 54x^2 - 25x - 6 > 0$
- 15) $x^4 - 81 \leq 0$
- 16) $x^8 - 6x^6 + 9x^4 - 4x^2 < 0$

INECUACIONES RACIONALES

Son inecuaciones de la forma

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} > 0 \quad \text{ó} \quad \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} < 0$$

en las que $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son polinomios de exponentes enteros y positivos.

Como hemos hecho hasta ahora, estudiaremos sólo los casos en los que los coeficientes de las máximas potencias de la variable de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ sean ambos positivos.

Si multiplicamos ambos miembros por $[Q_{(x)}]^2$, expresión positiva para cualquier valor de la variable, obtenemos las inecuaciones

$$P_{(x)} \cdot Q_{(x)} > 0 \quad \text{ó} \quad P_{(x)} \cdot Q_{(x)} < 0$$

que son inecuaciones cuadráticas (si $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ son lineales) o de grado superior y cuya forma de resolución ya estudiamos en las páginas anteriores.

Obviamente, **las raíces de $Q_{(x)}$ nunca pueden ser parte de la solución** (anulan el denominador) y hay que excluirlas.

Todo lo anterior significa que, a efectos de una inecuación, las funciones

$$y = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}} \quad \text{y} \quad y = P_{(x)} \cdot Q_{(x)}$$

se comportan en forma idéntica, exceptuando el hecho de que las raíces de $Q_{(x)}$ pueden ser solución de la segunda pero nunca de la primera.

Sin embargo, en lugar de hacer la transformación descrita arriba, preferimos estudiar las características de este tipo de funciones racionales, como hicimos con las de grado superior.

Enunciamos (nuevamente sin demostración) las características que más nos interesan de las funciones racionales de la forma

$$y = \frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$$

- 1) La gráfica de la función corta o toca el eje de abscisas tantas veces como raíces reales distintas tenga el numerador.
- 2) Si k es la suma del número de raíces reales distintas del numerador y del denominador, el número de intervalos que se forman es de $k + 1$.
- 3) En un mismo intervalo la función no cambia de signo.
- 4) Si una raíz del numerador es de multiplicidad impar, la función intersecta el eje de abscisas en ese punto y los intervalos adyacentes al punto son de distinto signo.
- 5) Si una raíz del numerador es de multiplicidad par, la gráfica es tangente al eje de abscisas en ese punto y los intervalos adyacentes al punto son de igual signo.

6) La función tiene tantas asíntotas paralelas al eje de ordenadas como raíces reales distintas tiene el denominador.

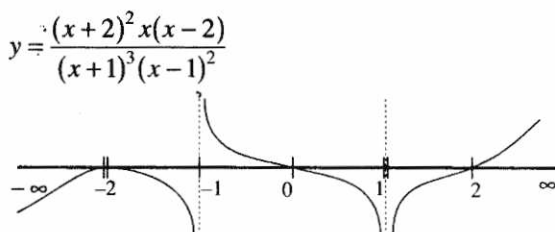
7) Si una raíz del denominador es de multiplicidad impar, la función tendrá signo contrario en los intervalos separados por la asíntota que la raíz determina.

8) Si una raíz del denominador es de multiplicidad par, la función tendrá el mismo signo en los intervalos separados por la asíntota que la raíz determina.

9) El primer intervalo de la izquierda (*siempre, insistimos, que los coeficientes de las máximas potencias de la variable en el numerador y en el denominador sean positivos*) es positivo si la suma de los grados de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es par y negativo, si es impar.

10) El último intervalo de la derecha es, en ambos casos, positivo.

Veamos, a modo de ilustración, la gráfica referencial del comportamiento de la función



Vemos en la figura que se forma seis intervalos (la suma de las raíces reales distintas del numerador y del denominador es cinco).

En el primero de la izquierda la función es negativa (la suma de los grados de $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ es 9 = impar) y, en el último de la derecha, positiva.

En el punto -2 la gráfica es tangente al eje (-2 es una raíz de multiplicidad par del numerador). En los puntos determinados por las restantes raíces del numerador (0 y 2) la gráfica interseca el eje.

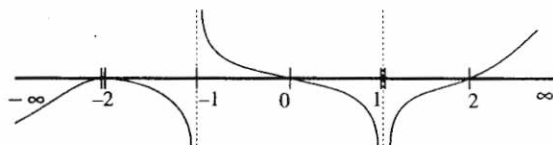
En -1 y 1 (raíces del denominador) tenemos asíntotas: al acercarse a ellas, sea por la izquierda como por la derecha, la función se dispara a $+\infty$ ó a $-\infty$.

La asíntota en -1 está determinada por una raíz de multiplicidad impar: la función tiene distinto signo en los intervalos separados por ella.

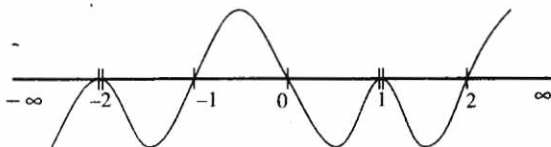
Por el contrario, la asíntota en 1 está determinada por una raíz de multiplicidad par y la función tiene el mismo signo en los intervalos separados por ella.

En las figuras que siguen se comparan las gráficas referenciales de la función

$$y = \frac{(x+2)^2 x(x-2)}{(x+1)^3 (x-1)^2}$$



y de la función $y = (x+2)^2 x(x-2)(x+1)^3 (x-1)^2$



Las funciones son distintas y, obviamente, sus gráficas difieren notablemente. Sin embargo, el signo de la función es igual en los intervalos correspondientes.

Si estuviéramos resolviendo la inecuación

$$\frac{(x+2)^2 x(x-2)}{(x+1)^3 (x-1)^2} \leq 0$$

la solución sería: $(-\infty, -1) \cup [0, 2] - \{1\}$ (las raíces -1 y 1 del denominador están excluidas).

Si la inecuación fuera

$$(x+2)^2 x(x-2)(x+1)^3 (x-1)^2 \leq 0$$

la única diferencia sería que la solución incluye los valores -1 y 1 : $(-\infty, -1] \cup [0, 2]$.

Ejemplo 34

Resolver: $4 > \frac{x^2 + 6x - 3}{x}$

Trasponiendo términos: $4 - \frac{x^2 + 6x - 3}{x} > 0$

Sacando común denominador: $\frac{4x - x^2 - 6x + 3}{x} > 0$

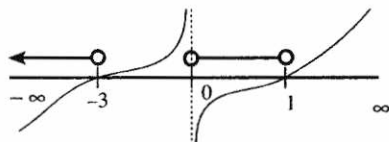
Reduciendo términos semejantes: $\frac{-x^2 - 2x + 3}{x} > 0$

Cambiando signos: $\frac{x^2 + 2x - 3}{x} < 0$

Factorizando: $\frac{(x+3)(x-1)}{x} < 0$

Estudiamos la función $y = \frac{(x+3)(x-1)}{x}$

Gráfica: La suma de los grados del numerador y del denominador es $3 = \text{impar}$, por lo cual en el primer intervalo de la izquierda la función es negativa. En -3 y 1 (raíces del numerador) hay intersección. En 0 tenemos asíntota. A los lados de la asíntota la función tiene



distinto signo.

Solución:

$$(-\infty, -3) \cup (0, 1)$$

Ejemplo 35

Resolver: $\frac{x^2 + x + 2}{x + 2} \geq 2$

Trasponiendo términos:

$$\frac{x^2 + x + 2}{x + 2} - 2 \geq 0$$

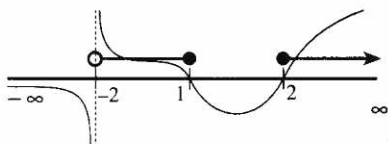
Después de sacar común denominador, reducir términos semejantes y factorizar, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{x+2} \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = \frac{(x-2)(x+1)}{x+2}$$

Gráfica: como la suma de los grados del numerador y del denominador es impar, en el primer intervalo la función es negativa. En -2 hay una asíntota; a sus lados la función tiene distinto signo. En 1 y 2 hay puntos de intersección.



Solución:

$$(-2, 1] \cup [2, \infty)$$

Ejemplo 36

Resolver: $\frac{3(x^3 - x^2 - 8x + 2)}{x^2 - x - 6} \geq 2x + 1$

Desarrollando y trasponiendo términos:

$$\frac{3x^3 - 3x^2 - 24x + 6}{x^2 - x - 6} - (2x + 1) \geq 0$$

Sacando común denominador y reduciendo términos semejantes:

$$\frac{3x^3 - 3x^2 - 24x + 6 - (2x + 1)(x^2 - x - 6)}{x^2 - x - 6} \geq 0$$

$$\frac{3x^3 - 3x^2 - 24x + 6 - 2x^3 + x^2 + 13x + 6}{x^2 - x - 6} \geq 0$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 11x + 12}{x^2 - x - 6} \geq 0$$

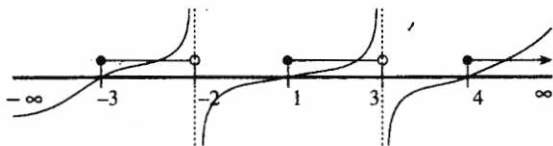
Factorizando:

$$\frac{(x-1)(x-4)(x+3)}{(x-3)(x+2)} \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = \frac{(x-1)(x-4)(x+3)}{(x-3)(x+2)}$$

Gráfica: en el primer intervalo la función es negativa. Tenemos intersecciones en -3, 1 y 4. Hay asíntotas en -2 y 3; a los lados de ambas la función tiene signo contrario.



Solución:

$$[-3, -2) \cup [1, 3) \cup [4, \infty)$$

Ejemplo 37

Resolver: $\frac{x^4 + x^3 + x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x + 1} < 3$

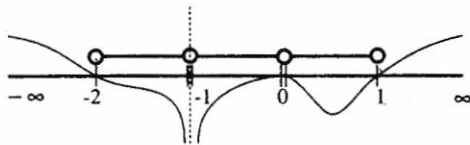
Después de trasponer términos, sacar denominador común, reducir términos semejantes y factorizar, la expresión resultante es la siguiente:

$$\frac{x^2(x+2)(x-1)}{(x+1)^2} < 0$$

Estudiamos la función

$$y = \frac{x^2(x+2)(x-1)}{(x+1)^2}$$

Gráfica: en el primer intervalo la función es positiva. En -2 y en 1 tenemos puntos de intersección. En 0 tenemos punto de tangencia. En -1 tenemos una asíntota originada por una raíz de multiplicidad par: la función tendrá el mismo signo en los intervalos separados por esa asíntota.



Solución:

$$(-2, -1) \cup (-1, 0)$$

Ejemplo 38

Resolver $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{2x+1}$

Trasponiendo términos:

$$\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{3}{x-2} - \frac{2}{2x+1} \leq 0$$

Sacando común denominador:

$$\frac{(x-2) + 3(2x+1)^2 - 2(2x+1)(x-2)}{(2x+1)^2(x-2)} \leq 0$$

Desarrollando el numerador:

$$\frac{x-2+12x^2+12x+3-4x^2+6x+4}{(2x+1)^2(x-2)} \leq 0$$

Reduciendo términos:

$$\frac{8x^2+19x+5}{(2x+1)^2(x-2)} \leq 0$$

Estudiamos la función:

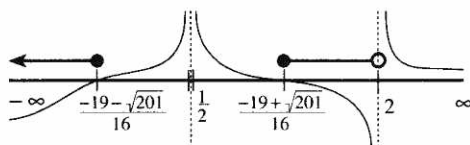
$$y = \frac{8x^2+19x+5}{(2x+1)^2(x-2)}$$

Calculamos las raíces del numerador:

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{201}}{16}$$

Gráfica: En el primer intervalo la función es negativa.

En $\frac{-19 \pm \sqrt{201}}{16}$ hay intersecciones. Tenemos asíntotas en $\frac{1}{2}$ (raíz de multiplicidad par) y en 2.



Solución:

$$\left(-\infty, \frac{-19 - \sqrt{201}}{16} \right] \cup \left[\frac{-19 + \sqrt{201}}{16}, 2 \right)$$

Ejercicio 144

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $\frac{2x+7}{x-1} > 1$

2) $\frac{8x+17}{x+3} \leq 7$

3) $x+5 \leq \frac{2x^2+7x-11}{x-3}$

4) $\frac{2x+5}{3x-1} > 4$

5) $\frac{4}{x} > \frac{5}{x}$

6) $\frac{17-5x-x^2}{x-2} + x+6 \geq 0$

- 7) $\frac{13}{x+4} \leq \frac{15}{2x-3}$
- 8) $\frac{6}{2x-1} > \frac{5}{x-2}$
- 9) $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2-x}$
- 10) $\frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{x^2-1} \leq \frac{1}{4}$
- 11) $\frac{x-8}{x-3} > \frac{x-5}{x+3}$
- 12) $\frac{x+1}{x-1} \geq \frac{1-2x}{3-x}$
- 13) $\frac{4}{x-3} - \frac{4}{x+3} \leq \frac{1}{3}$
- 14) $\frac{x}{x-1} - \frac{8}{x^2-1} < \frac{2}{x+1}$
- 15) $\frac{x}{x-1} + \frac{x+7}{x+1} < \frac{15}{x^2-1}$
- 16) $\frac{3-3x}{x^2+3x-4} < \frac{3(x+1)}{x+4} - \frac{3x+1}{x-1}$
- 17) $\frac{x+12}{x+8} - \frac{x-6}{x^2+2x-48} \geq \frac{3x-3}{x-6}$
- 18) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3} \leq 0$
- 19) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \geq 0$
- 20) $\frac{1}{x+1} + \frac{7}{x-3} \leq \frac{8}{x-2}$
- 21) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^4} \geq \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^2}$
- 22) $\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)^4} > 0$
- 23) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \geq 0$
- 24) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \leq \frac{1}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$
- 25) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1} \geq 0$
- 26) $\frac{5}{x+2} < \frac{3}{x^2+x+1}$

$$27) \left| \frac{2x+1}{x-3} \right| < 2$$

$$28) \left| \frac{x-3}{x+5} \right| > 2$$

$$29) \left| \frac{x+5}{x-3} \right| > 1$$

$$30) \left| \frac{x+5}{x-3} \right| > 1$$

$$31) \left| \frac{x+5}{x-3} \right| > 1$$

$$32) \left| \frac{x^2-5x+6}{x+1} \right| \geq 1$$

$$33) \left| \frac{x^2-5x+1}{x-3} \right| > 5$$

$$34) \left| \frac{2x^3-3x^2+13x-6}{3x^2-3x+2} \right| < 3$$

$$35) \left| \frac{x^3+2x^2-2x+3}{2x-1} \right| \leq x+3$$

$$36) \left| \frac{x^4-15x^2+24}{x} \right| \geq 10$$

$$37) \frac{x^6+4x^5-7x^4-43x^3+18x^2+135x+60}{x^3-6x^2+5x+12} \leq x^2+6x+7$$

$$38) 1 < \left| \frac{x+2}{x+1} \right| < 2$$

$$39) 3 < \left| \frac{x+3}{x-4} \right| \leq 7$$

$$40) 1 \leq \left| \frac{x^2+x-2}{x-3} \right| < 4$$

Ejercicio 145

Discutir las siguientes inecuaciones:

$$1) \frac{x-a}{x-b} > 0$$

$$2) \frac{x-a}{x-b} \leq 0$$

$$3) \frac{(x-a)(x-b)}{2x-b} \geq 0$$

(a y b positivos)

$$4) \frac{ax-b}{bx-a} \leq 0 \quad (a \text{ y } b \text{ positivos})$$

$$5) \frac{a}{x-a} + \frac{x+a}{a} < 0$$

$$6) \frac{x-b}{b} - \frac{b}{x+b} \geq 0$$

$$7) \frac{x}{a-x} - \frac{x-a}{a} \leq 0$$

$$8) \frac{x}{a-x} - \frac{a-x}{x} \leq 0$$

$$9) \frac{x}{x-a} + \frac{x-a}{x} \geq 0$$

$$10) \frac{x}{x+a} - \frac{x-a}{x} < 0$$

$$11) \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} < 0$$

$$12) \frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a} > 0$$

$$13) \frac{1}{ax-1} \geq \frac{1}{1-bx} \quad (a \text{ y } b \text{ positivos})$$

$$14) \frac{1}{ax+1} + \frac{1}{ax-2} \leq 0$$

$$15) 1 < \frac{1}{x-a} \leq 3$$

$$16) 1 < \frac{x-a}{x-b} < 2 \quad (a \text{ y } b \text{ positivos})$$

INECUACIONES IRRACIONALES

Son las inecuaciones en las que la variable aparece como cantidad subradical. Estudiaremos dos tipos de inecuaciones irracionales: las de las formas

$$A_{(x)} > \sqrt[n]{B_{(x)}} \quad (\text{I) (primer tipo)}$$

$$\text{y} \quad A_{(x)} < \sqrt[n]{B_{(x)}} \quad (\text{II) (segundo tipo)}$$

Para los casos en los que los símbolos sean $\geq$ y $\leq$ bastará añadirle la igualdad a los símbolos de las inecuaciones de los sistemas equivalentes a las expresiones (I) y (II).

Para resolver estos tipos de inecuaciones irracionales se hace indispensable racionalizarlas, es decir, sacar de los radicales las expresiones que contienen variable. Eso se obtiene elevando ambos miembros de la inecuación al exponente n .

Pero como no siempre la inecuación que se obtiene de esta forma es equivalente a la inecuación dada, es necesario imponer a la variable las limitaciones que hagan falta para que dicha equivalencia tenga lugar.

1) Inecuaciones irracionales con radicales de índice impar ($n = \text{impar}$)

Si n es impar, por la octava de las propiedades que hemos enumerado de las inecuaciones (pág. 556), la que se obtiene elevando al exponente n la inecuación original es totalmente equivalente a ella:

$\left. \begin{array}{ll} A_{(x)} > \sqrt[n]{B_{(x)}} & \rightarrow A_{(x)}^n > B_{(x)} \\ A_{(x)} \geq \sqrt[n]{B_{(x)}} & \rightarrow A_{(x)}^n \geq B_{(x)} \end{array} \right\} \quad (3^1)$	$\left. \vphantom{\begin{array}{l} A_{(x)} > \sqrt[n]{B_{(x)}} \\ A_{(x)} \geq \sqrt[n]{B_{(x)}} \\ A_{(x)} < \sqrt[n]{B_{(x)}} \\ A_{(x)} \leq \sqrt[n]{B_{(x)}} \end{array}} \right\} \quad (n = \text{impar})$
$\left. \begin{array}{ll} A_{(x)} < \sqrt[n]{B_{(x)}} & \rightarrow A_{(x)}^n < B_{(x)} \\ A_{(x)} \leq \sqrt[n]{B_{(x)}} & \rightarrow A_{(x)}^n \leq B_{(x)} \end{array} \right\} \quad (4^1)$	

2). Inecuaciones irracionales del primer tipo con índice par ($n = \text{par}$)

Sea la inecuación $A_{(x)} > \sqrt[n]{B_{(x)}}$ (I) en la que el radical, en caso de ser real, se toma con signo positivo.

Para que el radical sea real, la cantidad subradical debe ser positiva o nula: $B_{(x)} \geq 0$.

Como el segundo miembro es un número no negativo, la inecuación sólo es cierta para los valores de la variable que hagan $A_{(x)} > 0$.

Con lo anterior, ambos miembros de la desigualdad son positivos y entonces es cierto (novena propiedad de las desigualdades, pág. 556) que la inecuación que se obtiene al elevar ambos miembros al exponente n es equivalente a la inecuación dada.

En consecuencia, la inecuación (I) es equivalente al sistema formado por tres inecuaciones:

$$A_{(x)} > \sqrt[n]{B_{(x)}} \rightarrow \begin{cases} B_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)} > 0 \\ A_{(x)}^n > B_{(x)} \end{cases} \quad (n = \text{par}) \quad (5^I)$$

Análogamente

$$A_{(x)} \geq \sqrt[n]{B_{(x)}} \rightarrow \begin{cases} B_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)}^n \geq B_{(x)} \end{cases} \quad (n = \text{par}) \quad (5a^I)$$

3) Inecuaciones irracionales del segundo tipo con índice par ($n = \text{par}$)

Sea la inecuación $A_{(x)} < \sqrt[n]{B_{(x)}}$ (II).

Para que el radical sea real es nuevamente necesario que sea $B_{(x)} \geq 0$, con lo que el segundo miembro de la inecuación es un número real no negativo.

Entonces la desigualdad queda satisfecha de dos formas:

a) Si el primer miembro es negativo: $A_{(x)} < 0$, es decir, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} B_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)} < 0 \end{cases}$$

b) Si el primer miembro no es negativo ($A_{(x)} \geq 0$), pero imponiendo que el número positivo del primer miembro sea menor que el número positivo del segundo, siendo entonces $A_{(x)}^n < B_{(x)}$ (condición ésta que implica que $B_{(x)} > 0$), es decir, resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)}^n < B_{(x)} \end{cases}$$

Resumiendo:

$$A_{(x)} < \sqrt[n]{B_{(x)}} \rightarrow \begin{cases} B_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)} < 0 \\ A_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)}^n < B_{(x)} \end{cases} \quad (n = \text{par}) \quad (6^I)$$

Análogamente

$$A_{(x)} \leq \sqrt[n]{B_{(x)}} \rightarrow \begin{cases} B_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)} \leq 0 \\ A_{(x)} \geq 0 \\ A_{(x)}^n \leq B_{(x)} \end{cases} \quad (n = \text{par}) \quad (6a^I)$$

Ejemplo 39

Resolver: $2 - x \leq \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 23x + 14}$

Elevando ambos miembros al cubo (cosa que podemos hacer sin problemas por ser un exponente impar) tenemos:

$$8 - 12x + 6x^2 - x^3 \leq x^3 + 3x^2 - 23x + 14$$

Trasponiendo todos los términos al primer miembro y reduciendo términos semejantes:

$$-2x^3 + 3x^2 + 11x - 6 \leq 0$$

Cambiando signos:

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 \geq 0$$

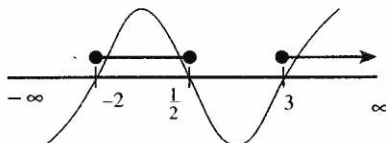
Estudiamos la función

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

Factorizando:

$$y = (x - 3)(x + 2)(2x - 1)$$

Gráfica del comportamiento de la función:



Solución:

$$\boxed{\left[-2, \frac{1}{2}\right] \cup [3, \infty)}$$

Ejemplo 40

Resolver: $1 + \sqrt{x^2 - 6x + 5} < 3x$

Aislando el radical:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 5} < 3x - 1$$

Leyendo de derecha a izquierda nos queda una inecuación irracional del primer tipo:

$$3x - 1 > \sqrt{x^2 - 6x + 5}$$

Utilizando (5') transformamos la inecuación en el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geq 0 \\ 3x - 1 > 0 \\ (3x - 1)^2 > x^2 - 6x + 5 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$x^2 - 6x + 5 \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = x^2 - 6x + 5$$

Factorizando:

$$y = (x - 5)(x - 1)$$

Gráfica del comportamiento de la función:

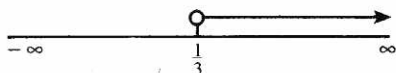


(I)

Segunda inecuación:

$$3x - 1 > 0$$

$$x > \frac{1}{3}$$



(II)

Tercera inecuación:

$$(3x - 1)^2 > x^2 - 6x + 5$$

Desarrollando:

$$9x^2 - 6x + 1 > x^2 - 6x + 5$$

Reduciendo términos:

$$8x^2 - 4 > 0$$

Simplificando:

$$2x^2 - 1 > 0$$

Resolviendo:

$$x^2 > \frac{1}{2}$$

$$|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

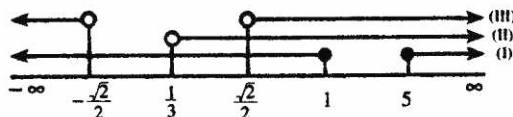
$$x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



(III)

Llevamos a uno solo los gráficos I, II y III:



Solución:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \cup [5, \infty)$$

Ejemplo 41

Resolver: $x - 3 < \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

Se trata de una inecuación irracional del segundo tipo. Utilizando (6'), transformamos la inecuación en la siguiente agrupación equivalente:

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ (x - 3)^2 < x^2 - 5x + 4 \end{cases} \quad (B)$$

SISTEMA (A)

Primera inecuación:

$$x^2 - 5x + 4 \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = x^2 - 5x + 4$$

Factorizando:

$$y = (x - 4)(x - 1)$$

Gráfica:

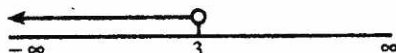


(a)

Segunda inecuación:

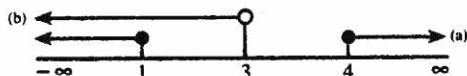
$$x - 3 < 0$$

$$x < 3$$



(b)

Gráfica común:



Solución del Sistema (A):

$$(-\infty, 1]$$

SISTEMA (B)

Primera inecuación:

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$



(c)

Segunda inecuación:

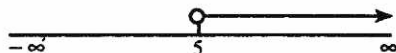
$$(x-3)^2 < x^2 - 5x + 4$$

Desarrollando, reduciendo términos semejantes y llevando a la mínima expresión:

$$x^2 - 6x + 9 < x^2 - 5x + 4$$

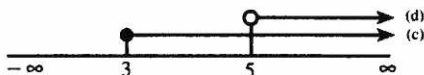
$$-x < -5$$

$$x > 5$$



(d)

Gráfica común:



Solución del Sistema (B):

$$(5, \infty)$$

Solución de la agrupación:

$$(-\infty, 1] \cup (5, \infty)$$

Ejemplo 42

$$\text{Resolver: } \sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} \geq \sqrt{3x+1}$$

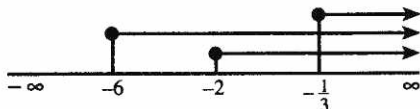
Para que los radicales sean reales las tres cantidades subradicales deben ser no negativas. Llamaremos a esto "condición básica". En nuestro caso, la condición básica es que la variable debe tomar valores que satisfagan el sistema

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases}$$

Llevando las inecuaciones a la mínima expresión:

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \geq -6 \\ x \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Gráfica:



Condición básica es, pues, que x pertenezca al intervalo

$$\left[-\frac{1}{3}, \infty\right) \quad (I)$$

Ahora bien, si la variable toma valores de ese intervalo, los dos primeros radicales serán positivos y el tercero no negativo, por lo que podemos elevar ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})^2 \geq (\sqrt{3x+1})^2$$

Desarrollando:

$$x+2+2\sqrt{(x+2)(x+6)}+x+6 \geq 3x+1$$

Aislando el radical:

$$2\sqrt{(x+2)(x+6)} \geq x-7$$

Leyendo de derecha a izquierda:

$$x-7 \leq 2\sqrt{(x+2)(x+6)}$$

La expresión obtenida es una inequación irracional del segundo tipo. Utilizando (6^b), la transformamos en la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} (x+2)(x+6) \geq 0 \\ x-7 \leq 0 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} x-7 \geq 0 \\ (x-7)^2 \leq 4(x+2)(x+6) \end{cases} \quad (B)$$

SISTEMA (A)

Primera inequación:

$$(x+2)(x+6) \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = (x+2)(x+6)$$

Gráfica:

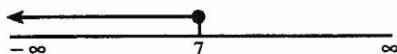


(a)

Segunda inequación:

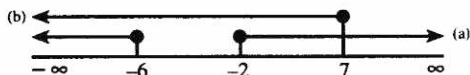
$$x-7 \leq 0$$

$$x \leq 7$$



(b)

Gráfica común:



Solución del Sistema (A):

$$(-\infty, -6] \cup [-2, 7]$$

SISTEMA (B)

Primera inecuación:

$$x - 7 \geq 0$$

$$x \geq 7$$



(c)

Segunda inecuación:

$$(x - 7)^2 \leq 4(x + 2)(x + 6)$$

Desarrollando, reduciendo términos semejantes y llevando a la mínima expresión:

$$x^2 - 14x + 49 \leq 4x^2 + 32x + 48$$

$$-3x^2 - 46x + 1 \leq 0$$

$$3x^2 + 46x - 1 \geq 0$$

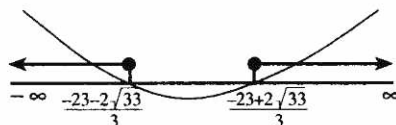
Estudiamos la función

$$y = 3x^2 + 46x - 1$$

cuyas raíces son:

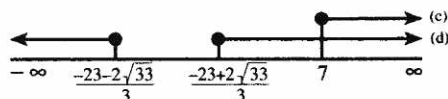
$$\frac{-23 \pm 2\sqrt{33}}{3}$$

Gráfica:



(d)

Gráfica común:



Solución del Sistema (B):

$$[7, \infty)$$

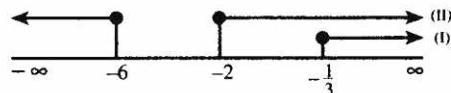
Solución de la agrupación:

$$(-\infty, -6] \cup [-2, \infty)$$

(II)

La solución definitiva serán los valores que pertenecen simultáneamente a los intervalos (I) y (II).

Gráfica común:



Solución de la inecuación:

$$\left[-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

Nota: En el ejemplo anterior, la solución definitiva de la inecuación es el mismo intervalo que se obtuvo al inicio del ejercicio procesando lo que llamamos "condición básica". Pero esto no siempre es así, como podrá apreciarse en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 43

Resolver: $\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x} > \sqrt{3x}$

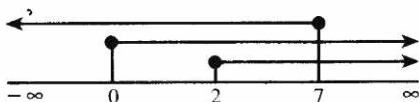
Condición básica: las tres cantidades subradicales deben ser no negativas:

$$\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 7-x \geq 0 \\ 3x \geq 0 \end{cases}$$

En su mínima expresión:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Gráfica común:



La variable sólo puede tomar valores del intervalo

$$[2, 7]$$

(I)

En estas condiciones, podemos elevar ambos miembros al cuadrado:

$$(\sqrt{x-2} + \sqrt{7-x})^2 > (\sqrt{3x})^2$$

Desarrollando y reduciendo luego términos semejantes, se obtiene la siguiente expresión:

$$3x - 5 < 2\sqrt{(x-2)(7-x)}$$

Utilizando (6') la transformamos en la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} (x-2)(7-x) \geq 0 \\ 3x - 5 < 0 \end{cases} \quad (A)$$

$$\begin{cases} 3x - 5 \geq 0 \\ (3x-5)^2 < 4(x-2)(7-x) \end{cases} \quad (B)$$

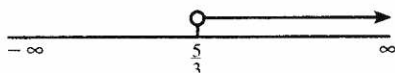
El sistema (A) no tiene solución, como se puede comprobar fácilmente.

SISTEMA (B)

Primera inecuación:

$$3x - 5 \geq 0$$

$$x \geq \frac{5}{3}$$



Segunda inecuación:

$$(3x-5)^2 < 4(x-2)(7-x)$$

Desarrollando y reduciendo términos:

$$9x^2 - 30x + 25 < -4x^2 + 36x - 56$$

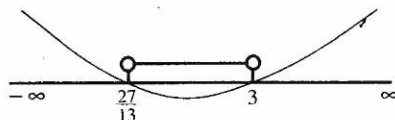
$$13x^2 - 66x + 81 < 0$$

Estudiamos la función

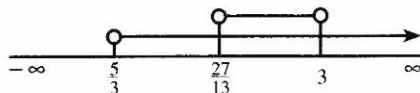
$$y = 13x^2 - 66x + 81$$

Factorizando:

$$y = (13x - 27)(x - 3)$$



Gráfica común:



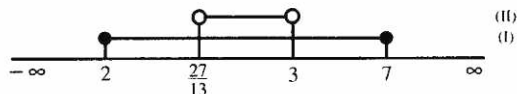
Solución del sistema (B) y de la agrupación:

$$\left(\frac{27}{13}, 3\right)$$

(II)

La solución definitiva de la inecuación original son los valores comunes a los intervalos (I) y (II).

Gráfica:



Solución de la inecuación:

$$\left(\frac{27}{13}, 3\right)$$

Ejercicio 146

Resolver las siguientes inecuaciones:

1) $\sqrt{3x-4} < \sqrt{2x+1}$

9) $\sqrt[3]{5x+2} \leq 3$

2) $\sqrt{5x-2} - \sqrt{x+7} > 0$

10) $x-1 < \sqrt[3]{x^3+2}$

3) $\sqrt{7x+4} < 5$

11) $x-1 < \sqrt[3]{x^3+7x}$

4) $2\sqrt{3x-1} < 1$

12) $\sqrt{x^2-2x} > x-3$

5) $x > \sqrt[3]{x^3-x+1}$

13) $3x-1 < \sqrt{5-x}$

6) $\sqrt[3]{x^3-3x^2} \leq x-1$

14) $\sqrt{5-2x} < 6x-1$

7) $4\sqrt{x-1} < 1$

15) $\sqrt{x^2+4} > x-2$

8) $\sqrt{\frac{x-7}{x-2}} < 4$

16) $2x \geq \sqrt{x^2-1}$

- 17) $1 + \sqrt{1 - x^2} < 2x$
- 18) $\sqrt{x^2 - 11x + 28} > \sqrt{5x^2 - 33x + 28}$
- 19) $\sqrt{1 - 9x^2} < 6x - 1$
- 20) $\sqrt{a^2 - x^2} < x - 2a$
- 21) $1 - x < \sqrt{4 - 2x}$
- 22) $2x + \sqrt{1 - \frac{x}{3}} > 1$
- 23) $6 + \sqrt{x - 1} > 3x$
- 24) $\sqrt{a(a - x)} > a - 2x \quad (a > 0)$
- 25) $\sqrt[3]{1 + 3x - 3x^2} + 1 \geq x$
- 26) $\sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} < x - 1$
- 27) $\sqrt{5x + 10} > 8 - x$
- 28) $\sqrt{2x - 3} < \sqrt{x - 1}$
- 29) $1 + \sqrt{25 - x^2} > x$
- 30) $x + \sqrt{x^2 - 5} < 5$
- 31) $6x + 3 < \sqrt{6 - x - x^2}$
- 32) $\sqrt{x^2 + x + 2} \geq 2x - 1$
- 33) $x^2 + 1 > \sqrt{7x^2 - 3}$
- 34) $\sqrt{x + 1} > x - 1$
- 35) $\sqrt{25 - x^2} < x - 1$
- 36) $\sqrt{\frac{x - 9}{x - 1}} < 2$
- 37) $\sqrt{\frac{x^2 - 2x - 15}{x - 2}} < 2$
- 38) $\sqrt{2x^3 - 5x^2 + x + 2} \geq \sqrt{x^3 + x^2 - 10x + 8}$
- 39) $\sqrt{3x^2 + 19x + 20} > 4x - 4$
- 40) $3\sqrt{6 - x - x^2} + 4x + 2 > 0$
- 41) $\sqrt{2x^3 - 12x^2 + 23x - 14} \leq (x - 2)\sqrt{x - 2}$
- 42) $\sqrt{x^3 - 8x - 7} > x + 1$
- 43) $\sqrt{x + 36} - \sqrt{x} < 2$
- 44) $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x - 8} > 3$
- 45) $\sqrt{x + 20} - \sqrt{x - 1} > 3$
- 46) $\sqrt{x + 1} < 1 - \sqrt{2x + 1}$
- 47) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 1} < 3$
- 48) $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} > 2$
- 49) $\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{x - 3} > \sqrt{2x + 2}$
- 50) $\sqrt{7x + 4} < \sqrt{x + 6} + \sqrt{x + 1}$
- 51) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1} > \sqrt{x}$
- 52) $\sqrt{x^2 + x - 2} - \sqrt{x^2 - 8x + 15} > 4$
- 53) $\frac{x + 2}{3 - \sqrt{x^2 - 8x}} > 0$
- 54) $\frac{2x + 2}{2 - x} > \sqrt{2x + 1}$

INECUACIONES EXPONENCIALES

Son inecuaciones en las que la variable forma parte de un exponente. Se presentan en distintas formas, como las que se ven a continuación:

$$a^x > a^k; \quad a^x \geq a^k; \quad a^x < b; \quad a^x \geq b; \quad \text{etc.}$$

En las inecuaciones exponenciales, a es siempre una cantidad positiva distinta de la unidad ($a > 0$; $a \neq 1$).

En la resolución de inecuaciones exponenciales tendremos muy en cuenta la siguiente circunstancia:

Mientras mayor es el exponente al que se eleva un número positivo, mayor es la potencia, siempre que el número sea mayor que la unidad.

Por ejemplo: $2^2 < 2^3 < 2^7 < 2^{20}$, etc.

En cambio, si el valor del número está entre cero y uno, la potencia decrece al crecer el exponente.

Por ejemplo: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^7 < \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$, etc.

De acuerdo con lo anterior, podemos elaborar la siguiente tabla de equivalencias:

INECUACIONES EXPONENCIALES

1) De igual base

$$\begin{array}{lll} a^x > a^k & \rightarrow & x > k \\ a^x < a^k & \rightarrow & x < k \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (\text{si } a > 1) \quad (7^1)$$

$$\begin{array}{lll} a^x > a^k & \rightarrow & x < k \\ a^x < a^k & \rightarrow & x > k \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad (\text{si } 0 < a < 1) \quad (7a^1)$$

2) De distinta base con $b > 0$

$$\begin{array}{lll} a^x > b & \rightarrow & x > \lg_a b \\ a^x < b & \rightarrow & x < \lg_a b \end{array} \quad (\text{si } a > 1) \quad (8^1)$$

$$\begin{array}{lll} a^x > b & \rightarrow & x < \lg_a b \\ a^x < b & \rightarrow & x > \lg_a b \end{array} \quad (\text{si } 0 < a < 1) \quad (8a^1)$$

3) De distinta base con $b < 0$

$$\begin{array}{lll} a^x > b & \rightarrow & x \in \mathbb{R} \\ a^x < b & \rightarrow & \text{No hay solución} \end{array} \quad (9^1)$$

Las equivalencias anteriores siguen siendo válidas si los símbolos (sin incluir los de las expresiones entre paréntesis) son $\geq$ ó $\leq$.

Si la base de la expresión exponencial no es un número a sino un polinomio $f_{(x)}$, la inecuación sólo puede ser resuelta analíticamente si ambos miembros tienen igual base.

Para esos casos sirve la siguiente tabla:

$[f_{(x)}]^{g_{(x)}} > [f_{(x)}]^{h_{(x)}} \quad \rightarrow$	$\begin{cases} f_{(x)} > 1 \\ g_{(x)} > h_{(x)} \\ 0 < f_{(x)} < 1 \\ g_{(x)} < h_{(x)} \end{cases}$	(10^1)
$[f_{(x)}]^{g_{(x)}} < [f_{(x)}]^{h_{(x)}} \quad \rightarrow$	$\begin{cases} f_{(x)} > 1 \\ g_{(x)} < h_{(x)} \\ 0 < f_{(x)} < 1 \\ g_{(x)} > h_{(x)} \end{cases}$	(11^1)

La tabla anterior supone $f_{(x)} > 0$ y $f_{(x)} \neq 1$ y es también válida si los símbolos (a excepción de los de $f_{(x)}$ en las agrupaciones de la derecha) se cambian por $\geq$ ó $\leq$, según corresponda.

Si $h_{(x)} = 0$, el cuadro anterior se simplifica como puede verse a continuación:

$[f_{(x)}]^{g_{(x)}} > 1 \quad \rightarrow$	$\begin{cases} f_{(x)} > 1 \\ g_{(x)} > 0 \\ 0 < f_{(x)} < 1 \\ g_{(x)} < 0 \end{cases}$	$(10a^1)$
$[f_{(x)}]^{g_{(x)}} < 1 \quad \rightarrow$	$\begin{cases} f_{(x)} > 1 \\ g_{(x)} < 0 \\ 0 < f_{(x)} < 1 \\ g_{(x)} > 0 \end{cases}$	$(11a^1)$

Ejemplo 44

Resolver: $3^{x^2+5x+2} \geq \frac{1}{81}$

Transformando el miembro de la derecha:

$$3^{x^2+5x+2} \geq 3^{-4}$$

Dado que a es mayor que la unidad, la inecuación dada es equivalente, por (7'), a la siguiente:

$$x^2 + 5x + 2 \geq -4$$

Trasponiendo términos:

$$x^2 + 5x + 6 \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = x^2 + 5x + 6$$

Factorizando:

$$y = (x + 3)(x + 2)$$

Gráfica:



Solución:

$$(-\infty, -3] \cup [-2, \infty)$$

Ejemplo 45

Resolver: $\left(\frac{1}{32}\right)^{x-2} < 4$

Transformaciones previas para igualar bases:

$$\left(\frac{1}{32}\right)^{x-2} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-10}$$

$$4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Sustituyendo:

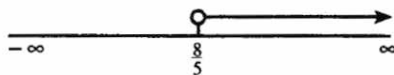
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{5x-10} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Por (7a') esta inecuación es equivalente a esta otra:

$$5x - 10 > -2$$

De donde:

$$x > \frac{8}{5}$$



Solución:

$$\left(\frac{8}{5}, \infty\right)$$

Ejemplo 46

Resolver: $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leq 0$

La inecuación se puede expresar así:

$$(5^x)^2 - 26 \cdot (5^x) + 25 \leq 0$$

Factorizando:

$$(5^x - 25)(5^x - 1) \leq 0$$

Las raíces de estos factores son:

$$5^x - 25 = 0$$

$$5^x - 1 = 0$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 1$$

$$5^x = 5^2$$

$$5^x = 5^0$$

$$x = 2$$

$$x = 0$$

La inecuación dada tiene las mismas soluciones que la siguiente:

$$(x+2)x \leq 0$$

Estudiamos la función

$$y = (x+2)x$$

Gráfica:



Solución:

$$[0, 2]$$

Ejemplo 47

Resolver: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} + 7\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 64 > 0$

Transformaciones previas:

$$7\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 14\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$$

$$7\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} = 7\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 56\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} - 14\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} + 56\left(\frac{1}{2}\right)^x - 64 > 0$$

Factorizando por Ruffini:

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4\right]\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8\right] > 0$$

Calculamos las raíces de cada uno de los tres factores:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x = -1$$

$$x = -2$$

$$x = -3$$

La inecuación dada tiene las mismas soluciones que la siguiente:

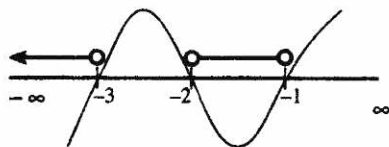
$$(x+1)(x+2)(x+3) < 0$$

Obsérvese que hemos cambiado el sentido de la inecuación. En efecto, cada factor $a^x > a^k$ hace que cambie el sentido en la inecuación equivalente $x < k$ cuando $0 < a < 1$ (como en nuestro caso). Por cada factor (con raíz real) en la forma $a^x - a^k$ ($0 < a < 1$) hay un cambio de sentido en la inecuación equivalente. Si el número de estos factores es par, la

inecuación equivalente mantendrá el sentido; si, en cambio, como en nuestro caso, es impar, la inecuación equivalente tendrá sentido contrario.

Estudiamos la función $y = (x+1)(x+2)(x+3)$

Gráfica:



Solución:

$$(-\infty, -3) \cup (-2, -1)$$

Ejemplo 48

Resolver: $\frac{9^x - 8 \cdot 3^x + 15}{9^x - 11 \cdot 3^x + 18} \geq 0$

Escribimos la inecuación de la siguiente forma:

$$\frac{(3^x)^2 - 8(3^x) + 15}{(3^x)^2 - 11(3^x) + 18} \geq 0$$

Factorizando numerador y denominador:

$$\frac{(3^x - 5)(3^x - 3)}{(3^x - 9)(3^x - 2)} \geq 0$$

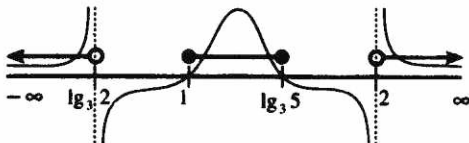
Calculamos las raíces de cada uno de los factores del numerador y del denominador:

$3^x - 5 = 0$	$3^x - 3 = 0$	$3^x - 9 = 0$	$3^x - 2 = 0$
$3^x = 5$	$3^x = 3$	$3^x = 9$	$3^x = 2$
$x = \lg_3 5$	$x = 1$	$x = 2$	$x = \lg_3 2$

La inecuación tiene las mismas soluciones que la siguiente:

$$\frac{(x - \lg_3 5)(x - 1)}{(x - 2)(x - \lg_3 2)} \geq 0$$

Gráfica:



Solución:

$$(-\infty, \lg_3 2) \cup [1, \lg_3 5] \cup (2, \infty)$$

Ejemplo 49

$$\text{Resolver: } (x+3)^{2x^4+5x^3-5x^2-4x+2} \geq (x^2+6x+9)^{x^3+2x^2+3x+1}$$

Transformamos el miembro de la derecha para igualar bases:

$$(x+3)^{2x^4+5x^3-5x^2-4x+2} \geq [(x+3)^2]^{x^3+2x^2+3x+1}$$

$$(x+3)^{2x^4+5x^3-5x^2-4x+2} \geq (x+3)^{2x^3+4x^2+6x+2}$$

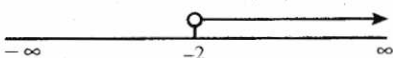
Utilizando (10^b):

$$\begin{cases} x+3 > 1 \\ 2x^4+5x^3-5x^2-4x+2 \geq 2x^3+4x^2+6x+2 \end{cases} \quad (\text{A})$$

$$\begin{cases} 0 < x+3 < 1 \\ 2x^4+5x^3-5x^2-4x+2 \leq 2x^3+4x^2+6x+2 \end{cases} \quad (\text{B})$$

SISTEMA (A)

Primera inecuación:

$$\begin{aligned} x+3 &> 1 \\ x &> -2 \end{aligned}$$

(a)

Segunda inecuación:

$$2x^4+5x^3-5x^2-4x+2 \geq 2x^3+4x^2+6x+2$$

Reduciendo términos:

$$2x^4+3x^3-9x^2-10x \geq 0$$

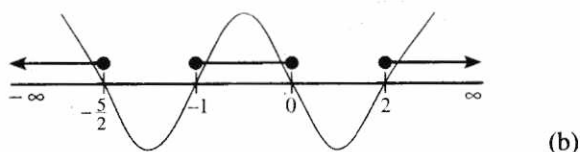
Factorizando por Ruffini:

$$x(x-2)(x+1)(5x+2) \geq 0$$

Estudiamos la función

$$y = x(x-2)(x+1)(5x+2)$$

Gráfica:



Gráfica común (a) y (b):



Solución del Sistema (A):

$$[-1, 0] \cup [2, \infty)$$

SISTEMA (B)

Primera inecuación:

$$\begin{aligned} 0 &< x+3 < 1 \\ -3 &< x < -2 \end{aligned}$$

(c)

Segunda inecuación:

$$2x^4+5x^3-5x^2-4x+2 \leq 2x^3+4x^2+6x+2$$

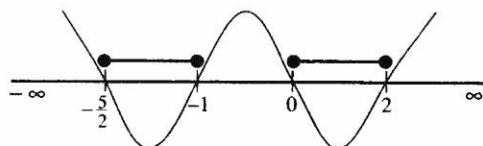
Reduciendo términos y factorizando:

$$x(x-2)(x+1)(5x+2) \leq 0$$

Graficamos nuevamente la función

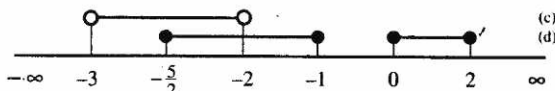
$$y = x(x-2)(x+1)(5x+2)$$

pero tomando esta vez los intervalos donde la función es negativa:



(d)

Gráfica común (c) y (d):



Solución del Sistema (B):

$$\left[-\frac{5}{2}, -2\right)$$

Solución de la inecuación:

$$\left[-\frac{5}{2}, -2\right) \cup [-1, 0] \cup [2, \infty)$$

Ejercicio 147

Resolver las siguientes inecuaciones:

- | | |
|--|---|
| 1) $2^x > 64$ | 16) $3^{2x+1} > 5^{x-1}$ |
| 2) $3^{2x-1} \leq 27$ | 17) $11^{x-1} \leq 17^{1-x}$ |
| 3) $2^{x^2-4x-16} \geq 32$ | 18) $3^{x-2} > 2^{1-2x}$ |
| 4) $3^{x^2+7x+6} < \frac{1}{81}$ | 19) $3^{2x-1} + 7 > 0$ |
| 5) $0,5^{3x+2} < 4$ | 20) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0$ |
| 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^3-9x+2} \geq 25^{x+2}$ | 21) $9^x - 10 \cdot 3^x + 9 \leq 0$ |
| 7) $\left(\frac{1}{16}\right)^{x^2-4x-1} > 2^x$ | 22) $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 > 0$ |
| 8) $4^{x+1} \geq 2$ | 23) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 6\left(\frac{1}{2}\right)^x + 8 < 0$ |
| 9) $\left(\frac{1}{8}\right)^{x+3} > 2$ | 24) $4^x - 9 \cdot 2^x + 20 > 0$ |
| 10) $3^{(x-2)(2-x)} > 27^x$ | 25) $3^{3x} - 13 \cdot 3^{2x} + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 \leq 0$ |
| 11) $5^x \geq 7$ | 26) $16^x - 5 \cdot 2^{3x+1} + 35 \cdot 4^x - 25 \cdot 2^{x+1} + 24 < 0$ |
| 12) $3^{2x-1} < 5$ | 27) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 36\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 27 > 0$ |
| 13) $4 \cdot 2^x \leq 3$ | 28) $\frac{4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 16}{4^x - 17 \cdot 2^x + 16} \geq 0$ |
| 14) $3^{x^2-2x} \geq 7$ | 29) $\frac{(2^x-3)(3^x-4)(4^x-5)}{(2^x-5)} \leq 0$ |
| 15) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1} < \frac{1}{5}$ | |

$$30) \frac{2^{4x} - 2^{3x+2} - 3 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^{x+1} - 8}{2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} + 4} < 0$$

$$31) \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 4} \geq 0$$

$$32) \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x - 6}{\left(\frac{1}{9}\right)^x - 10\left(\frac{1}{3}\right)^x + 9} \leq 0$$

$$33) 3^{3x-2} + 3^{3x+1} - 3^{3x} < 57$$

$$34) 4^x < 2^{x+1} + 3$$

$$35) 3^{2x+5} \leq 3^{x+2} + 2$$

$$36) 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 6 < 0$$

$$37) 2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 > 0$$

$$38) 4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x < 0$$

$$39) 3^{2x} - 5 \cdot 6^x + 4^x \geq 0$$

$$40) \frac{1}{2^x - 1} \geq \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$$

$$41) \frac{1}{2^x + 3} > \frac{1}{2^{x+2} - 1}$$

$$42) 2^{3+x} + 2^{3-x} < 65$$

$$43) 4^x + 3^{x+1} \geq 4 \cdot 3^x$$

$$44) 6^{\frac{5}{x}} \cdot 6^{\frac{8}{x+3}} \geq 36$$

$$45) 7^{\frac{7}{x}} \cdot 7^{\frac{4}{x+3}} \leq 7^{\frac{6}{x+4}}$$

$$46) 5^{\frac{5}{4x+8}} \cdot 5^{\frac{1}{x+4}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \geq 1$$

$$47) 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2}$$

$$48) 9^{5x} - 3^{5x} - 2 > 0$$

$$49) 6^x + 12 < 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x$$

$$50) 2^x + 3 \cdot 5^x \leq 10^x + 3$$

$$51) 30^x - 15^x - 3 \cdot 10^x - 2 \cdot 6^x + 3 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x + 6 \cdot 2^x - 6 < 0$$

$$52) 5^{\sqrt{2x-5}} - 5^{\sqrt{3x+1}} > 0$$

$$53) 3^{\sqrt{3x-1}} \leq \sqrt{3}$$

$$54) 16^{\sqrt{x-3}} > 8$$

$$55) 9^{x-1} > 3^{1+\sqrt{x^2-5x+4}}$$

$$56) 7^{\sqrt{x-1}} < \sqrt[3]{7}$$

$$57) \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+2x-3}} > \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$58) (x-2)^{x^2-6x+8} > 1$$

$$59) (x^2-8x+15)^{x-6} < 1$$

$$60) (x+1)^{x^2+2x-13} \geq x^2+2x+1$$

$$61) (x^2-x-11)^{x^2-3x-10} < 1$$

$$62) (x-1)^{x^3-2x^2-4x+12} \geq x^4-4x^3+6x^2-4x+1$$

$$63) (x^2+x-71)^{x^2+x-20} - 1 \leq 0$$

$$64) 4^x > \sqrt{2^{x^2+4x-3}}$$

$$65) \sqrt{2^{2x-1}} - 81 \geq 9$$

$$66) \sqrt{9^x-79} < \sqrt{25 \cdot 3^x-25}$$

$$67) \sqrt{3 \cdot 2^{x+2}} - 24 < \sqrt{4^x-88}$$

$$68) 2^x - 1 > \sqrt{2^{x+2}} - 7$$

INECUACIONES LOGARITMICAS

Son inecuaciones en las que aparece logaritmo de la variable o logaritmos de expresiones que contienen la variable.

Las inecuaciones logarítmicas más elementales son de la forma

$$\lg_a x > k \quad \text{y} \quad \lg_a x < k$$

siendo a una cantidad positiva distinta de la unidad ($a > 0$; $a \neq 1$) y x una cantidad positiva ($x > 0$).

Dada la estrecha relación existente entre la función logarítmica y la exponencial, las consideraciones que hay que hacer en este caso son semejantes a las que hacíamos al tratar las inecuaciones exponenciales.

Si a es mayor que la unidad, mientras mayor es el número, mayor es su logaritmo.

Por ejemplo: $\lg_2 4 < \lg_2 8 < \lg_2 64 < \lg_2 128$, etc.

En cambio, si el valor de a está entre cero y uno, mientras mayor es el número, menor es su logaritmo.

Por ejemplo: $\lg_{\frac{1}{2}} 4 > \lg_{\frac{1}{2}} 8 > \lg_{\frac{1}{2}} 64 > \lg_{\frac{1}{2}} 128$, etc.

Estas consideraciones nos permiten elaborar la siguiente tabla de equivalencias:

INECUACIONES LOGARITMICAS

1)	$\lg_a x > k$	$\rightarrow$	$x > a^k$	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} (a > 1)$	(12 ^l)
	$\lg_a x < k$	$\rightarrow$	$0 < x < a^k$		
	$\lg_a x > k$	$\rightarrow$	$0 < x < a^k$	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} (0 < a < 1)$	(12a ^l)
	$\lg_a x < k$	$\rightarrow$	$x > a^k$		
2)	$\lg_a x \geq k$	$\rightarrow$	$x \geq a^k$	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} (a > 1)'$	(13 ^l)
	$\lg_a x \leq k$	$\rightarrow$	$0 < x \leq a^k$		
	$\lg_a x \geq k$	$\rightarrow$	$0 < x \leq a^k$	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right\} (0 < a < 1)$	(13a ^l)
	$\lg_a x \leq k$	$\rightarrow$	$x \geq a^k$		
3)	$\lg_{g(x)} f(x) > k$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} g(x) > 1 \\ f(x) > [g(x)]^k \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < g(x) < 1 \\ 0 < f(x) < [g(x)]^k \end{array} \right.$	(14 ^l)
	$\lg_{g(x)} f(x) < k$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} g(x) > 1 \\ 0 < f(x) < [g(x)]^k \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < g(x) < 1 \\ f(x) > [g(x)]^k \end{array} \right.$	(14a ^l)
4)	$\lg_{g(x)} f(x) \geq k$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} g(x) > 1 \\ f(x) \geq [g(x)]^k \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < g(x) < 1 \\ 0 < f(x) \leq [g(x)]^k \end{array} \right.$	(15 ^l)
	$\lg_{g(x)} f(x) \leq k$	$\rightarrow$	$\left\{ \begin{array}{l} g(x) > 1 \\ 0 < f(x) \leq [g(x)]^k \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0 < g(x) < 1 \\ f(x) \geq [g(x)]^k \end{array} \right.$	(15a ^l)

Ejemplo 50

Resolver: $\lg_2(x^2 + 2x - 7) > 3$

Dado que la base del logaritmo es mayor que la unidad, transformamos mediante (12^b) la inecuación en esta otra equivalente:

$$x^2 + 2x - 7 > 2^3$$

$$x^2 + 2x - 15 > 0$$

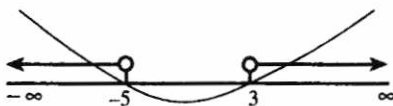
Estudiamos la función

$$y = x^2 + 2x - 15$$

Factorizando:

$$y = (x + 5)(x - 3)$$

Gráfica:



Solución:

$$(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$$

Ejemplo 51

Resolver: $\lg_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 + 5x}{2x + 1} \geq -2$

Como la base es menor que la unidad, transformamos mediante (12a¹) en la inecuación equivalente:

$$0 < \frac{x^2 + 5x}{2x + 1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

Esta inecuación da origen al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 5x}{2x + 1} \leq 4 \\ \frac{x^2 + 5x}{2x + 1} > 0 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$\frac{x^2 + 5x}{2x + 1} \leq 4$$

Trasponiendo términos:

$$\frac{x^2 + 5x}{2x + 1} - 4 \leq 0$$

Sacando común denominador:

$$\frac{x^2 + 5x - 8x - 4}{2x + 1} \leq 0$$

Reduciendo términos:

$$\frac{x^2 - 3x - 4}{2x + 1} \leq 0$$

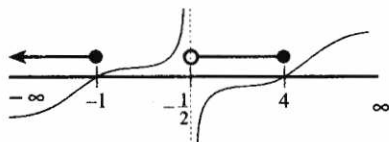
Factorizando:

$$\frac{(x-4)(x+1)}{2x+1} \leq 0$$

Estudiamos la función

$$y = \frac{(x-4)(x+1)}{2x+1}$$

Gráfica:



Segunda inecuación:

$$\frac{x^2 + 5x}{2x+1} > 0$$

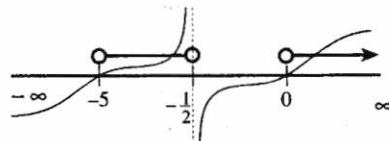
Factorizando:

$$\frac{x(x+5)}{2x+1} > 0$$

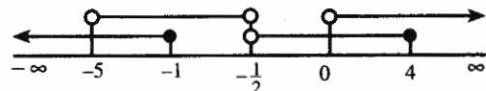
Estudiamos la función

$$y = \frac{x(x+5)}{2x+1}$$

Gráfica:



Gráfica común:



Solución:

$$[-5, -1] \cup (0, 4]$$

Ejemplo 52

$$\text{Resolver: } \frac{2}{\lg_{\frac{1}{2}} x + 3} \geq \frac{1}{\lg_{\frac{1}{2}} x - 2}$$

Para trabajar con más comodidad haremos el siguiente cambio de variable:

$$\lg_{\frac{1}{2}} x = a$$

Tendremos entonces:

$$\frac{2}{a+3} \geq \frac{1}{a-2}$$

Trasponiendo términos:

$$\frac{2}{a+3} - \frac{1}{a-2} \geq 0$$

Sacando común denominador:

$$\frac{2(a-2) - (a+3)}{(a+3)(a-2)} \geq 0$$

Reduciendo términos:

$$\frac{a-7}{(a+3)(a-2)} \geq 0$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{\lg_{\frac{1}{2}} x - 7}{\left(\lg_{\frac{1}{2}} x + 3\right)\left(\lg_{\frac{1}{2}} x - 2\right)} \geq 0$$

Condición básica para que la expresión anterior sea real es que x sea una cantidad positiva:

$$x > 0 \quad (I)$$

Calculamos las raíces de los factores del numerador y del denominador:

$$\lg_{\frac{1}{2}} x = 7$$

$$\lg_{\frac{1}{2}} x = -3$$

$$\lg_{\frac{1}{2}} x = 2$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$x = \frac{1}{128}$$

$$x = 8$$

$$x = \frac{1}{4}$$

La inecuación original tiene la misma solución que el sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} \frac{x - \frac{1}{128}}{(x-8)\left(x - \frac{1}{4}\right)} \leq 0 \end{cases} \quad (II)$$

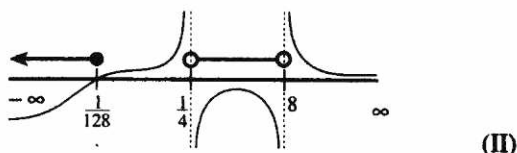
Obsérvese que hemos cambiado el sentido en la inecuación (II). La explicación es idéntica a la que dábamos en el Ejemplo 47 (pág. 621).

La inecuación (I) ya está en su mínima expresión.

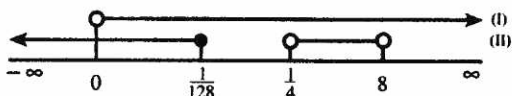
Para resolver la segunda, estudiamos la función

$$y = \frac{x - \frac{1}{128}}{(x-8)\left(x - \frac{1}{4}\right)}$$

Gráfica:



Gráfica común:



Solución:

$$\left(0, \frac{1}{128}\right] \cup \left(\frac{1}{4}, 8\right)$$

Ejemplo 53

$$\text{Resolver: } \lg_{2x-1}(x+3) + \lg_{2x-1}(5-x) \geq 1$$

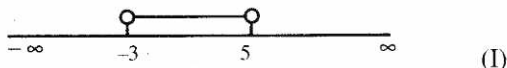
Condición básica para que los logaritmos de la inecuación sean reales es que la variable tome valores que satisfagan el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+3 > 0 \\ 5-x > 0 \end{cases}$$

De donde:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x < 5 \end{cases}$$

Gráfica:



Resolvemos ahora la inecuación.

Potenciando el miembro de la izquierda:

$$\lg_{2x-1}(x+3)(5-x) \geq 1$$

La inecuación es, mediante (15'), equivalente a la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} 2x-1 > 1 \\ (x+3)(5-x) \geq 2x-1 \end{cases} \quad (\text{A})$$

$$\begin{cases} 0 < 2x-1 < 1 \\ 0 < (x+3)(5-x) \leq 2x-1 \end{cases} \quad (\text{B})$$

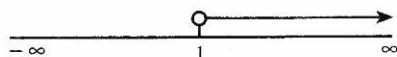
SISTEMA (A)

Primera inecuación:

$$2x-1 > 1$$

$$2x > 2$$

$$x > 1$$



Segunda inecuación:

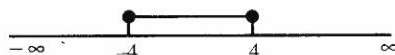
$$(x+3)(5-x) \geq 2x-1$$

$$-x^2 + 2x + 15 \geq 2x-1$$

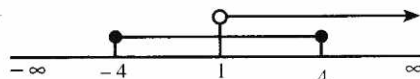
$$-x^2 \geq -16$$

$$x^2 \leq 16$$

$$|x| \leq 4$$



Gráfica común:



Solución del sistema (A):

$$(1, 4] \quad (\text{II})$$

SISTEMA (B)

El segundo sistema es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} 0 < 2x - 1 < 1 \\ (x+3)(5-x) \leq 2x - 1 \\ (x+3)(5-x) > 0 \end{cases}$$

Primera inecuación:

$$0 < 2x - 1 < 1$$

$$1 < 2x < 2$$

$$\frac{1}{2} < x < 1$$

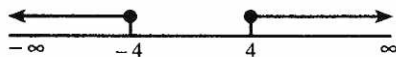


Segunda inecuación:

$$(x+3)(5-x) \leq 2x - 1$$

Desarrollando y llevando
luego a la mínima expresión:

$$|x| \geq 4$$



Tercera inecuación:

$$(x+3)(5-x) > 0$$

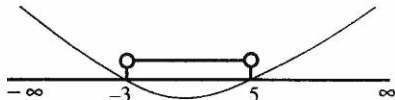
Cambiando signo:

$$(x+3)(x-5) < 0$$

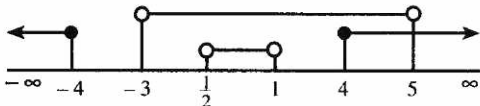
Estudiamos la función

$$y = (x+3)(x-5)$$

Gráfica:



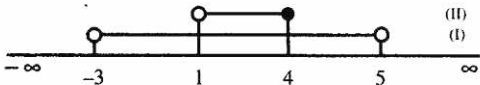
Gráfica común para las
inecuaciones del sistema (B):



El sistema (B) no tiene
solución.

La solución definitiva del
sistema son los valores que
satisfacen las condiciones (I)
y (II).

Gráfica común:



Solución:

$$(1, 4]$$

Ejercicio 148

Resolver las siguientes inecuaciones:

- 1) $\lg_2(x-1) < 1$
- 2) $\lg_{\frac{1}{3}}(2x+1) < 2$
- 3) $\lg_8(x^2 - 4x + 3) < 1$
- 4) $\lg_4(3x-2) \leq \frac{1}{2}$
- 5) $\lg_{\frac{1}{3}}(x^2 - 6x + 13) \geq -1$
- 6) $\lg \frac{x-5}{x+7} > 0$
- 7) $\lg \frac{x^2 + 10x + 16}{x-1} > 1$
- 8) $\lg \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 5x + 6} < 0$
- 9) $\lg(x^2 - x + 98) \geq 2$
- 10) $\lg_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 4x}{2x-3} < 1$
- 11) $\lg_2 \sqrt{7x-20} \geq 3$
- 12) $\lg_{\frac{1}{4}} \sqrt{5x-16} \geq -\frac{1}{2}$
- 13) $\lg_4 \sqrt{x^3 - 10x^2 + 31x - 14} > 2$
- 14) $\lg_{13}(x+5) + \lg_{13}(x-7) < 1$
- 15) $\lg_{\frac{1}{2}}(x+4) + \lg_{\frac{1}{2}}(x+5) \geq -1$
- 16) $\lg(x+5) + \lg(x+7) - \lg(2x+11) \leq 0$
- 17) $\lg_{\frac{1}{3}}(x+5) + \lg_{\frac{1}{3}}(x+3) + \lg_{\frac{1}{3}}(x-2) - \lg_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x - 2) \geq -1$
- 18) $\lg^2 x - \lg x - 2 \leq 0$
- 19) $\lg_2^2 x - \lg_2 x - 6 > 0$
- 20) $\frac{2}{\lg_3 x - 1} + \frac{1}{\lg_3 x - 2} \leq 1$
- 21) $\frac{\lg_5^2 x + \lg_5 x - 6}{\lg_5 x} > 3$
- 22) $\lg_2^2(x+2) - \lg_2(x+2) - 2 > 0$
- 23) $\lg_{\frac{1}{2}}^2 x - \lg_{\frac{1}{2}} x < 0$
- 24) $\lg_2^2(8x) + \lg_2^2(2x) + \lg_2^2 x \geq 38$
- 25) $\lg_2 x + \lg_4 x + \lg_{16} x \geq \frac{7}{2}$
- 26) $\lg_x(2x-3) > 1$
- 27) $\lg_{x+1}(3x-2) \leq 1$
- 28) $\lg_{4-x}(2x+7) > 1$
- 29) $\lg_{x^2}(x+2) < 1$
- 30) $\lg_{x-1}(x^2 + 3x) < 1$
- 31) $\lg_x \frac{x+3}{x-1} > 1$
- 32) $\lg_{x-3}(2x-3) \geq 2$
- 33) $\lg_{x+2}(x-1) \leq -1$
- 34) $\lg_{x+2}(x^3 + 8x^2 + 19x + 12) \geq 3$
- 35) $\sqrt{\lg_2 x - 3} > \sqrt{2 \lg_2 x - 8}$
- 36) $\lg_3 x - 1 > \sqrt{7 - \lg_3 x}$
- 37) $\lg_2 x + 1 < \sqrt{\lg_2 x + 3}$
- 38) $\lg_{\frac{3}{2}} x + 2 \lg_{\frac{2}{3}} x - 5 \lg_{\frac{1}{2}} x - 6 \leq 0$
- 39) $\lg_x(x-1) + \lg_x(2x+2) > 2$
- 40) $\lg_{x^2-1}(x+2) + \lg_{x^2-1}(7-x) < 1$
- 41) $\frac{1}{\lg x} - 1 > \frac{\operatorname{colg} x}{4}$

INECUACIONES TRIGONOMETRICAS

Para resolver las inecuaciones trigonométricas nos valdremos de los principios utilizados hasta el momento en la resolución de ecuaciones y de todas las relaciones y fórmulas que rigen la trigonometría, teniendo presente el campo de variabilidad de cada una de las funciones trigonométricas.

Suponemos, en consecuencia, que el estudiante domina la demostración de identidades y las técnicas de resolución de ecuaciones trigonométricas, en especial las que se refieren a la forma de expresar el valor principal de una determinada función trigonométrica (VP).[†]

Comenzaremos estudiando las inecuaciones trigonométricas elementales:

1) Inecuaciones de coseno:

$$\cos x \geq a \quad \text{y} \quad \cos x \leq a \quad (|a| \leq 1)$$

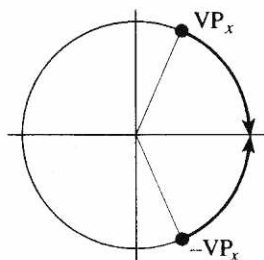
El valor del coseno de un ángulo va creciendo al acercarse a cero el valor del ángulo.

La solución, por tanto, de la inequación $\cos x \geq a$ podemos expresarla de la siguiente forma:

$$-VP_x + 2k\pi \leq x \leq VP_x + 2k\pi$$

o mediante el intervalo

$$[-VP_x + 2k\pi, VP_x + 2k\pi]$$



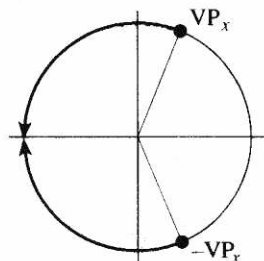
Por el contrario, el valor del coseno decrece a medida que el valor del ángulo se acerca a π .

La solución de la inequación $\cos x \leq a$ podemos expresarla, entonces, así:

$$VP_x + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - VP_x + 2k\pi$$

o mediante el intervalo

$$[VP_x + 2k\pi, 2\pi - VP_x + 2k\pi]$$

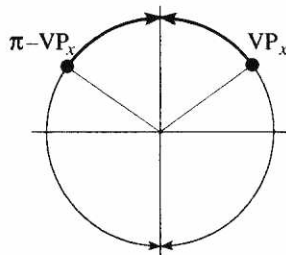


2) Inecuaciones de seno

$$\sin x \geq a \quad \text{y} \quad \sin x \leq a \quad (|a| \leq 1)$$

El valor del seno crece al acercarse a $\frac{\pi}{2}$ el valor del ángulo, en el sentido horario o en el sentido contrario, y decrece al acercarse a $\frac{3\pi}{2}$ (en cualquiera de los dos sentidos).

Podemos, pues, expresar las soluciones de las i-



[†] Ver Selección de Temas de Matemática 4, pág. 185 y ss.

ecuaciones elementales de seno de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen} x \geq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + 2k\pi \leq x \leq \pi - \operatorname{VP}_x + 2k\pi$$

$$\operatorname{sen} x \leq a \quad \rightarrow \quad \pi - \operatorname{VP}_x + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + \operatorname{VP}_x + 2k\pi$$

o con los respectivos intervalos.

3) Inecuaciones de tangente

$$\operatorname{tg} x \geq a \quad \text{y} \quad \operatorname{tg} x \leq a \quad (a \in \mathbb{R})$$

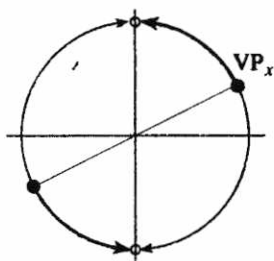
El valor de la tangente crece al acercarse el valor del ángulo, en el sentido antihorario, a $\frac{\pi}{2}$ ó a $\frac{3\pi}{2}$ y decrece al acercarse en sentido horario a esos mismos valores.

Podemos, pues, expresar las soluciones así:

$$\operatorname{tg} x \geq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\operatorname{tg} x \leq a \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \operatorname{VP}_x + k\pi$$

o con los respectivos intervalos.



4) Inecuaciones de cotangente

$$\operatorname{ctg} x \geq a \quad \text{y} \quad \operatorname{ctg} x \leq a \quad (a \in \mathbb{R})$$

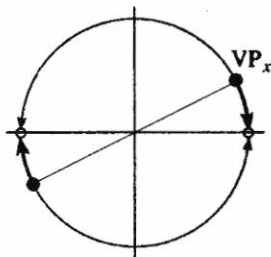
El valor de la cotangente crece al acercarse el valor del ángulo, en sentido horario, a 0 ó a π y decrece al acercarse en sentido antihorario a esos mismos valores.

Solución de las inecuaciones de cotangente:

$$\operatorname{ctg} x \geq a \quad \rightarrow \quad k\pi < x \leq \operatorname{VP}_x + k\pi$$

$$\operatorname{ctg} x \leq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + k\pi \leq x < \pi + k\pi$$

La solución se puede expresar también por intervalos.



INECUACIONES TRIGONOMETRICAS - Resumen

$$\cos x \geq a \quad \rightarrow \quad -\operatorname{VP}_x + 2k\pi \leq x \leq \operatorname{VP}_x + 2k\pi \quad (|a| \leq 1) \quad (16^I)$$

$$\cos x \leq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - \operatorname{VP}_x + 2k\pi \quad (|a| \leq 1) \quad (17^I)$$

$$\operatorname{sen} x \geq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + 2k\pi \leq x \leq \pi - \operatorname{VP}_x + 2k\pi \quad (|a| \leq 1) \quad (18^I)$$

$$\operatorname{sen} x \leq a \quad \rightarrow \quad \pi - \operatorname{VP}_x + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + \operatorname{VP}_x + 2k\pi \quad (|a| \leq 1) \quad (19^I)$$

$$\operatorname{tg} x \geq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (20^I)$$

$$\operatorname{tg} x \leq a \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \operatorname{VP}_x + k\pi \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (21^I)$$

$$\operatorname{ctg} x \geq a \quad \rightarrow \quad k\pi < x \leq \operatorname{VP}_x + k\pi \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (22^I)$$

$$\operatorname{ctg} x \leq a \quad \rightarrow \quad \operatorname{VP}_x + k\pi \leq x < \pi + k\pi \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (23^I)$$

El cuadro anterior se simplifica en las inecuaciones de valor absoluto, tal como puede apreciarse a continuación:

$$\left. \begin{array}{l} |\cos x| \geq a \\ |\sen x| \leq a \\ |\operatorname{tg} x| \leq a \\ |\operatorname{ctg} x| \geq a \end{array} \right\} \rightarrow -VP_x + k\pi \leq x \leq VP_x + k\pi \quad (24^1)$$

$$\left. \begin{array}{l} |\cos x| \leq a \\ |\sen x| \geq a \\ |\operatorname{tg} x| \geq a \\ |\operatorname{ctg} x| \leq a \end{array} \right\} \rightarrow VP_x + k\pi \leq x \leq \pi - VP_x + k\pi \quad (25^1)$$

Ejemplo 54

Resolver: $\sen x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

El valor principal de x es:

$$VP_x = -\frac{\pi}{4}$$

Utilizando (18¹):

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$$

Reduciendo términos:

$$-\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

En forma de intervalo:

$$\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right]$$

Ejemplo 55

Resolver: $\cos x < -\frac{1}{2}$

El valor principal es:

$$VP_x = \frac{2\pi}{3}$$

Utilizando (17¹):

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Reduciendo términos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

En forma de intervalo:

$$\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right)$$

Ejemplo 56

Resolver: $\operatorname{tg} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

El valor principal es:

$$VP_x = -\frac{\pi}{6}$$

Utilizando (21¹): $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq -\frac{\pi}{6} + k\pi$

Solución: $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

Ejemplo 57

Resolver: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

El valor principal es: $VP_{x+\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{6}$

Utilizando (16¹): $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Restando $\frac{\pi}{4}$ a cada miembro: $-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Reduciendo términos: $-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2k\pi$

Solución: $\left[-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi\right]$

Ejemplo 58

Resolver: $\operatorname{ctg} 2x \geq 1$

El valor principal es: $VP_{2x} = \frac{\pi}{4}$

Utilizando (22¹): $k\pi < 2x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$

Dividiendo por 2 cada uno de los miembros: $\frac{k\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$

Solución: $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right]$

Ejemplo 59

Resolver: $|\operatorname{ctg} x| \leq 2 + \sqrt{3}$

El valor principal es: $VP_x = \frac{\pi}{12}$

Utilizando (25¹): $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \pi - \frac{\pi}{12} + k\pi$

Reduciendo términos: $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi$

Solución: $\left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right]$

Ejemplo 60

Resolver: $\operatorname{tg}^2 5x - 25 > 0$

Despejando: $\operatorname{tg}^2 5x > 25$

La expresión anterior es equivalente a ésta otra: $|\operatorname{tg} 5x| > 5$

El valor principal es: $\operatorname{VP}_{5x} = 78^\circ 41'$

Utilizando (25'): $78^\circ 41' + k \cdot 180^\circ < 5x < 180^\circ - 78^\circ 41' + k \cdot 180^\circ$

Reduciendo términos: $78^\circ 41' + k \cdot 180^\circ < 5x < 101^\circ 19' + k \cdot 180^\circ$

Dividiendo por 5: $15^\circ 44' + k \cdot 36^\circ < x < 20^\circ 16' + k \cdot 36^\circ$

Solución: $(15^\circ 44' + k \cdot 36^\circ, 20^\circ 16' + k \cdot 36^\circ)$

Ejemplo 61

Resolver: $2 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 2 < 0$

Factorizando: $(\cos 2x + 2)(2 \cos 2x + 1) < 0$

Como el mínimo valor que puede tomar el coseno es -1 , el primer factor es siempre positivo, cualquiera sea el valor de la variable.

En consecuencia, para que el producto sea negativo, tiene que serlo el segundo factor: $2 \cos 2x + 1 < 0$

Despejando: $\cos 2x < -\frac{1}{2}$

El valor principal es: $\operatorname{VP}_{2x} = \frac{2\pi}{3}$

Utilizando (17'): $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

Dividiendo por 2: $\frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{2\pi}{3} + k\pi$

Solución: $(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi)$

Ejemplo 62

Resolver: $\frac{1}{2 \operatorname{sen} x - 1} + \frac{1}{2 \operatorname{sen} x + 1} \geq 0$

Sacando común denominador:

$$\frac{2 \operatorname{sen} x + 1 + 2 \operatorname{sen} x - 1}{(2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \operatorname{sen} x + 1)} \geq 0$$

Reduciendo términos:

$$\frac{4 \operatorname{sen} x}{(2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \operatorname{sen} x + 1)} \geq 0$$

Simplificando:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{(2 \operatorname{sen} x - 1)(2 \operatorname{sen} x + 1)} \geq 0$$

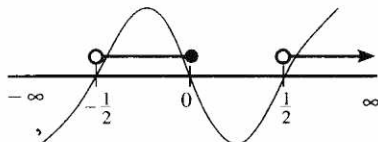
Si hacemos el cambio de variable

$$\operatorname{sen} x = k$$

podemos estudiar la función

$$y = \frac{k}{(2k - 1)(2k + 1)}$$

Gráfica:



La variable $\operatorname{sen} x$ debe tomar valores que satisfagan la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < \operatorname{sen} x \leq 0 & \text{(I)} \\ \operatorname{sen} x > \frac{1}{2} & \text{(II)} \end{cases}$$

Inecuación (I):

Es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x > -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Primera inecuación:

El seno es negativo en el 3° y 4° cuadrantes. Por tanto:

$$\pi + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi \quad \text{(a)}$$

Segunda inecuación:

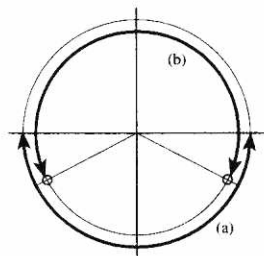
El valor principal es:

$$\operatorname{VP}_x = -\frac{\pi}{6}$$

Utilizando (18^f):

$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{(b)}$$

Llevamos a un mismo gráfico las condiciones (a) y (b).



Los ángulos que satisfacen las dos condiciones son los que pertenecen a los intervalos

$$\left[\pi + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$$

Inecuación (II): $\sin x > \frac{1}{2}$

Valor principal: $\text{VP}_x = \frac{\pi}{6}$

Utilizando (18¹): $\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Solución: $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right)$

La solución definitiva de la inecuación original son los intervalos de valores que satisfacen la agrupación:

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left[\pi + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right]$$

Ejemplo 63

Resolver: $\cos x + \sin x < 0$

Transformamos el segundo término en el coseno del complemento para poder factorizar la expresión:

$$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0$$

Factorizando: $2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Simplificando: $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

El coseno es negativo en el 2º y 3º cuadrante. Por tanto: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

Sumando $\frac{\pi}{4}$ a cada uno de los miembros: $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

Solución: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$

Ejemplo 64

Resolver: $\cos 3x \cos x > \cos 4x \cos 2x$

Deshacemos los productos utilizando las fórmulas de Werner:

$$\frac{1}{2} [\cos 4x + \cos 2x] > \frac{1}{2} [\cos 6x + \cos 2x]$$

Simplificando y reduciendo términos semejantes:

$$\cos 4x > \cos 6x$$

Trasponiendo términos:

$$\cos 4x - \cos 6x > 0$$

Factorizando:

$$-2 \sin 5x \sin(-2x) > 0$$

de donde, después de simplificar:

$$\sin 5x \sin 2x > 0$$

Para que el producto sea positivo la variable debe tomar valores que satisfagan la siguiente agrupación:

$$\begin{cases} \sin 5x > 0 \\ \sin 2x > 0 \end{cases} \quad (a)'$$

$$\begin{cases} \sin 5x < 0 \\ \sin 2x < 0 \end{cases} \quad (b)$$

Sistema (a)

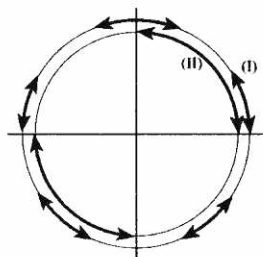
Como el seno es positivo en los dos primeros cuadrantes, el sistema (a) equivale a:

$$\begin{cases} 2k\pi < 5x < \pi + 2k\pi \\ 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Dividiendo por 5 la primera inecuación y por 2 la segunda, tenemos:

$$\begin{cases} \frac{2k\pi}{5} < x < \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} & (I) \\ k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi & (II) \end{cases}$$

Gráfica común: en el círculo externo están señalados los intervalos que satisfacen la condición (I); en el interno, los que satisfacen la condición (II):



Solución del sistema (A):

$$(2k\pi, \frac{\pi}{5} + 2k\pi) \cup (\frac{2\pi}{5} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{6\pi}{5} + 2k\pi, \frac{7\pi}{5} + 2k\pi) = A$$

Sistema (b)

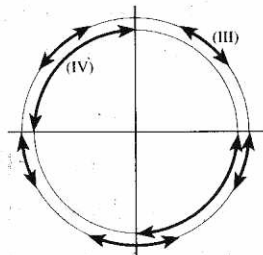
Como el seno es negativo en el 3° y 4° cuadrantes, el sistema (b) equivale a

$$\begin{cases} \pi + 2k\pi < 5x < 2\pi + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi < 2x < 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

de donde:

$$\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} < x < \frac{2\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \quad (III)$$

$$\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi \quad (IV)$$



Solución del sistema (b):

$$\left(\frac{3\pi}{5} + 2k\pi, \frac{4\pi}{5} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \frac{8\pi}{5} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{9\pi}{5} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right) = B$$

La solución de la agrupación y, por tanto, de la inecuación original son los intervalos de solución de cada uno de los sistemas que componen la agrupación:

$$A \cup B$$

Ejercicio 149

Resolver las siguientes inecuaciones:

- 1) $\cos x > -\frac{1}{2}$
- 2) $2 \sin x + 1 \leq 0$
- 3) $2 \sin x + 1 > 0$
- 4) $\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 > 0$
- 5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$
- 6) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$
- 7) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$
- 8) $\operatorname{ctg} 3x - 1 \leq 0$
- 9) $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 10) $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 11) $|\operatorname{tg} x| \geq 1$
- 12) $4 \cos^2 x \geq 3$
- 13) $2 \cos^2 2x + 13 \cos 2x - 7 < 0$
- 14) $\sin^2 x + \cos x + 1 > 0$
- 15) $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 1$
- 16) $\frac{\sin x}{\cos x + 3} \geq 0$
- 17) $\sin 2x \cos^2 x > 0$
- 18) $\sin x - \cos x > 0$
- 19) $\cos x - \sin x > 0$
- 20) $2 \sin^2 x - \sin x > 0$
- 21) $2 \cos^2 x - 3 \sin x > 0$
- 22) $\cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \geq 0$
- 23) $2 \sin^2 x - \sin x - 1 < 0$
- 24) $\cos^2 5x \cos^3 \frac{2x}{3} \geq 0$
- 25) $\operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x \geq 0$
- 26) $\cos 2x + 5 \sin x + 2 > 0$
- 27) $3 \operatorname{tg}^2 x - 1 < 0$
- 28) $\operatorname{tg}^2 x - 3 > 0$
- 29) $\sin^2 x - 3 \cos^2 x \leq 0$
- 30) $2 \sin \frac{x}{2} - \sin x > 0$

$$31) \cos 4x - 2\sin^2 2x + 2 \geq 0$$

$$32) (2 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 1 \leq 0$$

$$33) 4\operatorname{sen} 3x - \sqrt{5} \geq 1$$

$$34) \sqrt{2} \cos^2 2x - \cos 2x > 0$$

$$35) 2\sin^2 x + \sqrt{2} \sin x < 0$$

$$36) 4\sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin x \cos x - 2\cos^2 x < 1$$

$$37) 4\sin^2 x - (2\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\sin x + \sqrt{6} < 0$$

$$38) \cos x < \sec x$$

$$39) \csc x > \sin x$$

$$40) \sin x > \operatorname{tg} x$$

$$41) \cos x + \sec x < 0$$

$$42) \sin x + \csc x > 1$$

$$43) \cos x + \sec x \geq 2$$

$$44) \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \leq 2$$

$$45) 2 - \sin^2 x - 2\cos x > 0$$

$$46) \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 \leq \frac{1}{2} \sec^2 x$$

$$47) \sin 2x > \operatorname{tg} x$$

$$48) \sin 2x - 2\sin x > \cos x - 1$$

$$49) \sin 2x < \operatorname{ctg} x$$

$$50) \cos x - \sqrt{3} \sin x \geq 0$$

$$51) \sin 2x \geq 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3}$$

$$52) \frac{\sqrt{2} \sin^2 x}{\cos x} > \operatorname{tg}^2 x$$

$$53) \frac{\cos^2 x}{2\cos x - 1} > \cos x$$

$$54) \sin 7x - 2\sin 5x + \sin 3x < 0$$

$$55) \cos 3x - \cos 2x + \cos x \geq 0$$

$$56) \sin 5x + \sin 3x < \cos x$$

$$57) \frac{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 6}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6} > 0$$

$$58) \frac{1 - \sin x}{1 - 2\sin x} < \frac{1 + \sin x}{1 - 4\sin^2 x}$$

$$59) \frac{2\sin 2x - 1}{\cos 2x - 3\cos x + 2} > 0$$

$$60) 1 - 2\cos x > \sqrt{1 + \cos x}$$

$$61) \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 4x - 1} > 0$$

INECUACIONES CON DOS VARIABLES

El conjunto de soluciones de una desigualdad con dos variables $f_{(x,y)} > 0$ ó $f_{(x,y)} < 0$ es un conjunto de pares ordenados de números reales (x, y) . Puede como tal ser representado mediante un conjunto de puntos del plano.

INECUACIONES LINEALES

Si en la inecuación, $f_{(x,y)}$ es una expresión de primer grado, tenemos una inecuación lineal con dos variables.

$f_{(x,y)} = 0$ es entonces la ecuación de una recta que divide el plano en dos semiplanos.

Si las coordenadas de un punto P de uno de los semiplanos satisface la inecuación, todos los puntos del semiplano que contiene a P son solución de la inecuación. Si, por el contrario, las coordenadas de P no satisfacen la inecuación, la solución de la misma son los puntos del semiplano que no contiene a P .

Lo anterior nos permite resolver las inecuaciones $f_{(x,y)} > 0$ ó $f_{(x,y)} < 0$ siguiendo estos pasos:

a) Se traza la recta cuya ecuación es $f_{(x,y)} = 0$

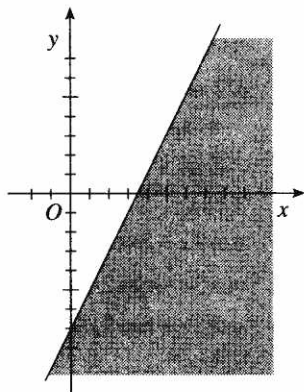
b) Se toman las coordenadas de un punto P que no pertenezca a la recta (el punto más conveniente es el origen, siempre que no pertenezca a la recta) y se sustituyen en la inecuación: si el resultado es una desigualdad cierta, todos los puntos del semiplano que contiene a P son solución; en caso contrario, los del semiplano que no lo contiene.

Ejemplo 65

Resolver: $2x - y - 7 \geq 0$

Representamos gráficamente la recta $2x - y - 7 = 0$. Elegimos las coordenadas del origen y comprobamos que, al sustituirlas en la inecuación, obtenemos la desigualdad $-7 > 0$ que es obviamente falsa.

El semiplano solución es, por tanto, el que no contiene al origen O (área sombreada)



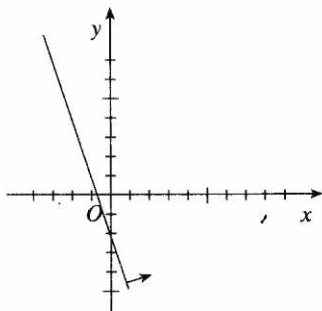
Ejemplo 66

Resolver el sistema
$$\begin{cases} 3x + y + 2 \geq 0 \\ 2x - 5y - 4 < 0 \end{cases}$$

La solución del sistema será el conjunto de puntos que satisfagan simultáneamente las dos inecuaciones.

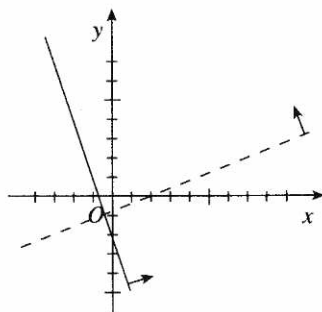
Primera inecuación

Representamos gráficamente la recta $3x + y + 2 = 0$ y comprobamos que, al sustituir las variables por las coordenadas del origen, la desigualdad resultante $2 \geq 0$ es cierta. El semiplano del origen es, pues, solución de la primera inecuación (señalamos esta circunstancia con una flecha en la parte inferior de la recta).

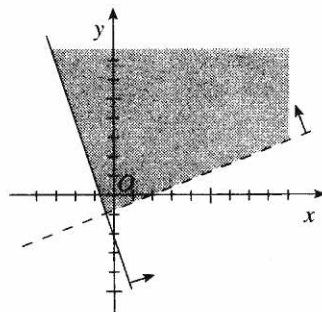


Segunda inecuación

Representamos en el mismo gráfico la recta $2x - 5y - 4 = 0$ y comprobamos que, al sustituir las variables por las coordenadas del origen, la desigualdad resultante $-4 < 0$ es igualmente cierta. El semiplano del origen es, entonces, solución de la segunda inecuación (señalamos esto con una flecha en el extremo de la recta).



La solución del sistema será la porción del plano que se encuentra a la derecha de la primera recta y por encima de la segunda.



Nota: En el sistema que acabamos de resolver, el símbolo de la primera inecuación es " $\geq$ ". Significa esto que los puntos pertenecientes a la recta forman parte del conjunto solución. Por eso dibujamos la recta con una línea continua.

Por el contrario, el símbolo de la segunda inecuación es " $<$ " y los puntos pertenecientes a la segunda recta no forman parte del conjunto solución, por lo que dibujamos la recta con una línea a trazos.

En nuestro estudio evitaremos la complicación anterior trabajando exclusivamente con los símbolos " $\geq$ " y " $\leq$ ".

INECUACIONES LINEALES DE VALOR ABSOLUTO

Se puede comprobar fácilmente que la solución de una inecuación de la forma

$$|ax + by + c| \geq k$$

es el espacio externo al par de rectas

$$ax + by + c = k \quad \text{y} \quad ax + by + c = -k$$

La solución de una inecuación de la forma

$$|ax + by + c| \leq k$$

es, en cambio, el espacio comprendido entre las dos rectas.

Ejemplo 67

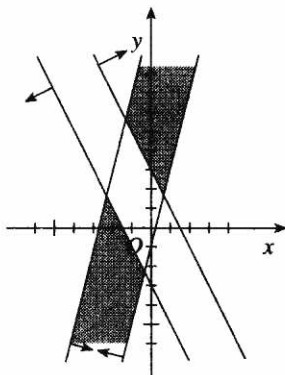
Resolver el sistema:
$$\begin{cases} |2x + y| \geq 3 \\ |4x - y + 5| \leq 6 \end{cases}$$

Primera inecuación

Señalamos en el gráfico la recta $2x + y = 3$ y la recta $2x + y = -3$. Solución de esta inecuación es el espacio externo a este par de rectas.

Segunda inecuación

Señalamos en el mismo gráfico las rectas $4x - y + 5 = 6$ y $4x - y + 5 = -6$. Solución de la segunda inecuación es el espacio comprendido entre estas dos rectas.



El espacio sombreado es el de los puntos que están simultáneamente por fuera de las dos primeras rectas y por dentro de las otras dos y es, por tanto, solución del sistema.

INECUACIONES CUADRATICAS

Las inecuaciones cuadráticas que veremos corresponden a las funciones cuadráticas estudiadas en el capítulo de cónicas.

a) Inecuaciones relacionadas con circunferencias

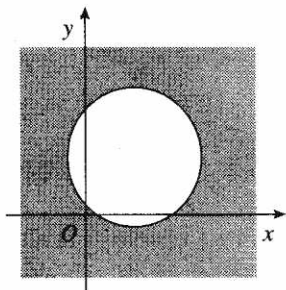
Si $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ es la condición geométrica que satisfacen los puntos del plano que están a una distancia R del punto (x_0, y_0) , las expresiones

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R^2$$

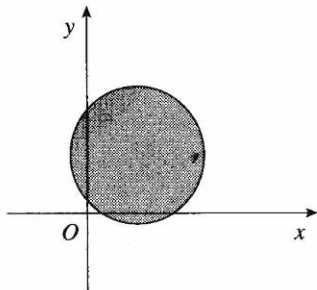
y
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

son, respectivamente, las de los puntos que están a una distancia mayor (es decir, los puntos externos a la circunferencia) y la de los que están a una distancia menor (es decir, los puntos internos):

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > R^2$$



$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2$$

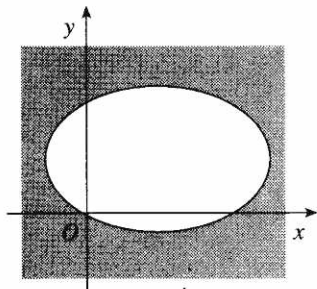


b) Inecuaciones relacionadas con elipses

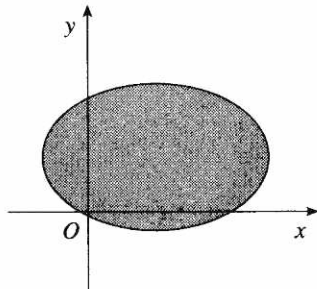
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

es la ecuación de los puntos cuya suma de distancias a los focos es $2a$ (una elipse). Si la suma de distancias es mayor, el punto se encuentra fuera de la elipse; si es menor, dentro de ella:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} > 1$$



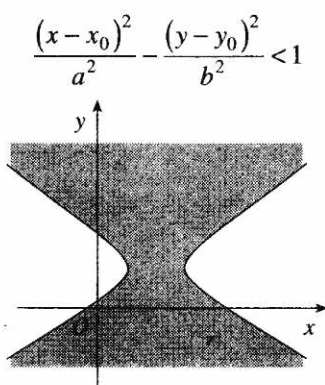
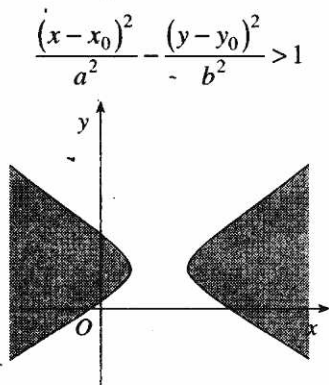
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} < 1$$



c) Inecuaciones relacionadas con hipérbolas

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

es la ecuación de los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es $2a$ (una hipérbola). Si la diferencia de distancias es mayor, el punto se encuentra fuera de las hojas de la hipérbola (las porciones del plano a las que pertenecen los focos de la hipérbola); si la diferencia de distancias es menor, el punto se encuentra entre las hojas de la hipérbola (la porción del plano que contiene el centro de la misma):



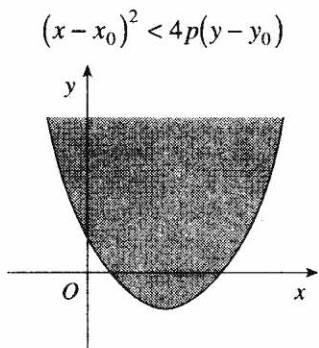
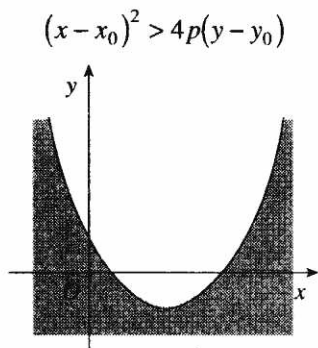
Lo dicho en los puntos b) y c) es válido también para el caso de la elipse y la hipérbola de eje mayor y eje real, respectivamente, paralelos al eje de ordenadas.

d) Inecuaciones relacionadas con parábolas

$$(x-x_0)^2 = 4p(y-y_0)$$

es la ecuación de los puntos cuya distancia a un punto (foco) y a una recta (directriz) es constante.

Si la distancia al foco es mayor que la distancia a la directriz, el punto se encuentra fuera de la parábola; si es menor, se encuentra dentro de ella (es decir, en el semiplano que contiene al foco):



Lo anterior es válido para el caso de la parábola de eje paralelo al de abscisas.

Ejemplo 68

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 10x - 32y + 73 \leq 0 \\ x^2 - y^2 - 8x + 8y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

Las expresiones anteriores corresponden, la primera a una elipse y la segunda, a una hipérbola.

Llevamos ambas expresiones a la forma canónica.

Primera inecuación: $(x^2 - 10x) + 4(y^2 - 8y) \leq -73$

$$2hx = -10x \quad 2kx = -8x$$

$$h = -5 \quad k = -4$$

$$h^2 = 25 \quad k^2 = 16$$

$$(x^2 - 10x + 25) + 4(y^2 - 8y + 16) \leq -73 + 25 + 4 \cdot 16$$

$$(x - 5)^2 + 4(y - 4)^2 \leq 16$$

$$\frac{(x - 5)^2}{16} + \frac{(y - 4)^2}{4} \leq 1$$

La gráfica corresponde a una elipse con las siguientes características:

$$C(5, 4)$$

$$a = 4$$

$$b = 2$$

Orientación horizontal

Solución: área interna de la elipse

Segunda inecuación:

$$(x^2 - 8x) - (y^2 - 8y) \leq -1$$

$$2hx = -8x \quad 2kx = -8x$$

$$h = -4 \quad k = -4$$

$$h^2 = 16 \quad k^2 = 16$$

$$(x^2 - 8x + 16) - (y^2 - 8y + 16) \leq -1 + 16 - 16$$

$$(x - 4)^2 - (y - 4)^2 \leq -1$$

$$-(x - 4)^2 + (y - 4)^2 \geq 1$$

(Al dividir todos los términos por -1 cambió el sentido de la inecuación).

La gráfica corresponde a una hipérbola equilátera con las siguientes características:

$$C(4, 4)$$

$$a = 1$$

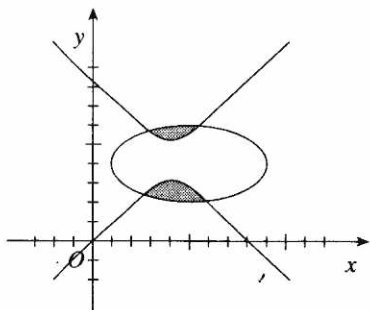
$$b = 1$$

Orientación vertical

Solución: área fuera de las hojas de la hipérbola

Hacemos una gráfica común para las dos inecuaciones (es conveniente que las líneas de construcción se hagan con trazos muy suaves para que puedan ser después fácilmente borradas).

Los puntos que satisfacen ambas inecuaciones son los que están simultáneamente dentro de la elipse y fuera de las hojas de la hipérbola y son las del área sombreada de la figura.



Ejemplo 69

Resolver el sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 12y + 15 \leq 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 10y + 17 \geq 0 \\ x^2 + 8x - 4y + 24 \leq 0 \end{cases}$$

Llevando a la forma canónica cada una de las tres expresiones, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-6)^2 \leq 25 & \text{(I)} \\ (x+1)^2 + (y-5)^2 \geq 9 & \text{(II)} \\ (x+4)^2 \leq 4(y-2) & \text{(III)} \end{cases}$$

Las expresiones anteriores corresponden a las siguientes curvas:

(I) Circunferencia

$$C(-2, 6)$$

$$R = 5$$

Solución: el círculo

(II) Circunferencia

$$C(-1, 5)$$

$$R = 3$$

Solución: área exterior a la circunferencia

(III) Parábola

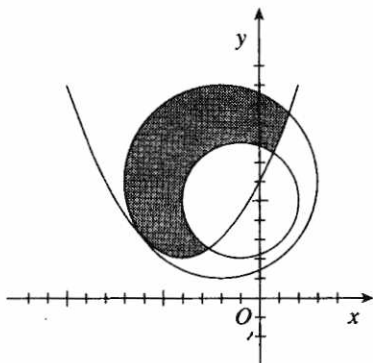
$$V(-4, 2)$$

$$p = 1$$

Orientación: vertical, abierta hacia arriba

Solución: área interna de la parábola

Gráfica común y solución: el área sombreada es el área interna a la primera circunferencia (la de radio mayor) y a la parábola y externa a la segunda circunferencia (la de radio menor):



Ejercicio 150

Resolver las inecuaciones y los sistemas que se proponen en los siguientes ejercicios:

- 1)
$$\begin{cases} x - 5y \leq 0 \\ 5x + 4y - 14 \leq 0 \end{cases}$$
- 2)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 \geq 0 \\ 5x + 9y + 40 \geq 0 \end{cases}$$
- 3) $|4x - 3y| \geq 6$
- 4)
$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 \leq 0 \\ |x - 4y - 16| \geq 4 \end{cases}$$
- 5)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 8x + 4y + 11 \geq 0 \\ y^2 - 4y - x + 5 \leq 0 \end{cases}$$
- 6)
$$\begin{cases} x^2 - y^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 - 4y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$
- 7)
$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 36 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 \leq 0 \end{cases}$$
- 8)
$$\begin{cases} x^2 + 16y^2 - 8x - 128y + 256 \geq 0 \\ 16x^2 + y^2 - 128x - 8y + 256 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 \leq 0 \end{cases}$$
- 9)
$$\begin{cases} 4x^2 - 9y^2 - 16x + 72y - 92 \leq 0 \\ 25x^2 + 9y^2 - 250x - 90y + 625 \leq 0 \\ y^2 - 8y - 2x + 28 \geq 0 \end{cases}$$
- 10) $|x^2 + y^2 + 4x + 2y - 12| \leq 8$

$$11) \begin{cases} x^2 + y^2 - 8y - 9 \leq 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 72y + 108 \geq 0 \\ x^2 - y^2 + 8y - 17 \geq 0 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} |x - y| \leq 4 \\ 4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 \geq 0 \\ x^2 + y^2 - 36 \leq 0 \end{cases}$$

$$13) \frac{x^2 + y^2 + 6y - 7}{|2x - 5y - 15| - 5} \leq 0$$

$$14) \begin{cases} |x| + |y| \leq 5 \\ x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$15) \frac{|x^2 + 6x - 2y + 11| - 2}{|x - 3y + 15| - 3} \leq 0$$

$$16) (x^2 + y^2 - 2y - 4 - 4x)(|2x + 3y - 3| - 9) \geq 0$$

$$17) |x| - |y| \geq 3$$

$$18) |x| + |x - 1| + |y| \geq 3$$

$$19) (|2x^2 + 2y^2 - 16x - 20y + 107| - 7)(|x + 4y - 24| - 4) \leq 0$$

$$20) (x^2 + y^2 - 2y + 18 - 8)(|2|x - y - 1| - x - y - 1|) \leq 0$$

Ejercicio 151

Ejercicios de recapitulación

Resolver las inecuaciones que se proponen a continuación:

$$1) |5x + 1| + |2x - 2| \geq x + 11$$

$$2) \lg_{\frac{1}{4}} x < \lg_{\frac{1}{2}} x$$

$$3) \lg_{\frac{1}{3}} x > \lg_{\frac{1}{9}}(3x)$$

$$4) \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x^6 - 2x^3 + 1}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$$

$$5) \lg_{2-x}(x+3) \geq -1$$

$$6) \frac{\lg_3 \frac{x}{27} \cdot \lg_3 \frac{x}{3}}{\lg_3 \frac{x}{9} \cdot \lg_3 x} \leq 0$$

$$7) \sqrt{4 - \sqrt{1-x}} - \sqrt{2-x} > 0$$

$$8) x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\lg_2 \frac{1}{3}} \leq 7^{\frac{1}{\lg_1 \frac{1}{7}}}$$

$$9) \lg_x(2x) \leq \sqrt{\lg_x(2x^3)}$$

$$10) \cos^2 x(\operatorname{tg} x + 1) > 1$$

$$11) \lg_{\frac{1}{2}} \lg_2 \lg_3(x+1) > 0$$

$$12) \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg_2 \lg_3(x^2 - 2x)} > 1$$

$$13) \lg_2(3^x - 5) \cdot \lg_{3^x - 5}(4^x - 8) > 3$$

$$14) \frac{|x^2 + 2x| - 3x - 6}{|x^2 + 4x - 3| - x - 7} \geq 0$$

$$15) \lg_{\cos x}(\sin x + \cos x) > 1$$

$$16) \lg_{\cos x}(\sin x - \cos x) < 1$$

$$17) \lg_{\lg x}(2 \sec^2 x - 5) > 2$$

$$18) 2 \operatorname{tg} 2x < 3 \operatorname{tg} x$$

$$19) 1 < \frac{3x + 10}{x + 7} < 2$$

- 20) ¿Entre qué valores numéricos debe estar comprendido el parámetro k para que la inequación

$$\left| \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

se verifique para cualquier valor de x ?

- 21) Determinar el intervalo numérico al que debe pertenecer x para que 3 , $2 - x$ y $\sqrt{x^2 + 8x + 7}$ sean las medidas de los tres lados de un triángulo.
- 22) Determinar para qué valores de a el siguiente sistema tiene solución única:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 2 \leq 0 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

- 23) Se compra un número par de naranjas; si se vende la cuarta parte, quedan menos de 118 por vender y, si se vendiera la sexta parte, quedarían más de 120 por vender. ¿Cuántas naranjas hay?



VECTORES EN EL ESPACIO

El presente estudio presupone el dominio del concepto de vector y del álgebra vectorial referida a vectores del plano. Nos limitaremos en él a extender a los vectores del espacio los conceptos, características y propiedades ya estudiados para los vectores del plano.

Coordenadas en el espacio

Para señalar puntos y vectores en el espacio se utiliza un sistema de tres ejes coordenados de origen común O y perpendicular cada uno de ellos a los otros dos.

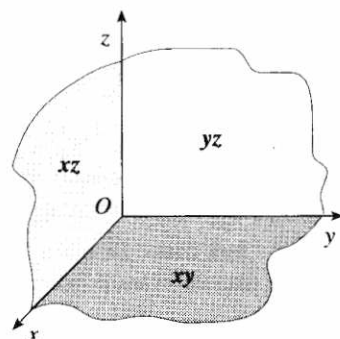
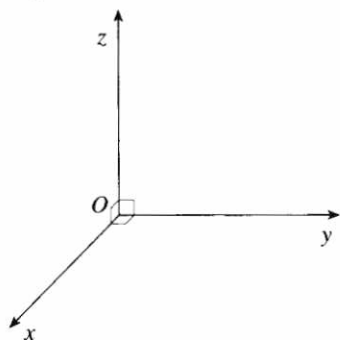
Para dar mejor la sensación de tridimensionalidad, se señalan los semiejes positivos y sólo en caso de necesidad las prolongaciones negativas.

Se entiende, entonces, que, a partir del origen, en cada uno de los ejes se van obteniendo valores positivos cada vez mayores a medida que nos alejamos del origen en las direcciones que indican las flechas.

Cada par de ejes coordenados genera un plano. Los planos xy , yz , xz son planos coordenados

Si establecemos la comparación con la esquina de una habitación, el plano xy sería el piso y los planos yz y xz dos de las paredes.

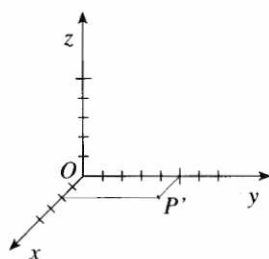
Cada uno de los ejes es la intersección de dos de los planos y el origen es la intersección de los tres ejes y de los tres planos.



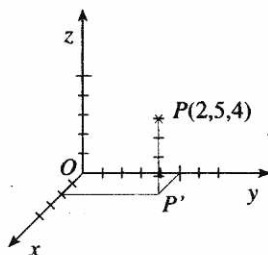
Representación de puntos

Para representar puntos en el espacio, por ejemplo el punto $P(2,5,4)$, procederemos de la siguiente forma:

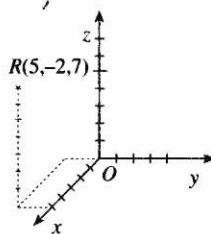
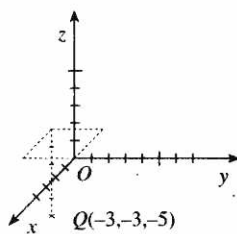
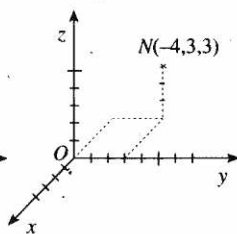
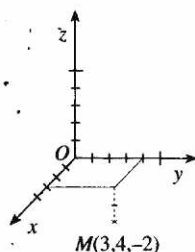
1) Señalaremos su proyección sobre el plano xy : para esto trazaremos una paralela al eje y por $x = 2$, y una paralela al eje x por $y = 5$, obteniendo así el punto P' .



2) Alzamos sobre P' una paralela al eje z . Sobre esta recta y a 4 unidades de P' se encuentra el punto P .



En las figuras de abajo están gráficamente representados puntos que tienen una o más coordenadas negativas:



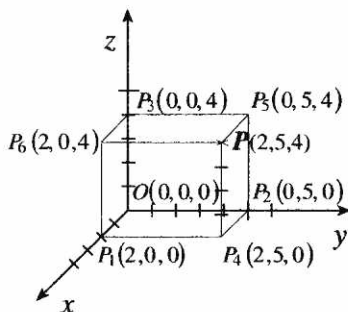
Si tomamos nuevamente la representación del punto $P(2, 5, 4)$ y completamos un cubo, tal como se muestra en la siguiente figura, podemos observar

1) los puntos P_1 , P_2 y P_3 que son las proyecciones ortogonales de P sobre los ejes x , y y z , respectivamente.

Para hallar las coordenadas de la proyección ortogonal de un punto sobre uno de los ejes basta anular todas las coordenadas excepto la del eje sobre el que se proyecta el punto.

2) los puntos P_4 , P_5 y P_6 que son las proyecciones ortogonales de P sobre los planos xy , yz y xz , respectivamente.

Para hallar las coordenadas de la proyección ortogonal de un punto sobre uno de los planos, se anula la coordenada correspondiente al eje perpendicular al plano.



Ejercicio 152

- 1) Representar gráficamente los puntos $A(2, 3, 6)$; $B(5, 1, 3)$; $C(4, 1, 9)$; $D(1, 7, -3)$; $E(-1, 4, 2)$; $F(3, -2, 3)$; $G(1, -3, -4)$; $H(-4, -2, 2)$; $I(-1, -5, -3)$: hacer un gráfico para cada punto.
- 2) Representar gráficamente el triángulo de vértices $A(2, 6, 1)$; $B(1, 2, 5)$ y $C(4, 1, 4)$.
- 3) Representar gráficamente el triángulo de vértices $A(4, 4, 1)$; $B(1, 3, 6)$ y $C(2, 0, 2)$.

- 4) Un paralelepípedo de dimensiones $2 \times 4 \times 6$ está colocado en un sistema de ejes de tal forma que una de las aristas menores coincide con el eje x y una de las mayores con el eje z . Determinar las coordenadas de sus vértices.
- 5) Los puntos $O(0,0,0)$; $A(0,6,0)$; $B(3,6,0)$ y $C(3,0,0)$ son los vértices de la base de un prisma (señálelos y trace los segmentos AB y BC). Los puntos $D(0,0,7)$; $E(0,6,7)$; $F(3,6,7)$ y $G(3,0,7)$ son los vértices superiores (señálelos; trace los segmentos DE , EF , FG , GD y trace por último los segmentos CG , BF y AE). Calcule el área total de los lados del prisma y el volumen del mismo.

Componentes de un vector

Dado un sistema de ejes coordenados y en él un vector de origen en el punto $A(x_1, y_1, z_1)$ y extremo en el punto $B(x_2, y_2, z_2)$, se denominan componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ a las coordenadas

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad (1^v)$$

Ejemplo 1

Dados los puntos $A(3, -2, 5)$ y $B(-4, 6, -3)$, hallar las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$; representar gráficamente los vectores.

Las componentes de los vectores son:

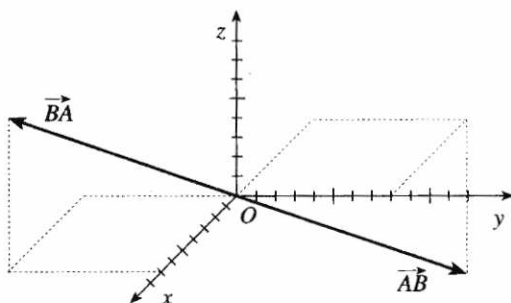
$$\overrightarrow{AB} = (-4 - 3, 6 + 2, -3 - 5)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-7, 8, -8)$$

$$\overrightarrow{BA} = (3 + 4, -2 - 6, 5 + 3)$$

$$\overrightarrow{BA} = (7, -8, 8)$$

Representación gráfica de los vectores:



Ejercicio 153

Dados los puntos $A(3, -5, 4)$; $B(-2, 3, 5)$; $C(5, -4, -3)$ y $D(1, -5, 3)$, determinar las componentes de cada uno de los siguientes vectores. Representar gráficamente los vectores de los ejercicios pares:

1) $\overrightarrow{AB}$

4) $\overrightarrow{BC}$

7) $\overrightarrow{CA}$

9) $\overrightarrow{DA}$

2) $\overrightarrow{AC}$

5) $\overrightarrow{BD}$

8) $\overrightarrow{DB}$

10) $\overrightarrow{CB}$

3) $\overrightarrow{AD}$

6) $\overrightarrow{CD}$

Multiplicación de un escalar por un vector

Dado un escalar α y el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, llamamos producto escalar de α por el vector $\vec{a}$ a otro vector cuyas componentes se obtienen multiplicando las de $\vec{a}$ por el escalar α :

$$\boxed{\alpha \vec{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)} \quad (2^v)$$

Suma algebraica de vectores

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, la suma de $\vec{a} + \vec{b}$ es un vector cuyas componentes se obtienen sumando algebraicamente las correspondientes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)} \quad (3^v)$$

Ejemplo 2

Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3, 5)$; $\vec{b} = (7, 0, -3)$; $\vec{c} = (5, 2, -6)$ y $\vec{d} = (3, 2, -5)$ determinar:

1) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$

2) $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} - \vec{d}$

1) Cálculo de $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d}$:

Sumamos las componentes de $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ y $\vec{c}$, éstas últimas multiplicadas previamente por -2:

$$\vec{a} = (2, -3, 5)$$

$$\vec{b} = (7, 0, -3)$$

$$-2\vec{c} = (-10, -4, 12)$$

$$\vec{d} = (3, 2, -5)$$

$$\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c} + \vec{d} = (2, -5, -9)$$

2) $2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} - \vec{d}$

Antes de sumar, multiplicamos por 2 las componentes de $\vec{a}$, por -3 las de $\vec{b}$, por 4 las de $\vec{c}$ y por -1 las de $\vec{d}$:

$$2\vec{a} = (4, -6, 10)$$

$$-3\vec{b} = (-21, 0, 9)$$

$$4\vec{c} = (20, 8, -24)$$

$$-\vec{d} = (-3, -2, 5)$$

$$2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} - \vec{d} = (0, 0, 0)$$

Ejercicio 154

Dados los vectores

$$\vec{a} = (1, 1, 4); \vec{b} = (-3, 5, -1); \vec{c} = (5, -7, 2); \vec{d} = (-4, -4, 9); \vec{e} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -1\right);$$

$$\vec{f} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right), \text{ calcular:}$$

1) $\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$

4) $\vec{b} + \vec{e} - \vec{f}$

2) $2\vec{a} + \vec{c} - 2\vec{d}$

5) $3\vec{a} + 4\vec{e} + 6\vec{f}$

3) $3\vec{b} - 5\vec{c} + \vec{d}$

6) $4\vec{a} - 5\vec{b} + 3\vec{e} - 5\vec{f}$

Módulo o norma de un vector

Dado el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, se denomina módulo o norma a su longitud y se determina por la relación:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \quad (4^v)$$

Ejemplo 3

Dados los vectores $\vec{a} = (11, -13, -4)$; $\vec{b} = (5, -6, 2)$ y $\vec{c} = (3, -4, 2)$, determinar:

1) $|\vec{a}|$

2) $|3\vec{b} - 7\vec{c}|$

1) Cálculo de $|\vec{a}|$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(11)^2 + (-13)^2 + (-4)^2} = \sqrt{121 + 169 + 16} = \sqrt{306}$$

$$|\vec{a}| = 3\sqrt{34}$$

2) Cálculo de $|3\vec{b} - 7\vec{c}|$:

Hallamos primero las coordenadas del vector resultante de la operación $3\vec{b} - 7\vec{c}$:

$$3\vec{b} = (15, -18, 6)$$

$$-7\vec{c} = (-21, 28, -14)$$

$$3\vec{b} - 7\vec{c} = (-6, 10, -8)$$

Hallamos ahora el módulo:

$$|3\vec{b} - 7\vec{c}| = |(-6, 10, -8)| = \sqrt{(-6)^2 + 10^2 + (-8)^2} = \sqrt{200}$$

$$|3\vec{b} - 7\vec{c}| = 10\sqrt{2}$$

Ejercicio 155

Calcular la longitud de cada uno de los siguientes vectores:

1) $\vec{a} = (3, 4, 5)$

9) $\vec{l} = (-9, -3\sqrt{7}, 5)$

2) $\vec{b} = (-4, 5, -7)$

10) $\vec{m} = (-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$

3) $\vec{c} = (2, 1, -2)$

11) $\vec{n} = (7, -6\sqrt{15}, 6)$

4) $\vec{d} = (-4, 1, 1)$

12) $\vec{p} = (24, 13, 36\sqrt{5})$

5) $\vec{e} = (-9, -3, 2)$

13) $\vec{q} = (-10\sqrt{10}, -15, 12)$

6) $\vec{f} = (\sqrt{7}, -3, -4)$

14) $\vec{r} = (17, 17, -7\sqrt{2})$

7) $\vec{g} = (-4, -4, 2)$

15) $\vec{s} = (170, -19 - 10\sqrt{35})$

8) $\vec{h} = (-\sqrt{2}, 1, 1)$

16) Dados los vectores $\vec{a} = (\frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{5}{21})$ y $\vec{b} = (\frac{1}{15}, \frac{13}{6}, -\frac{3}{7})$, calcular $|\vec{a} - \vec{b}|$.

17) Dados los vectores $\vec{a} = (2, 3, -5)$; $\vec{b} = (3, 5, -4)$ y $\vec{c} = (2, \frac{3}{4}, 1)$, calcular $|2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}|$.

Producto escalar de vectores por componentes

Dados los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, el producto escalar de ellos (que se designa así: $\vec{a} \cdot \vec{b}$) se define como la suma de los productos de sus coordenadas correspondientes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (5^v)$$

Definición trigonométrica del producto escalar

El producto escalar de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es igual al producto de sus módulos por el coseno del ángulo α que los vectores forman entre sí:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad (6^v)$$

Angulo que forman dos vectores

La fórmula trigonométrica del producto escalar permite calcular el ángulo que forman dos vectores, si se conocen sus componentes. Despejando $\cos \alpha$ tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (7^v)$$

Vectores ortogonales o perpendiculares

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales o perpendiculares entre sí, el ángulo que forman entre sí es recto. En tal caso:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 90^\circ$$

Como $\cos 90^\circ = 0$, el miembro de la derecha se anula y tenemos entonces que

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

El recíproco es cierto si ninguno de los vectores es nulo. En definitiva:

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (\vec{a} \neq \vec{O} \text{ y } \vec{b} \neq \vec{O})} \quad (8^y)$$

Ejemplo 4

Determinar si los vectores $\vec{a} = (2, -3, 5)$ y $\vec{b} = (3, 12, 6)$ son ortogonales. Representar gráficamente ambos vectores.

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero.

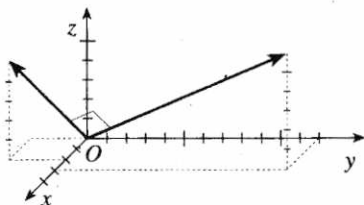
Hallamos, pues, el producto escalar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 12 + 5 \cdot 6 = 6 - 36 + 30 = 0$$

Conclusión:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$$

Representación gráfica:



Ejemplo 5

Determinar el ángulo que forman entre sí los vectores $\vec{a} = (3, -2, 5)$ y $\vec{b} = (4, 5, -3)$.

Utilizando (7^y):

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Calculamos cada uno de los términos de la fracción:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 5 \cdot (-3) = -13$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50}$$

Sustituyendo:

$$\cos \alpha = \frac{-13}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{50}} = -0,29824$$

De donde:

$$\alpha = 107^{\circ} 21'$$

Ejercicio 156

En los ejercicios 1 al 5, determinar en cada caso si los vectores que se dan son ortogonales. Representar gráficamente cada par de vectores.

- 1) $\vec{a} = (8, -3, -6)$; $\vec{b} = (3, 4, 2)$
- 2) $\vec{c} = (4, 5, 5)$; $\vec{d} = (-5, 3, 1)$
- 3) $\vec{e} = (3, 8, 7)$; $\vec{f} = (3, -2, 1)$
- 4) $\vec{m} = (2, 4, -7)$; $\vec{n} = (5, 3, 3)$
- 5) $\vec{p} = (4, -2, 3)$; $\vec{q} = (-5, 1, -4)$

En los ejercicios 6 al 10, hallar las componentes faltantes sabiendo que en cada caso los vectores son ortogonales:

- 6) $\vec{a} = (6, -2, 2)$; $\vec{b} = (5, 6, z)$
- 7) $\vec{c} = (3, 7, 5)$; $\vec{d} = (3, y, -2)$
- 8) $\vec{e} = (x, -12, 9)$; $\vec{f} = (5\sqrt{3}, 2, 1)$
- 9) $\vec{m} = (\frac{5}{2}, y, -\frac{7}{8})$; $\vec{n} = (\frac{4}{15}, -\frac{5}{2}, \frac{4}{3})$
- 10) $\vec{p} = (\frac{4}{15}, \frac{12}{7}, z)$; $\vec{q} = (\frac{21}{4}, \frac{7}{20}, 2\sqrt{3})$

En los ejercicios 11 al 15, determinar el ángulo que forman entre sí los vectores que se dan:

- 11) $\vec{a} = (2, 7, 3)$; $\vec{b} = (4, 6, -2)$
- 12) $\vec{c} = (-5, 3, 4)$; $\vec{d} = (2, 7, -5)$
- 13) $\vec{e} = (-8, 1, 5)$; $\vec{f} = (-7, -2, 4)$
- 14) $\vec{m} = (0, 4, -3)$; $\vec{n} = (-8, 0, 15)$
- 15) $\vec{p} = (2, -5, 4)$; $\vec{q} = (7, 2, -1)$

- 16) Determinar la componente faltante del vector $\vec{b}$, sabiendo que los vectores $\vec{a} = (1, 3, 1)$ y $\vec{b} = (2, 4, z)$ forman entre sí un ángulo de 60° .
- 17) Determinar la primera componente del vector $\vec{a} = (x, 3, -1)$ sabiendo que forma un ángulo de 45° con el vector $\vec{b} = (1, 3, 1)$.

Vector unitario

Es todo vector cuya longitud es igual a la unidad. El vector unitario (paralelo y del mismo sentido) de un vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ es:

$$\vec{a}_u = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|} \right) \quad (9^v)$$

Dado que $\vec{a}_u$ mide una unidad, tenemos que

$$|\vec{a}_u| = 1$$

Calculando el módulo:

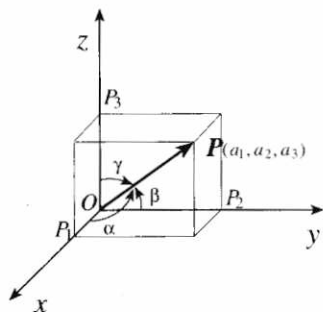
$$\sqrt{\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec{a}|} \right)^2 + \left(\frac{a_3}{|\vec{a}|} \right)^2} = 1$$

Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|} \right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\vec{a}|} \right)^2 + \left(\frac{a_3}{|\vec{a}|} \right)^2 = 1 \quad (10^v)$$

Ángulos directores de un vector

Reciben el nombre de ángulos directores los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes coordenados. En la figura, α , β y γ son los ángulos directores del vector $\vec{OP}$.



Cosenos directores

Los cosenos de los ángulos directores reciben el nombre de cosenos directores del vector.

Sea el vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ de extremo $P(a_1, a_2, a_3)$. El triángulo OPP_1 es rectángulo en P_1 . En consecuencia,

$$\cos \alpha = \frac{OP_1}{OP}$$

Pero $OP_1 = a_1$ y $OP = |\vec{a}|$. Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} \quad (11^v)$$

En forma análoga:

$$\cos \beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} \quad (12^v)$$

$$\cos \gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} \quad (13^v)$$

Relación entre los cosenos directores

Los términos entre paréntesis en la ecuación (10^v) que dejamos antes son iguales, respectivamente, a $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$. Sustituyendo en (10^v) tenemos la relación entre los cosenos directores:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (14^v)$$

Ejemplo 6

Hallar el vector unitario del vector $\vec{a} = (-2, -8, 2)$.

Calculamos el módulo:

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 2^2} = 6\sqrt{2}$$

Utilizando (9^v):

$$\vec{a}_u = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-2, -8, 2)}{6\sqrt{2}}$$

$$\vec{a}_u = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

Ejemplo 7

Dos de los ángulos directores de un vector son $\alpha = 52^\circ 15'$ y $\gamma = 73^\circ 22'$.

Hallar el tercero.

Sabemos por (14^v) que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Sustituyendo valores conocidos y resolviendo:

$$\cos^2 52^\circ 15' + \cos^2 \beta + \cos^2 73^\circ 22' = 1$$

$$0,3748 + \cos^2 \beta + 0,0819 = 1$$

$$\cos^2 \beta = 0,5433$$

$$\cos \beta = \pm 0,7371$$

De donde:

$$\beta = 42^\circ 31' \quad \text{o}$$

$$\beta = 137^\circ 29'$$

Ejercicio 157

En los ejercicios 1 a 5, hallar las coordenadas de los vectores unitarios de cada uno de los vectores que se dan.

1) $\vec{a} = (-4, 2, 4)$

2) $\vec{b} = (1, -\sqrt{2}, 1)$

3) $\vec{c} = (\sqrt{7}, 3\sqrt{2}, -\sqrt{11})$

4) $\vec{d} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{130}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

5) $\vec{e} = (3, -12, -3)$

En los ejercicios 6 al 10, hallar los ángulos directores de los vectores que se dan:

6) $\vec{a} = (3, 4, 5)$

7) $\vec{b} = (-2, 5, 7)$

8) $\vec{c} = (-1, -1, 5)$

9) $\vec{d} = (6, -4, -3)$

10) $\vec{e} = (5, 11, -5)$

En los ejercicios 11 al 15, calcular en cada caso el ángulo director faltante:

11) $\alpha = 70^\circ$; $\beta = 110^\circ$

12) $\alpha = 32^\circ 25'$; $\beta = 82^\circ 17'$

13) $\alpha = 73^\circ 10'$; $\gamma = 156^\circ 35'$

14) $\beta = 100^\circ$; $\gamma = 120^\circ$

15) $\beta = 83^\circ$; $\gamma = 88^\circ 30'$

Vectores linealmente dependientes

Un vector $\vec{m}$ es linealmente dependiente de otro vector $\vec{a}$ si existe un número real α tal que

$$\vec{m} = \alpha \vec{a}$$

Dos vectores linealmente dependientes tienen la misma dirección.

Ejemplo 8

Determinar si $\vec{m} = (-6, -\frac{3}{2}, 9)$ y $\vec{n} = (4, 1, -6)$ son linealmente dependientes.

Para que los vectores dados sean linealmente dependientes debe cumplirse que:

$$\vec{m} = \alpha \vec{n}$$

Sustituyendo coordenadas:

$$\left(-6, -\frac{3}{2}, 9\right) = \alpha(4, 1, -6)$$

Multiplicando en el miembro de la derecha:

$$\left(-6, -\frac{3}{2}, 9\right) = (4\alpha, \alpha, -6\alpha)$$

Para que los dos vectores de la igualdad sean equivalentes deben ser iguales las respectivas componentes:

$$\begin{cases} 4\alpha = -6 \\ \alpha = -\frac{3}{2} \\ -6\alpha = 9 \end{cases}$$

En las tres igualdades se obtiene el mismo valor

$$\alpha = -\frac{3}{2}$$

Concluimos, por tanto, que los vectores son linealmente dependientes, pues

$$\vec{m} = -\frac{3}{2}\vec{n}$$

Si no hubiésemos encontrado un número real que satisficiera simultáneamente las tres igualdades del sistema, hubiéramos concluido que los vectores no eran linealmente dependientes.

Ejercicio 158

Determinar si son linealmente dependientes los vectores que se dan en cada uno de los siguientes ejercicios. En caso de serlo, expresar uno de ellos como producto del otro por un escalar:

- 1) $\vec{m} = (6, -8, -10)$; $\vec{n} = (-9, 12, 15)$
- 2) $\vec{p} = \left(\frac{1}{2}, 6, -3\right)$; $\vec{q} = \left(\frac{2}{3}, 8, -4\right)$
- 3) $\vec{a} = (-12, -8, 6)$; $\vec{b} = \left(3, -2, \frac{3}{2}\right)$
- 4) $\vec{c} = (\sqrt{6}, -\sqrt{15}, -6)$; $\vec{d} = (-\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{3})$
- 5) $\vec{e} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{12}\right)$; $\vec{f} = \left(-\frac{5}{9}, \frac{2}{3}, \frac{5}{18}\right)$
- 6) $\vec{c} = (\sqrt{6}, \sqrt{15}, \sqrt{2})$; $\vec{d} = (3\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 2)$

Combinación lineal de vectores

Un vector $\vec{m}$ es combinación lineal de otros vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, etc., si existen números reales α , β , γ , ... tales que

$$\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} \dots$$

Ejemplo 9

Determinar si el vector $\vec{m} = (-2, 7, -5)$ es combinación lineal de los vectores $\vec{a} = (3, 2, -1)$; $\vec{b} = (5, 6, -2)$ y $\vec{c} = (-3, 1, -4)$.

Para que el primer vector sea combinación lineal de los otros tres debe cumplirse que

$$\vec{m} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$$

Sustituyendo coordenadas:

$$(-2, 7, -5) = \alpha(3, 2, -1) + \beta(5, 6, -2) + \gamma(-3, 1, -4)$$

Multiplicando en el miembro de la derecha:

$$(-2, 7, -5) = (3\alpha, 2\alpha, -\alpha) + (5\beta, 6\beta, -2\beta) + (-3\gamma, \gamma, -4\gamma)$$

Sumando los vectores del miembro de la derecha:

$$(-2, 7, -5) = (3\alpha + 5\beta - 3\gamma, 2\alpha + 6\beta + \gamma, -\alpha - 2\beta - 4\gamma)$$

Iguando las respectivas componentes obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3\alpha + 5\beta - 3\gamma = -2 \\ 2\alpha + 6\beta + \gamma = 7 \\ -\alpha - 2\beta - 4\gamma = -5 \end{cases}$$

La solución del sistema es:

$$\alpha = -3 \quad \beta = 2 \quad \gamma = 1$$

Podemos, en consecuencia, escribir el primer vector como combinación lineal de los otros tres:

$$\vec{m} = -3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

Si el sistema de ecuaciones no hubiese tenido soluciones reales hubiéramos concluido que el vector $\vec{m}$ no era combinación lineal de los restantes vectores.

Ejercicio 159

Expresar, de ser posible, en cada uno de los siguientes ejercicios el primer vector como combinación lineal de los tres restantes:

1) $\vec{m} = (2, 1, 7)$; $\vec{a} = (2, -1, 3)$; $\vec{b} = (5, 1, 2)$; $\vec{c} = (-1, -4, 2)$

2) $\vec{m} = (0, 4, -8)$; $\vec{a} = (2, -1, 2)$; $\vec{b} = (2, 1, 3)$; $\vec{c} = (2, -1, 4)$

3) $\vec{v} = (2, 3, -5)$; $\vec{m} = (1, -2, 5)$; $\vec{n} = (-2, 4, 3)$; $\vec{p} = (3, -6, 4)$

4) $\vec{p} = (-4, 0, 2)$; $\vec{r} = (3, -1, 5)$; $\vec{s} = (6, 2, 4)$; $\vec{t} = (5, 3, 3)$

5) $\vec{m} = (-3, -1, 10)$; $\vec{d} = (6, -3, 9)$; $\vec{e} = (2, 3, 5)$; $\vec{f} = (4, 1, -3)$

6) $\vec{p} = (-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{3})$; $\vec{a} = (2, \sqrt{10}, \sqrt{6})$; $\vec{b} = (2\sqrt{6}, -\sqrt{15}, 5)$; $\vec{c} = (-2\sqrt{10}, 1, -\sqrt{15})$

7) $\vec{a} = (5, 5, -2)$; $\vec{t} = (10, -15, 1)$; $\vec{u} = (-6, 9, 1)$; $\vec{v} = (14, -21, 3)$

8) $\vec{a} = (-4, -1, 17)$; $\vec{m} = (5, 3, 4)$; $\vec{n} = (4, -7, 3)$; $\vec{p} = (-5, -7, 6)$

Vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

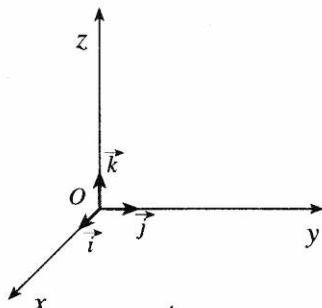
Los vectores unitarios paralelos a los ejes coordenados se les designa con letras especiales que no se utilizan para designar otros vectores.

Esos vectores son

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$



Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ forman una **base**

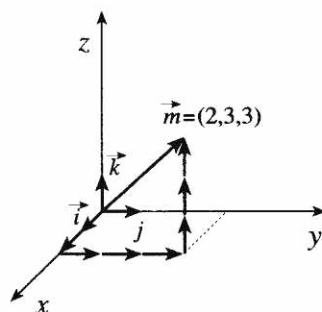
pues todos los demás vectores del espacio pueden expresarse como combinación lineal de ellos tres: todo vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Por ejemplo

$$\vec{a} = (2, 3, 3) = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

En general, tres vectores cualesquiera del espacio que no sean linealmente dependientes forman una base y todos los demás vectores del espacio son combinación lineal de ellos.

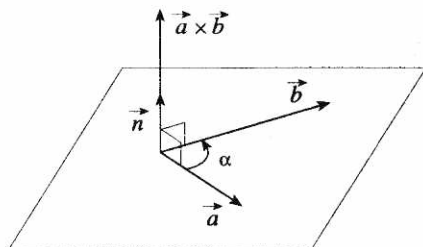


Producto vectorial de vectores

Sean dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ no paralelos que determinan un plano; sea α el ángulo que forman entre sí; sea, por último, un vector unitario $\vec{n}$ perpendicular al plano determinado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ de tal forma que los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{n}$ tengan entre sí la misma disposición que tienen los semiejes positivos x , y y z , respectivamente. En estas condiciones, el producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ (que se designa así: $\vec{a} \times \vec{b}$) se define por la siguiente ecuación:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{n} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

(15^v)



Si se invierte el orden de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, entonces α pasa a ser un ángulo negativo y tendremos que

$$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{n} \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \sin(-\alpha)$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{n} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$$

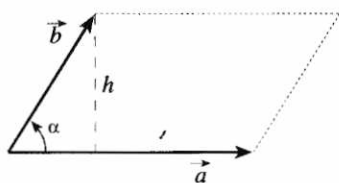
por lo que podemos concluir que

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}} \quad (16^v)$$

La igualdad (16^v) hace obvio que el producto vectorial no goza de la propiedad conmutativa.

En la ecuación (15^v) la expresión $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha$ equivale al área del paralelogramo que definen los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

En consecuencia, el resultado de multiplicar vectorialmente dos vectores es un tercer vector perpendicular al plano determinado por los dos primeros y cuya longitud es igual al área del paralelogramo definido por aquéllos.



(Si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos, el área del paralelogramo se anula y, consecuentemente, el producto vectorial también).

Aplicando la definición anterior a los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, dado que el área del paralelogramo que definen dos cualesquiera de ellos es la unidad, tenemos, tomando en cuenta (15^v) y (16^v), que:

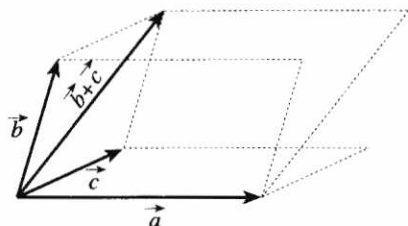
$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j} \end{aligned} \quad (17^v)$$

y también:

$$\boxed{\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0} \quad (18^v)$$

En la figura están señalados los vectores coplanarios $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ y el vector suma (coplanario también) $\vec{b} + \vec{c}$.

Es fácilmente demostrable por geometría, que el área del paralelogramo definido por el vector $\vec{a}$ y el vector suma $\vec{b} + \vec{c}$ es igual a la suma de las áreas de los paralelogramos definidos por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y por $\vec{a}$ y $\vec{c}$.



Consecuencia de esto es que el producto vectorial cumple la propiedad distributiva de la multiplicación:

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}} \quad (19^v)$$

Hallaremos ahora una fórmula que nos permita calcular el producto vectorial utilizando las coordenadas de los vectores que se multiplican.

Sean los vectores $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Expresados como combinación lineal de $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

Hallamos el producto $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) \times (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$$

Aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_1 b_1 \vec{i} \times \vec{i} + a_1 b_2 \vec{i} \times \vec{j} + a_1 b_3 \vec{i} \times \vec{k} \\ &\quad + a_2 b_1 \vec{j} \times \vec{i} + a_2 b_2 \vec{j} \times \vec{j} + a_2 b_3 \vec{j} \times \vec{k} \\ &\quad + a_3 b_1 \vec{k} \times \vec{i} + a_3 b_2 \vec{k} \times \vec{j} + a_3 b_3 \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned}$$

Utilizando las equivalencias (17^v) y (18^v), la expresión anterior es igual a:

$$\vec{a} \times \vec{b} = a_1 b_2 \vec{k} - a_1 b_3 \vec{j} - a_2 b_1 \vec{k} + a_2 b_3 \vec{i} + a_3 b_1 \vec{j} - a_3 b_2 \vec{i}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}} \quad (20^v)$$

Y como el miembro de la derecha de la igualdad anterior es el desarrollo de un determinante, podemos expresar la igualdad (20^v) de la siguiente forma:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \quad (21^v)$$

Producto mixto

El producto escalar de un vector $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ por el producto vectorial de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ puede calcularse utilizando fórmulas ya conocidas, pero resulta más fácil con la siguiente:

$$\boxed{\vec{m} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \quad (22^v)$$

El producto mixto equivale al volumen del paralelepípedo definido por los vectores $\vec{m}$, $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

Ejemplo 10

Dados los vectores $\vec{a} = (3, -2, 1)$ y $\vec{b} = (-1, 3, 5)$, determinar el producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$.

Utilizando (21^v):

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante:

$$\begin{aligned} &= -10\vec{i} - \vec{j} + 9\vec{k} - (2\vec{k} + 15\vec{j} + 3\vec{i}) \\ &= -13\vec{i} - 16\vec{j} + 7\vec{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (-13, -16, 7)}$$

Ejemplo 11

Hallar el producto vectorial de los vectores $\vec{a} = (4, -1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 7, -2)$ y multiplicarlo luego escalarmente por el vector $\vec{m} = (2, 3, -1)$. Comprobar a continuación el resultado utilizando (22^v).

Cálculo del producto vectorial:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 2\vec{i} + 6\vec{j} + 28\vec{k} - (-3\vec{k} - 8\vec{j} + 14\vec{i}) \\ &= -12\vec{i} + 14\vec{j} + 31\vec{k} \\ &= (-12, 14, 31) \end{aligned}$$

Cálculo del producto escalar:

$$\begin{aligned} &(-12, 14, 31) \cdot (2, 3, -1) \\ &= -12 \cdot 2 + 14 \cdot 3 + 31 \cdot (-1) \\ &= \boxed{-13} \end{aligned}$$

Verificación del resultado utilizando (22^v):

$$\begin{aligned} \vec{m} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 4 + 18 - 28 - (3 - 24 + 28) \\ &= \boxed{-13} \end{aligned}$$

Ejercicio 160

Dados los vectores $\vec{a} = (3, 4, 2)$; $\vec{b} = (-2, 0, 4)$; $\vec{c} = (4, -2, 5)$; $\vec{d} = (3, 3, 7)$, calcular cada una de las siguientes expresiones:

- 1) $\vec{a} \times \vec{b}$
- 2) $\vec{c} \times \vec{b}$
- 3) $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{b} \times \vec{d})$
- 4) $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{d})$

$$5) \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{d}$$

$$6) \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{d}$$

$$7) \vec{b} \cdot (\vec{d} \times \vec{a})$$

$$8) 7\vec{a} - 9\vec{b} - 2(\vec{d} \times \vec{c})$$

9) Determinar la primera componente del vector $\vec{a} = (x, 2, -1)$ sabiendo que el resultado de multiplicarlo vectorialmente por $\vec{b} = (1, 3, -2)$ es el vector $(-1, 3, 4)$.

10) Determinar el ángulo que forma con el eje x el vector $\vec{a} \times \vec{b}$, siendo éste el producto de los vectores $\vec{a} = (-1, 3, 4)$ y $\vec{b} = (-2, 1, 1)$.

11) Determinar el ángulo que forman el vector $\vec{m} = (3, -2, 4)$ y el vector $\vec{b} \times \vec{a}$, siendo $\vec{a} = (3, 2, 3)$ y $\vec{b} = (-1, -2, 1)$.

12) Dados los vectores $\vec{a} = (2, 1, 2)$; $\vec{b} = (-2, 1, 3)$; $\vec{c} = (0, 3, -1)$; $\vec{d} = (-1, 4, 1)$ y $\vec{e} = (-15, 22, -7)$, determinar

$$\frac{\left| (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) \right|}{|\vec{e}|}$$

13) Dados los vectores $\vec{a} = (1, 2, 3)$; $\vec{b} = (2, 3, 4)$ y $\vec{c} = (3, 4, 5)$, comprobar que $(\vec{a} \times \vec{b}) - (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{0}$

14) Con los vectores del ejercicio 13, calcular $\left[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \right] + \left[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]$

15) Calcular el ángulo que forman los vectores $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ y $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ del ejercicio anterior.

16) Los vectores $\vec{a} = (2, 3, 2)$; $\vec{b} = (5, 1, 4)$ y $\vec{c} = (1, 2, -2)$ definen un paralelepípedo: determinar su volumen.

17) Comprobar que $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$.

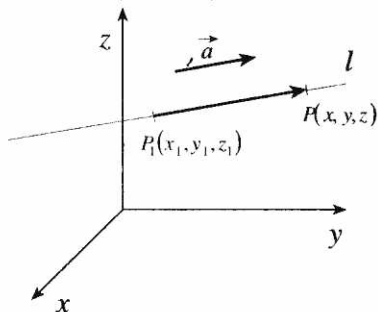
Ecuación de la recta en el espacio

Sea l una recta del espacio que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

En estas condiciones, l será el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ del espacio tales que $\overrightarrow{P_1P}$ sea paralelo al vector $\vec{a}$.

Si los vectores $\overrightarrow{P_1P}$ y $\vec{a}$ son paralelos, son linealmente dependientes. Debe cumplirse, por tanto, que

$$\overrightarrow{P_1P} = \alpha \vec{a}$$



Las componentes del vector $\overrightarrow{P_1P}$ son $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Tenemos entonces, sustituyendo por las componentes que

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = \alpha (a_1, a_2, a_3)$$

Multiplicando en el miembro de la derecha:

$$(x - x_1, y - y_1, z - z_1) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$$

Comparando las respectivas componentes:

$$\begin{cases} x - x_1 = \alpha a_1 \\ y - y_1 = \alpha a_2 \\ z - z_1 = \alpha a_3 \end{cases} \quad (1^a)$$

Las ecuaciones obtenidas reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la recta y, al variar α desde $-\infty$ hasta $+\infty$, describen la recta infinita l . Despejando α en cada una de ellas e igualando, se obtienen las ecuaciones cartesianas:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad (2^a)$$

Si alguno de los denominadores es nulo, por ejemplo a_1 , en la ecuación paramétrica correspondiente tendríamos

$$x - x_1 = \alpha \cdot 0$$

con lo que se anularía también el numerador.

En consecuencia, al utilizar la ecuación (2^a) , si algún denominador es nulo debemos concluir que el numerador también lo es.

Ejemplo 1

Hallar la ecuación de la recta paralela al vector $\vec{m} = (3, -2, 4)$ y que pasa por el punto $P(2, 6, -3)$.

Utilizando (2^a):

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+3}{4}$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(-2, 6, 0)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (-7, 0, -5)$.

Dado que $a_2 = 0$, tenemos $y - 6 = 0$

Además:
$$\frac{x+2}{-7} = \frac{z-6}{-5}$$

La recta queda determinada por las ecuaciones:

$$\begin{cases} y - 6 = 0 \\ \frac{x+2}{-7} = \frac{z-6}{-5} \end{cases}$$

Ejemplo 3

Verificar si los puntos $A(3, 1, 2)$ y $B(8, -1, 7)$ pertenecen a la recta de ecuación $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}$.

Si el punto A pertenece a la recta, debe satisfacer su ecuación. Sustituimos las variables por las coordenadas respectivas de A :

$$\frac{3+2}{5} = \frac{1-3}{-2} = \frac{2+1}{4}$$

Simplificando: $1 = 1 = \frac{3}{4}$

La igualdad no es cierta, por lo que concluimos que el punto A no pertenece a la recta.

Sustituimos por las coordenadas de B :
$$\frac{8+2}{5} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{7+1}{4}$$

Simplificando: $2 = 2 = 2$

La igualdad resultante es cierta, por lo que concluimos que B sí pertenece a la recta.

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Conociendo dos puntos de una recta, pueden encontrarse las componentes del vector que une esos dos puntos y es, por tanto, paralelo a la recta y utilizar (2ª).

Ejemplo 4

Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(4, -2, 1)$ y $B(5, 0, -3)$.

Determinamos las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 4, 0 + 2, -3 - 1) = (1, 2, -4)$$

Utilizando (2ª) con las coordenadas de A:

$$\frac{x - 4}{1} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 1}{-4}$$

Si hubiésemos utilizado las coordenadas de B, la expresión resultante habría sido:

$$\frac{x - 5}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z + 3}{-4}$$

Aparentemente, el resultado es diferente. Sin embargo se puede constatar fácilmente, comparando, por ejemplo, los dos primeros miembros de la igualdad, que en ambos casos se obtiene la misma expresión $2x - y - 10 = 0$.

Téngase en cuenta lo anterior si, al comparar los resultados obtenidos con los de este libro, existe esa aparente divergencia.

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ es igual a la longitud del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d_{(P_1P_2)} = |\overrightarrow{P_1P_2}|$$

Determinamos las componentes del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Calculamos ahora su módulo:

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

En conclusión:

$$d_{(P_1P_2)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3ª)$$

Punto medio de un segmento

Un razonamiento similar al que nos permitió en la pág. 322 obtener las fórmulas de punto medio en el plano se utilizan para deducir las de punto medio en el espacio. Dada su sencillez, la obviaremos.

Coordenadas de $M(x_M, y_M, z_M)$, punto medio del segmento de extremos

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$M(x_M, y_M, z_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right) \quad (4^p)$$

Puntos colineales

Si tres puntos A , B y C son colineales, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ pertenecen a la misma recta y son, en consecuencia, paralelos.

En estas condiciones, el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ debe anularse pues el área del paralelogramo definido por $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ es cero.

De lo anterior se desprende que tres puntos A , B y C son colineales si el producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ es cero:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = 0 \rightarrow A, B \text{ y } C \text{ son colineales} \quad (5^p)$$

Puede determinarse también que tres puntos A , B y C son colineales por el cálculo de distancias:

$$d_{(A,B)} + d_{(B,C)} = d_{(A,C)} \rightarrow A, B \text{ y } C \text{ son colineales} \quad (6^p)$$

Ejemplo 5

Determinar si las rectas $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{5}$ y $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{1}$ se cortan

Formamos un sistema de ecuaciones igualando pares de miembros de cada una de las ecuaciones (cada uno de los miembros de cada una de las triples igualdades debe figurar al menos una vez):

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-4} \\ \frac{x-3}{2} = \frac{z-1}{5} \\ \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-1} \\ \frac{x+1}{-2} = \frac{z+3}{1} \end{cases}$$

Llevando las ecuaciones a su mínima expresión:

$$\begin{cases} 2x + y = 4 & \text{(I)} \\ 5x - 2z = 13 & \text{(II)} \\ x - 2y = -3 & \text{(III)} \\ x + 3z = -7 & \text{(IV)} \end{cases}$$

Resolveremos primero el sistema formado por las tres primeras ecuaciones y verificaremos después si la solución obtenida satisface la cuarta ecuación.

Sumamos la ecuación (I), multiplicada por 2, y la ecuación (III):

$$\begin{cases} 4x + 2y = 8 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Sustituyendo en (I):

$$2(1) + y = 4$$

$$y = 2$$

Sustituyendo en (II):

$$5(1) - 2z = 13$$

$$z = -4$$

Solución del sistema:

$$(1, 2, -4)$$

Sustituyendo en la ecuación (IV) constatamos que los valores obtenidos satisfacen esa ecuación. Concluimos, por tanto, que las rectas se intersectan en el punto

$$(1, 2, -4)$$

Ejemplo 6

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(2, 3, 1)$ y es perpendicular a los vectores $\vec{a} = (5, 1, 3)$ y $\vec{b} = (1, 4, 5)$.

Necesitamos conocer un vector paralelo a la recta cuya ecuación busquemos.

El producto vectorial de dos vectores es un tercer vector perpendicular a los primeros. Efectuamos el producto vectorial para obtener dicho vector:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5\vec{i} + 3\vec{j} + 20\vec{k} - (\vec{k} + 25\vec{j} + 12\vec{i}) \\ &= -7\vec{i} - 22\vec{j} + 19\vec{k} \\ &= (-7, -22, 19) \end{aligned}$$

Y la ecuación de la recta que pasa por P y es paralela al vector obtenido es:

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-3}{-22} = \frac{z-1}{19}$$

Ejercicio 161

- 1) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(2, -1, 5)$ y es paralela al vector $\vec{a} = (-2, 4, 6)$.
- 2) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $B(0, 2, -3)$ y es paralela al vector $\vec{b} = (3, 2, -5)$.
- 3) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $C(3, -9, 1)$ y es paralela al vector $\vec{c} = (2, 0, -3)$.
- 4) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $D(7, 6, 2)$ y es paralela al vector $\vec{d} = (0, -5, -2)$.
- 5) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $E(-1, 0, 5)$ y es paralela al vector $\vec{e} = (3, 11, 0)$.
- 6) Verificar si los puntos $A(-7, 3, -2)$; $B(-5, -1, -9)$ y $C(-1, -9, -23)$ son colineales.
- 7) Dados los puntos $A(3, -4, 2)$; $B(7, 0, 0)$ y $C(-3, -10, -3)$, determinar cuáles de ellos pertenecen a la recta de ecuación $\frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Dados los puntos $A(-3, -2, 4)$; $B(1, 5, -1)$ y $C(6, 3, 5)$, determinar:

- 8) El perímetro del triángulo.
- 9) Las ecuaciones de sus lados.
- 10) Las ecuaciones de las medianas.
- 11) La longitud de las medianas.
- 12) Los ángulos internos del triángulo.

Hallar el punto de intersección de las rectas que se dan en los siguientes ejercicios:

- 13) $\frac{x+4}{-6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ y $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+2}{-7}$.
- 14) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{-1}$ y $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-2}$.
- 15) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-8}{1}$ y $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{2}$.

Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3, 4)$; $\vec{b} = (3, 0, -3)$; $\vec{c} = (7, 2, -1)$ y $\vec{d} = (-2, 1, 6)$, Hallar la ecuación de la recta ...

- 16) ... que pasa por $A(2, -1, 5)$ y es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.
- 17) ... que pasa por $B(3, 1, -2)$ y es perpendicular a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$.
- 18) ... que pasa por $C(-2, -3, 0)$ y es perpendicular a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{d}$.

19) ... que pasa por el origen y es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{c}$.

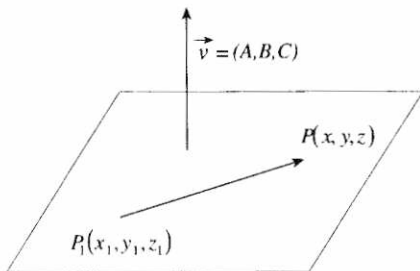
20) ... que pasa por el punto medio del segmento de extremos $M(4, -2, 5)$ y $N(-1, 3, 4)$.

21) ... que pasa por el punto de intersección de las rectas $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-9}{-2}$ y $\frac{x-4}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{-4}$ y es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{d}$.

Ecuación del plano

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto perteneciente a un plano y $\vec{v} = (A, B, C)$ un vector perpendicular al mismo plano.

Para hallar la ecuación del plano, hacemos las siguientes consideraciones: si el vector $\vec{v}$ es perpendicular al plano, será también perpendicular a cualquier vector del mismo. En consecuencia, para que un punto $P(x, y, z)$ pertenezca al plano es suficiente que el vector $\overrightarrow{P_1P}$ sea perpendicular al vector $\vec{v}$.



Por otra parte, como el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero, podemos plantear la siguiente igualdad:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0 \quad (I)$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ son conocidas y las de $\overrightarrow{P_1P}$ son $(x - x_1, y - y_1, z - z_1)$. Sustituyendo en (I) tenemos:

$$(A, B, C) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0$$

Efectuando el producto escalar:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (6^p)$$

Hemos obtenido así la ecuación del plano que pasa por el punto P_1 y es perpendicular al vector $\vec{v}$. Si desarrollamos esta ecuación obtenemos la igualdad

$$Ax + By + Cz + (-Ax_1 - By_1 - Cz_1) = 0$$

Sustituyendo la expresión que está entre paréntesis por D , obtenemos la forma general de la ecuación de un plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (6a^p)$$

Nota: toda recta o todo vector perpendicular a un plano se dice que es **normal** al plano. Cuando se habla, por tanto, de la normal de un plano, se refiere uno a la recta o al vector perpendicular al mismo.

Ecuación simétrica o segmentaria del plano

Sean a , b y c las coordenadas en el origen, es decir, las longitudes de los segmentos que un plano determina sobre los ejes coordenados.

Los puntos $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$ pertenecen al plano y satisfacen la ecuación $(6a^p)$.

Sustituyendo las coordenadas de cada uno de los tres puntos se obtienen las siguientes igualdades:

$$Aa + D = 0$$

$$Bb + D = 0$$

$$Cc + D = 0$$

de donde

$$A = -\frac{D}{a}$$

$$B = -\frac{D}{b}$$

$$C = -\frac{D}{c}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación $(6a^p)$ se tiene:

$$-\frac{D}{a}x - \frac{D}{b}y - \frac{D}{c}z + D = 0$$

expresión de la que, dividiendo todos los términos por D , se obtiene esta otra:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \quad (7^p)$$

El uso de la ecuación simétrica se limita a los planos que no pasan por el origen. En caso contrario, las coordenadas en el origen se anulan y la ecuación (7^p) deja de tener sentido.

Ecuación del plano que pasa por tres puntos

Para hallar la ecuación del plano que contiene tres puntos conocidos P_1 , P_2 y P_3 calcularemos las coordenadas de la normal $\vec{v}$ (producto vectorial de $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$) y aplicaremos (6^p) con las coordenadas del punto P_1 .

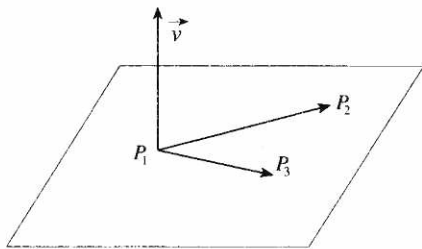
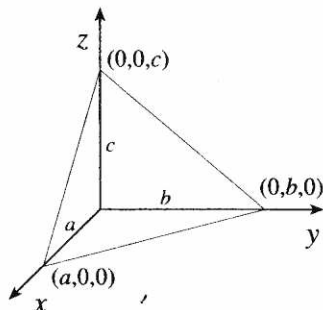
Calculamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P_3}$ y efectuamos un cambio de variable para operar más cómodamente con ellos:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = (a, b, c)$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1) = (m, n, p)$$

Calculamos las coordenadas de $\vec{v}$, producto vectorial de esos vectores:

$$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$



$$= \vec{i}(bp - cn) - \vec{j}(ap - cm) + \vec{k}(an - bm)$$

$$\vec{v} = (bp - cn, cm - ap, an - bm)$$

Hallamos, por último, utilizando (6^p), la ecuación del plano que pasa por P_1 y es perpendicular al vector $\vec{v}$:

$$(bp - cn)(x - x_1) + (cm - ap)(y - y_1) + (an - bm)(z - z_1) = 0$$

$$bp(x - x_1) - cn(x - x_1) + cm(y - y_1) - ap(y - y_1) + an(z - z_1) - bm(z - z_1) = 0$$

Desahaciendo el cambio de variables:

$$\begin{aligned} & (y_2 - y_1)(z_3 - z_1)(x - x_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)(x - x_1) + \\ & + (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)(y - y_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)(y - y_1) + \\ & + (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)(z - z_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)(z - z_1) = 0 \end{aligned}$$

La expresión anterior es el desarrollo del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8^p)$$

o también de este otro determinante de cuarto orden:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (8a^p)$$

Distancia de un punto a un plano

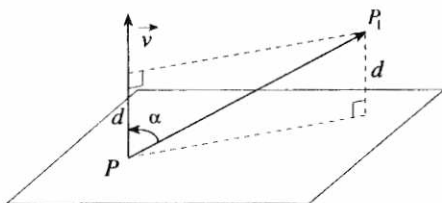
Sea d la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ al plano de ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$; sea $\vec{v} = (A, B, C)$ un vector normal al plano; sea, por último, P un punto cualquiera del plano.

Para mayor comodidad, elijamos como punto P la intersección del plano con el eje x . En el eje x las otras dos coordenadas se anulan. Haciendo, pues, $y = z = 0$ en la ecuación del plano, obtenemos para x el valor $x = -\frac{D}{A}$.

Las coordenadas de P son en ese caso $P(-\frac{D}{A}, 0, 0)$.

En estas condiciones, las coordenadas de $\overrightarrow{PP_1}$ son $\overrightarrow{PP_1} = (x_1 + \frac{D}{A}, y_1, z_1)$.

Tal como puede observarse en la figura anterior, la distancia d desde P_1 al plano es igual a la longitud de la proyección del vector $\overrightarrow{PP_1}$ sobre $\vec{v}$. Por trigonome-



tría elemental podemos afirmar que

$$d = |\overrightarrow{PP_1}| \cdot \cos \alpha$$

siendo α el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{PP_1}$ y $\vec{v}$.

Si multiplicamos y dividimos por $|\vec{v}|$ el miembro de la derecha de la igualdad planteada, tendremos que

$$d = \frac{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{PP_1}| \cdot \cos \alpha}{|\vec{v}|}$$

El numerador de la expresión así obtenida es equivalente al producto escalar de los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PP_1}$:

$$d = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{PP_1}}{|\vec{v}|}$$

Sustituyendo las coordenadas y calculando $|\vec{v}|$ tenemos:

$$d = \frac{(A, B, C) \cdot (x_1 + \frac{D}{A}, y_1, z_1)}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Finalmente, efectuando el producto escalar:

$$d = \frac{Ax_1 + D + By_1 + Cz_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Ordenando:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (9^p)$$

El signo del radical del denominador se determina en forma similar a la utilizada en Geometría Analítica, pág. 405, para determinar el signo en la fórmula de distancia punto-recta y la interpretación del significado es igual a la que se dio en la pág. 406.

Otras fórmulas

Damos a continuación una serie de fórmulas referentes a puntos, rectas y planos en el espacio sin detenernos en su deducción. La mayoría de ellas se demuestran fácilmente por métodos vectoriales como las estudiadas hasta ahora.

Ecuación del plano que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y es paralelo al vector $\vec{w} = (a, b, c)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad (10^p)$$

o también:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(10a^p)

Ecuación del plano que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es paralelo a los vectores $\vec{w}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{w}_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

(11^p)

o también:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(11a^p)

Ecuación del plano que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

(12^p)

o también:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A & B & C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(12a^p)

Ecuación del plano que pasa por $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

(13^p)

o también:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(13a^p)

Ecuación del plano que pasa por la intersección de dos planos

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ y } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (14^p)$$

Punto de intersección de tres planos no paralelos: es la solución del sistema formado por sus ecuaciones.

Puntos coplanarios: los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$; $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$ son coplanarios si

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (15^p)$$

o también si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (15a^p)$$

Planos que pasan por un punto: cuatro planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$; $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$ y $A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$ se intersectan en un mismo punto si

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (16^p)$$

Rectas concurrentes: dos rectas de ecuaciones $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ y

$\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ son concurrentes si

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (17^p)$$

o también si

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ l_1 & m_1 & n_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (17a^p)$$

Distancia mínima entre dos rectas: la distancia mínima entre dos rectas

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{y} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2} \quad \text{es}$$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}} \quad (18^p)$$

Distancia entre los planos paralelos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (19^p)$$

Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad: dos planos $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

son paralelos si

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = k \quad (20^p)$$

son perpendiculares si

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \quad (21^p)$$

Angulo formado por dos planos: es igual al ángulo que forman sus normales.

Volumen del tetraedro formado por los planos coordenados y el plano $Ax + By + Cz + D = 0$

$$V = \frac{1}{6} \left| \frac{D^3}{ABC} \right| \quad (22^p)$$

Volumen del tetraedro de vértices $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$; $P_3(x_3, y_3, z_3)$ y $P_4(x_4, y_4, z_4)$

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \quad (23^p)$$

o también

$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \quad (23a^p)$$

Ejemplo 7

Hallar la ecuación del plano al que pertenecen los puntos $A(2, -3, -1)$, $B(-1, 5, -2)$ y $C(3, 7, 7)$.

El problema puede ser resuelto utilizando (8^a). Aquí utilizaremos otra forma.

Sea la ecuación del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Si los puntos A , B y C pertenecen al plano, deben satisfacer su ecuación, lo que nos permite fabricar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2A - 3B - C + D = 0 & \text{(I)} \\ -A + 5B - 2C + D = 0 & \text{(II)} \\ 3A + 7B + 7C + D = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando la ecuación (II) por 2 y sumándole (I):

$$\begin{cases} -2A + 10B - 4C + 2D = 0 \\ 2A - 3B - C + D = 0 \\ \hline 7B - 5C + 3D = 0 \end{cases} \quad \text{(IV)}$$

Multiplicando la ecuación (II) por 3 y sumándole (III):

$$\begin{cases} -3A + 15B - 6C + 3D = 0 \\ 3A + 7B + 7C + D = 0 \\ \hline 22B + C + 4D = 0 \end{cases} \quad \text{(V)}$$

Sumando la ecuación (IV) y la (V) multiplicada por 5:

$$\begin{cases} 7B - 5C + 3D = 0 \\ 110B + 5C + 20D = 0 \\ \hline 117B + 23D = 0 \end{cases}$$

De donde:

$$B = -\frac{23D}{117}$$

Sustituyendo en (V) se obtiene:

$$C = \frac{38D}{117}$$

Sustituyendo B y C en cualquiera de las ecuaciones I, II o III, se obtiene:

$$A = -\frac{74D}{117}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$-\frac{74D}{117}x - \frac{23D}{117}y + \frac{38D}{117}z + D = 0$$

Dividiendo por D , multiplicando por 117 y cambiando signos obtenemos la ecuación del plano:

$$74x + 23y - 38z - 117 = 0$$

Ejemplo 8

Hallar la ecuación del plano que pasa por la intersección de los planos $3x - 2y + 5z - 1 = 0$ y $2x + 7y - 6z + 11 = 0$ y por el punto $P(2, -3, 5)$.

La ecuación del plano que se pide es, utilizando (14^p):

$$3x - 2y + 5z - 1 + k(2x + 7y - 6z + 11) = 0 \quad (I)$$

Si, además, el plano pasa por el punto P , las coordenadas de éste deben satisfacer la ecuación (I). Sustituyendo, pues, las variables por las coordenadas de P :

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 2(-3) + 5 \cdot 5 - 1 + k[2 \cdot 2 + 7(-3) - 6 \cdot 5 + 11] &= 0 \\ 6 + 6 + 25 - 1 + k(4 - 21 - 30 + 11) &= 0 \end{aligned}$$

de donde

$$k = 1$$

Sustituyendo, por último, el valor de k en (I):

$$3x - 2y + 5z - 1 + 1 \cdot (2x + 7y - 6z + 11) = 0$$

La ecuación pedida es:

$$5x + 5y - z + 10 = 0$$

Ejemplo 9

Determinar a qué distancia del plano que contiene los puntos $A(2, 0, -3)$; $B(-1, -1, 5)$ y $C(3, 7, -1)$ se encuentra el punto $P(9, 9, -3)$.

Hallamos primero, utilizando (8^p), la ecuación del plano que contiene los puntos A , B y C :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+3 \\ -3 & -1 & 8 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y reduciendo términos semejantes se obtiene:

$$29x - 7y + 10z - 28 = 0$$

Utilizando (9^p):

$$d = \frac{29(9) - 7(9) + 10(-3) - 28}{+\sqrt{29^2 + (-7)^2 + 10^2}} = \frac{140}{\sqrt{990}}$$

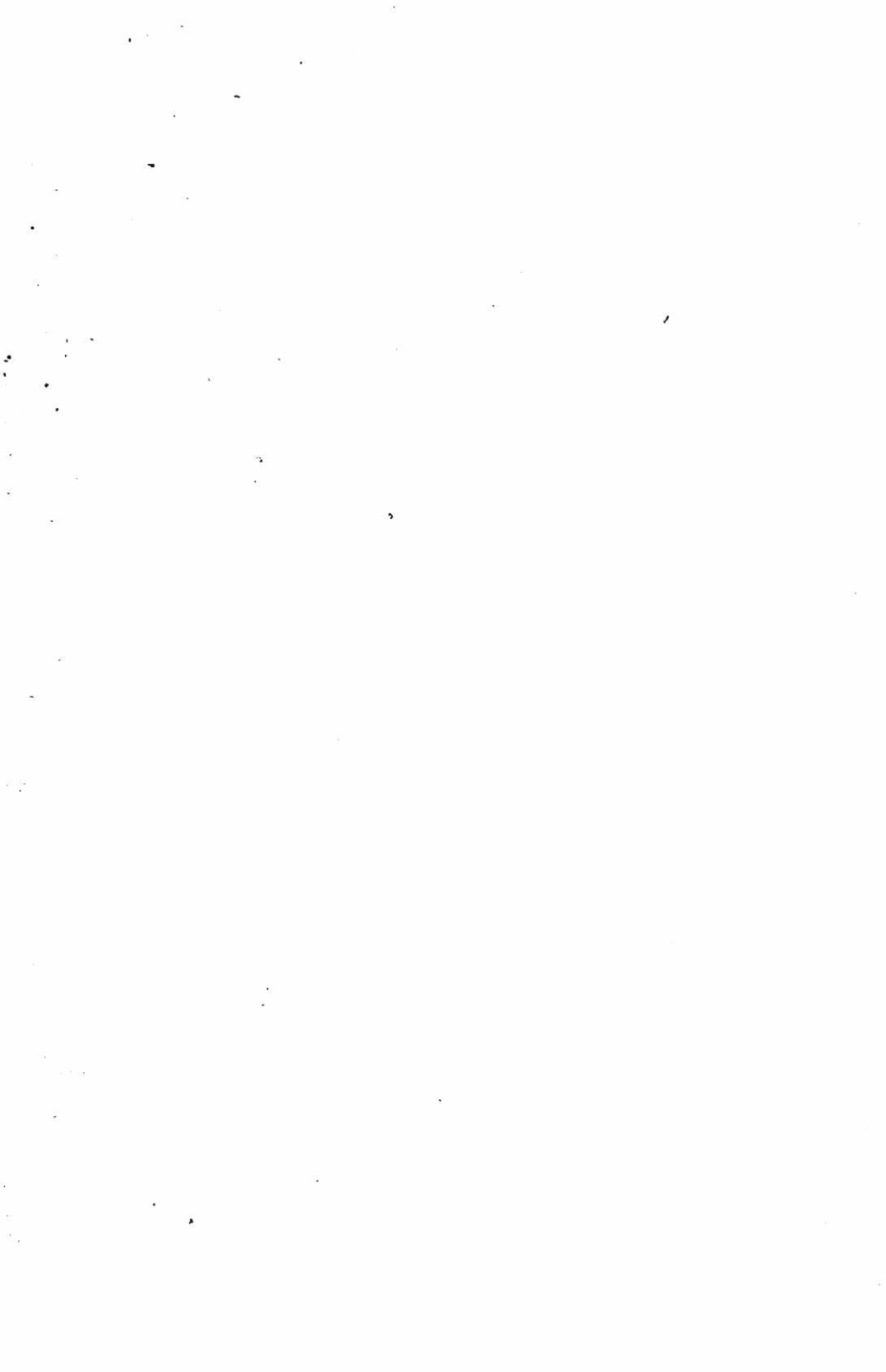
$$d = \frac{14\sqrt{110}}{33}$$

Nota: Siendo $D \neq 0$, el radical se tomó con signo contrario a D . La distancia resultó ser una cantidad positiva. Esto quiere decir que el punto P y el origen del sistema están a lados opuestos del plano en cuestión.

Ejercicio 162

- 1) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $P(5, -2, 3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-2, 3, 5)$.
- 2) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $P(3, 0, -7)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (4, -2, 11)$.
- 3) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $P(-1, -2, -3)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (4, 2, -6)$.
- 4) Un plano determina sobre los ejes coordenados segmentos, respectivamente, de 6, 2 y -12 unidades. Hallar su ecuación.
- 5) Un plano determina sobre los ejes coordenados segmentos de $-\frac{1}{2}$, 3 y 18 unidades. Hallar su ecuación.
- 6) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(2, -5, 4)$; $B(3, 5, 0)$ y $C(-2, 1, -3)$.
- 7) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(3, 3, -5)$; $B(-1, 7, 3)$ y $C(-4, -1, 5)$.
- 8) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(5, 2, 2)$; $B(3, -1, 6)$ y por el punto medio del segmento de extremos $M(5, 3, -8)$ y $N(-3, 7, 4)$.
- 9) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(-\frac{1}{2}, 3, \frac{3}{2})$ y $B(4, -1, 5)$ y es paralelo al vector $\vec{m} = (-2, 1, 5)$.
- 10) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(7, 11, 9)$ y $B(-6, 2, -5)$ y es paralelo al vector $\vec{m} = (1, 0, -3)$.
- 11) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(-4, 3, -2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{m} = (3, 11, -1)$ y $\vec{n} = (2, -1, 10)$.
- 12) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(0, 0, 3)$ y es paralelo a los vectores $\vec{m} = (4, 5, 6)$ y $\vec{n} = (3, 2, 1)$.
- 13) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(4, 2, -1)$ y $B(7, 7, -2)$ y es perpendicular al plano $3x + 4y - 5z + 11 = 0$.
- 14) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(5, 7, 3)$ y por el origen y es perpendicular al plano $3x - y + 7z - 12 = 0$.
- 15) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(-1, -1, -1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $5x + y + 3z - 11 = 0$ y $2x + 3y - z - 15 = 0$.
- 16) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(7, 5, 6)$ y es perpendicular a cada uno de los planos $5x + y + 3z - 11 = 0$ y $2x + 3y - z - 15 = 0$.
- 17) Hallar la ecuación general del plano que pasa por la intersección de los planos $5x + 2y - z + 12 = 0$ y $3x + y - 5z + 1 = 0$ y por $A(2, 3, -2)$.
- 18) Hallar la ecuación general del plano que pasa por la intersección de los planos $7x - 9y + 11z + 3 = 0$ y $5x + 11y - 13z - 2 = 0$ y por $A(3, -5, -1)$.

- 19) Hallar la ecuación general del plano que pasa por $A(2, 6, -1)$ y pasa, además, por la intersección del plano $3x + 2y + 3z - 4 = 0$ y el plano determinado por los puntos $A(5, 2, -3)$; $B(1, 1, -2)$ y $C(-1, 0, 3)$.
- 20) Hallar la distancia dirigida al plano $3x - 5y + 2z + 27 = 0$ desde el punto $A(7, -2, 9)$.
- 21) Hallar la distancia dirigida al plano $6x + 6y - 3z - 19 = 0$ desde el punto $A(4, 11, 7)$.
- 22) $D(2, 5, -1)$ es el único vértice del tetraedro $ABCD$ que no pertenece al plano $4x + 7y - 5z - 18 = 0$. Calcular la altura trazada a ese vértice.
- 23) Los puntos $A(3, 2, -1)$; $B(1, -6, 9)$; $C(-9, -4, 5)$ y $D(10, 8, 11)$ son los vértices de un tetraedro. Determinar la longitud de la altura trazada al vértice D , la ecuación de dicha altura y el volumen del tetraedro.
- 24) Hallar las coordenadas del punto en el que se intersectan los planos $2x + 5y - 3z - 43 = 0$; $3x - 2y + 2z + 15 = 0$ y $x + 6y - 7z - 57 = 0$.
- 25) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a los vectores $\vec{v} = (2, 3, -7)$ y $\vec{w} = (-1, 5, -3)$ y que pasa por el punto en el que se intersectan los planos $2x - 5y + 7z - 17 = 0$; $3x + 8y - z + 17 = 0$ y $5x + 7y - 3z + 17 = 0$.
- 26) Determinar el ángulo que forman entre sí los planos $3x - 2y + 5z + 11 = 0$ y $5x + 2y - 2z - 1 = 0$.
- 27) Determinar el ángulo que forman entre sí los planos $4x - y + 11z + 3 = 0$ y $2x + 7y + 15z - 23 = 0$.
- 28) Determinar la distancia entre los planos paralelos $3x + 2y + 5z + 4 = 0$ y $6x + 4y + 10z - 11 = 0$.
- 29) Determinar la distancia mínima entre las rectas $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{3}$ y $\frac{x-3}{3} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$.
- 30) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(5, 2, -3)$; $B(7, 11, -1)$; $C(-4, -7, 9)$ y $D(0, 0, 5)$.



MATRICES Y DETERMINANTES

Matrices - Generalidades

Distribuciones rectangulares de números o funciones como A , B , C , D , E , que aparecen a continuación, reciben el nombre de *matrices*.

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$D_{3 \times 5} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad E_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos \alpha & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Las matrices, que generalmente se denotan con letras mayúsculas, se componen de *filas* y *columnas*.

El número de cada una de éstas puede indicarse, si se desea, mediante un subíndice de la forma $m \times n$, como en los ejemplos de arriba, en el que m es el número de filas y n el de columnas de la matriz.

La matriz A , por ejemplo, tiene 3 filas y 2 columnas, circunstancia que se señala mediante el subíndice 3×2 ; la matriz B tiene 2 filas y 4 columnas; etc.

Se dice que una matriz es una *matriz cuadrada* si tiene igual número de filas que de columnas, es decir, si $m = n$. En los ejemplos anteriores sólo E es una matriz cuadrada.

En caso contrario, si $m \neq n$, se dice que es una *matriz rectangular*, *vertical* si $m > n$ (ejemplos A y C), *horizontal* si $m < n$ (ejemplos B y D).

Una matriz que tiene una sola fila o una sola columna recibe el nombre de *vector fila* o *vector columna*, respectivamente. C es un ejemplo de vector columna.

Cada uno de los números o funciones que componen la matriz recibe el nombre de *elemento*. Los elementos se denotan generalmente con una letra minúscula afectada por un par de subíndices que indican el primero en qué fila y el segundo en qué columna se encuentra el elemento. El elemento a_{72} , por ejemplo, es el que está en la séptima fila y en la segunda columna de la matriz.

A continuación podemos apreciar una matriz de m filas y n columnas en la que se utilizan las notaciones antes descritas:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{m4} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Semejanza e igualdad de matrices Dos matrices que tienen igual número de filas e igual número de columnas son *semejantes*. Si, siendo semejantes, sus elementos correspondientes coinciden, las matrices son *iguales*.

Relación entre líneas de una matriz Una línea (fila o columna) es *producto* de otra si sus elementos son los de la otra multiplicados por un mismo número.

Es *suma* de otras líneas, si sus elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de esas líneas.

Es *combinación lineal* de otras líneas si sus elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de esas líneas multiplicadas previamente cada una por un número:

$$l = \alpha l_1 + \beta l_2 + \gamma l_3 \dots \rightarrow l \text{ es combinación lineal de } l_1, l_2, l_3 \dots$$

$$M_{5 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & -3 \\ -12 & -6 & -15 & 9 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & -6 & 25 & -11 \end{pmatrix}$$

En la matriz M los elementos de la tercera fila se obtienen multiplicando los de la segunda por -3 : la tercera fila es, pues, producto de la segunda.

La cuarta fila se obtiene sumando las dos primeras: es combinación lineal o simplemente suma de ellas.

Los elementos de la quinta fila se obtienen sumando los de la primera multiplicados por -5 y los de la segunda multiplicados por 2 : es, por tanto, combinación lineal de ellas.

Submatriz La matriz que se obtiene suprimiendo cierto número de filas y cierto número de columnas de una matriz dada es una *submatriz* de ésta. Por ejemplo la matriz

$$N_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -15 \\ 4 & 2 \\ -6 & 25 \end{pmatrix}$$

es una submatriz de M ya que se obtiene suprimiendo en ella la primera fila y la primera y cuarta columnas.

Matriz traspuesta o traspuesta de una matriz Es la que tiene como filas las columnas de la otra. La traspuesta de la matriz N que dejamos arriba se indica por, N^T y es

$$N^T = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & -6 \\ 5 & -15 & 2 & 25 \end{pmatrix}$$

Si el orden de una matriz es $m \times n$, el de la traspuesta es $n \times m$.

Particularidades de las matrices cuadradas Ya definimos anteriormente las matrices cuadradas como aquellas que tienen igual número de filas que de columnas, es decir, aquellas en las que $m = n$:

Una matriz de n filas y n columnas es una matriz cuadrada de orden n :

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Elementos principales de una matriz cuadrada son los que tienen los dos subíndices iguales: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$.

Diagonal principal es la que está formada por los elementos principales.

Diagonal secundaria es la otra diagonal. Está formada por los elementos cuyos subíndices suman $n + 1$.

Elementos conjugados son los que tienen los mismos subíndices pero en orden contrario: a_{41} y a_{14} son elementos conjugados. Los elementos conjugados son simétricos con respecto a la diagonal principal.

Líneas conjugadas son las que están formadas por elementos conjugados: la conjugada de una fila es la columna homónima.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal es aquella en la que los únicos elementos diferentes de cero son los de la diagonal principal: las matrices A , B e I son matrices diagonales.

Matriz escalar es la matriz diagonal cuyos elementos principales son iguales entre sí: B e I son, además, matrices escalares.

Matriz unidad es la matriz escalar cuyos elementos principales son todos iguales a 1. Se acostumbra designarla con la letra I .

Matriz nula es la que tiene todos sus elementos nulos.

Operaciones elementales con matrices

Consideraremos las siguientes operaciones con matrices: suma de matrices, multiplicación de un escalar por una matriz, diferencia y multiplicación de matrices.

Suma de matrices

Dos o más matrices pueden sumarse sólo si tienen el mismo orden, es decir, el mismo número de filas y el mismo número de columnas.

La suma es una matriz del mismo orden cuyos elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de las matrices sumandos.

Ejemplo 1

Dadas las matrices $A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 7 & -4 & 4 \end{pmatrix}$

determinar $A + B$.

Sumando los elementos correspondientes:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+2 & -1+3 & 2-4 & 7-4 \\ 5+3 & 0+7 & 3-4 & -4+4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicación de un escalar por una matriz

El producto de un escalar por una matriz es la matriz que se obtiene multiplicando cada elemento de la matriz por el escalar.

Ejemplo 2

Con las matrices del ejemplo 1, determinar $2A + 3B$.

$2A$ se obtiene multiplicando por 2 cada elemento de A y $3B$, multiplicando por 3 cada elemento de B :

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 & 14 \\ 10 & 0 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

$$3B = \begin{pmatrix} 6 & 9 & -12 & -12 \\ 9 & 21 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

Para sumar las matrices sumamos los elementos correspondientes:

$$2A + 3B = \begin{pmatrix} 12 & 7 & -8 & 2 \\ 19 & 21 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

Diferencia de matrices

Para restar matrices, por ejemplo $A - B$, basta multiplicar por -1 la matriz B y sumar algebraicamente:

$$A - B = A + (-B)$$

Multiplicación de matrices

Explicaremos la operación con ejemplos desde los más sencillos y generalizaremos después.

Ejemplo 3

Sean las matrices A y B :

$$A_{1 \times 3} = (2 \quad 3 \quad -1) \qquad B_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

El producto AB se obtiene en forma idéntica al producto escalar de los vectores

$$\vec{a} = (2, 3, -1) \text{ y } \vec{b} = (-4, 5, 3)$$

es decir, se multiplica escalarmente el vector fila A por el vector columna B :

$$AB = (2[-4] + 3 \cdot 5 + [-1] \cdot 3)$$

$AB = (4)$

El producto es, en este caso, una matriz de orden 1×1 .

Ejemplo 4

Sean ahora las matrices

$$A_{1 \times 3} = (2 \quad 3 \quad -1) \text{ y } B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Para obtener el producto AB se multiplica escalarmente el vector fila A por cada una de las columnas de B :

$$AB = (2[-4] + 3 \cdot 5 + [-1] \cdot 3 \qquad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + [-1] \cdot 7)$$

$AB = (4 \quad 0)$

El producto, esta vez, resultó ser una matriz de orden 1×2

Ejemplo 5

Sean las matrices

$$A_{1 \times 3} = (2 \quad 3 \quad -1) \text{ y } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Como en esta ocasión B tiene tres columnas, al multiplicar escalarmente el vector fila A por cada una de las columnas de B , obtendremos un elemento adicional:

$$AB = (2[-4] + 3 \cdot 5 + [-1] \cdot 3 \quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + [-1] \cdot 7 \quad 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + [-1] \cdot 5)$$

$$AB = (4 \quad 0 \quad 1)$$

El resultado es una matriz de orden 1×3

Ejemplo 6

Sean las matrices

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

En esta oportunidad, además de la fila obtenida en el ejemplo 5, obtendremos una segunda fila resultante de multiplicar escalarmente la segunda fila de A por cada una de las columnas de B :

$$AB = \begin{pmatrix} 2[-4] + 3 \cdot 5 + [-1] \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + [-1] \cdot 7 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + [-1] \cdot 5 \\ 5[-4] + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 3 & 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 7 & 5 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -6 & 32 & 31 \end{pmatrix}$$

El resultado es una matriz de orden 2×3 .

Generalizando: para que dos matrices se puedan multiplicar es necesario que la primera sea de orden $m \times p$ y la segunda de orden $p \times n$, es decir, la primera matriz debe tener tantas columnas como filas tiene la segunda: el producto $A_{3 \times 7} \cdot B_{5 \times 7}$, por ejemplo, **no** puede realizarse; en cambio, el producto $A_{3 \times 7} \cdot B_{7 \times 2}$, sí.

El resultado es una matriz de orden $m \times n$, es decir, tendrá tantas filas como

la primera matriz y tantas columnas como la segunda. Por ejemplo, el producto de dos matrices $A_{5 \times 7} \cdot B_{7 \times 6}$ será de orden 5×6 .

Los elementos de cada fila del resultado se obtienen multiplicando escalarmente la correspondiente fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda.

Si la multiplicación AB es posible, no siempre lo es la multiplicación BA : por ejemplo, $A_{5 \times 7} \cdot B_{7 \times 6}$ es posible, pero $B_{7 \times 6} \cdot A_{5 \times 7}$ no está definida.

Para que ambos productos estén definidos las matrices deben ser cuadradas o de orden $m \times n$ la primera y $n \times m$ la segunda: el producto $A_{2 \times 5} \cdot B_{5 \times 2}$ es una matriz de orden 2×2 y el producto $B_{5 \times 2} \cdot A_{2 \times 5}$ es una matriz de orden 5×5 .

Ejemplo 7

Sean las matrices $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ y $B_{2 \times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar AB .

La matriz producto será de orden 3×5 .

Los elementos de la primera fila se obtienen multiplicando escalarmente la primera fila de A por cada una de las columnas de B :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

La segunda fila se obtiene multiplicando escalarmente la segunda fila de A por cada una de las columnas de B :

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 22 & 12 & 5 \\ 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 6 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ & & & & \end{pmatrix}$$

La última fila se obtiene multiplicando escalarmente la tercera fila de A por cada una de las columnas de B :

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 22 & 12 & 5 \\ 11 & 30 & 22 & 19 & 7 \\ 1 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 7 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 7 \cdot 6 & 1 \cdot 3 + 7 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 23 & 22 & 12 & 5 \\ 11 & 30 & 22 & 19 & 7 \\ 22 & 39 & 44 & 17 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 8

$$\text{Resolver la ecuación: } 5A + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -7 & 22 & 27 & -5 \\ -3 & 15 & -5 & 18 & 34 \end{pmatrix}$$

El tipo de operaciones a realizar nos permite trabajar con la ecuación dada como con cualquier ecuación algebraica.

Trasponiendo la matriz al miembro de la derecha:

$$5A = \begin{pmatrix} 17 & -7 & 22 & 27 & -5 \\ -3 & 15 & -5 & 18 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & -5 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambiando signo a la segunda matriz:

$$5A = \begin{pmatrix} 17 & -7 & 22 & 27 & -5 \\ -3 & 15 & -5 & 18 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Sumando:

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & -10 & 20 & 30 & -5 \\ 0 & 20 & -10 & 15 & 35 \end{pmatrix}$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{5}$:

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & -10 & 20 & 30 & -5 \\ 0 & 20 & -10 & 15 & 35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 9

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3X + 2Y = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \\ 2X - 5Y = \begin{pmatrix} -18 & -41 \\ 35 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por -3:

$$\begin{cases} 6X + 4Y = \begin{pmatrix} 22 & 10 \\ 10 & 16 \end{pmatrix} \\ -6X + 15Y = \begin{pmatrix} 54 & 123 \\ -105 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro:

$$19Y = \begin{pmatrix} 76 & 133 \\ -95 & 19 \end{pmatrix}$$

Dividiendo ambos miembros por 19:

$$Y = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$3X + 2 \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Multiplcando:

$$3X + \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Trasponiendo al miembro de la derecha (y cambiando signos):

$$3X = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & -14 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Sumando:

$$3X = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 15 & 6 \end{pmatrix}$$

Dividiendo por 3:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 163

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

calcular cada una de las siguientes expresiones:

1) $A^T + G$

7) BH

2) $B^T + H$

8) $C \cdot K^T$

3) CE

9) $H \cdot G^T + D^T$

4) KE

10) $(GB + D) \cdot H$

5) FG

11) $F^3 - F^4$

6) F^2

12)

Demstrar que $\begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{tg} \alpha \\ \sec \alpha & -\operatorname{csc} \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sec \alpha & \cos \alpha \\ \operatorname{csc} \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \operatorname{tg}^2 \alpha & \operatorname{ctg}^2 \alpha \end{pmatrix}$

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$(13) \quad 2A + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(14) \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -11 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(15) \quad 4C + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -4 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -6 \\ 26 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver los siguientes sistemas:

$$(16) \quad \begin{cases} 3X - 5Y = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 13 & -3 \\ 29 & 23 \end{pmatrix} \\ 4X - 7Y = \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 17 & -4 \\ 39 & 30 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(17) \quad \begin{cases} 3X + Y = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 7 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ 5X - 3Y = \begin{pmatrix} 11 & -20 & 11 \\ 7 & -13 & 52 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ 4X - 2Y = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 6 & 24 \\ 48 & 14 & 36 & 10 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, demostrar que:

$$(19) \quad AB = A$$

$$(20) \quad BA = B$$

$$(21) \quad A^2 = A$$

$$(22) \quad B^2 = B$$

Método de eliminación de Gauss

Una primera aplicación del concepto de matriz y de las operaciones hechas con matrices es la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 10 \\ 3x + 2y - 5z = -5 \\ x + 3y + 4z = -3 \end{cases}$$

$$\text{y sean las matrices } M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz M está formada por los coeficientes de las incógnitas del sistema y

la llamaremos *matriz de las incógnitas*. La matriz M' incluye una cuarta columna formada por los términos independientes: llamaremos a M' *matriz ampliada*. En esta aplicación trabajaremos exclusivamente con la matriz ampliada.

Sabemos por álgebra elemental que, al resolver ecuaciones y sistemas, podemos hacer una serie de operaciones que no alteran el valor de las expresiones. Las operaciones más comunes son

- intercambiar el orden de las ecuaciones
- multiplicarlas por algún número positivo o negativo
- simplificarlas dividiéndolas por alguna cantidad
- sumar ecuaciones multiplicadas previamente por un número
- etc.

Si efectuamos algunas de estas operaciones en el sistema dado anteriormente, el sistema que se obtiene es totalmente equivalente al sistema primitivo.

Es lógico concluir entonces que la matriz ampliada que se obtiene del sistema transformado es también equivalente a la matriz ampliada original y que en las filas de la matriz ampliada podemos realizar las mismas operaciones que son válidas para las ecuaciones.

Observemos ahora la siguiente matriz:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Si la matriz N corresponde a un sistema de ecuaciones de variables (x, y, z) , el sistema debe ser el siguiente:

$$\begin{cases} x = k \\ y = l \\ z = m \end{cases}$$

Obviamente, si la matriz del sistema es semejante a la matriz N , la última columna tiene las soluciones del sistema.

El método de eliminación de Gauss consiste, precisamente, en esto: en transformar la matriz original del sistema hasta obtener una matriz igual a la matriz N .

La forma práctica para conseguirlo la mostramos con ejemplos concretos.

Ejemplo 10

Resolver el sistema dado anteriormente:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 10 \\ 3x + 2y - 5z = -5 \\ x + 3y + 4z = -3 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Llevamos la tercera fila al puesto de la primera para que el elemento a_{11} sea 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (-2) \\ \leftarrow (-3) \end{array}$$

Para obtener que se anulen los elementos a_{21} y a_{31} multiplicamos la 1ª fila por -2 y se la sumamos a la 2ª y, a continuación, multiplicamos la 1ª fila por -3 y se la sumamos a la 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & -5 & 16 \\ 0 & -7 & -17 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow \div (-7)$$

Para que el elemento a_{22} sea 1, dividimos la 2ª fila por -7 .

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & -7 & -17 & 4 \end{pmatrix} \leftarrow (7)$$

Para anular el elemento a_{32} multiplicamos la 2ª fila por 7 y se la sumamos a la 3ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{pmatrix} \leftarrow \div (-12)$$

Dividimos la 3ª fila por 12 para que a_{33} sea 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{5}{7} & -\frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow (-\frac{5}{7}) \\ \leftarrow (-4) \end{array}$$

Iniciamos ahora el proceso en sentido contrario: debemos anular los elementos a_{23} y a_{13} . Para conseguirlo, multiplicamos la 3ª fila por $-\frac{5}{7}$ y se la sumamos a la 2ª y luego multiplicamos la 3ª fila por -4 y se la sumamos a la 1ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow (-3)$$

Para anular el elemento a_{12}

multiplicamos la 2ª fila por -3 y se la sumamos a la 1ª.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz obtenida corresponde al sistema

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = 1 \end{cases}$$

La solución del sistema original es, en consecuencia:

$$(2, -3, 1)$$

Ejemplo 11

Resolver por Gauss el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z + 3v = 22 \\ 3x + y + 4v = 15 \\ x + 3y - 2z - 2v = -15 \\ 2x + 5y - z = -8 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada colocando de una vez la tercera fila de primera para que el elemento a_{11} sea 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & 22 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 15 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-2) \\ \leftarrow (-3) \\ \leftarrow (-2) \end{matrix}$$

Para anular los elementos encerrados en la línea a trazos, multiplicamos la primera fila por -2 y se la sumamos a la segunda; luego por -3 y se la sumamos a la tercera y, por último, nuevamente por -2 y se la sumamos a la cuarta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & -7 & 6 & 7 & 52 \\ 0 & -8 & 6 & 10 & 60 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 22 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow + (2) \\ \leftarrow \times (-1) \end{matrix}$$

Colocamos la cuarta ecuación (cambiada de signo) de segunda para que el elemento a_{22} sea 1. Simplificamos, además la tercera fila.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -22 \\ 0 & -7 & 6 & 7 & 52 \\ 0 & -4 & 3 & 5 & 30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (7) \\ \leftarrow (4) \end{matrix}$$

Para anular los elementos señalados multiplicamos la segunda fila primero por 7 y luego por 4 antes de sumarla, respectivamente, a las filas tercera y cuarta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -15 & -21 & -102 \\ 0 & 0 & -9 & -11 & -58 \end{pmatrix} \leftarrow +(-15)$$

Dividimos la tercera fila por -15 para que el elemento a_{33} sea 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{34}{5} \\ 0 & 0 & -9 & -11 & -58 \end{pmatrix} \leftarrow (9)$$

Para anular el elemento a_{43} multiplicamos por 9 la tercera fila y se la sumamos a la cuarta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{34}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \leftarrow \times \frac{5}{8}$$

Multiplicamos la cuarta fila por $\frac{5}{8}$ para que a_{44} sea 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & -15 \\ 0 & 1 & -3 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{34}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-\frac{7}{5}) \\ \leftarrow (4) \\ \leftarrow (2) \end{matrix}$$

Iniciamos el proceso en sentido contrario. Prescindimos de las explicaciones pues las operaciones a realizarse cada vez para anular los elementos señalados están indicadas al lado de cada matriz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (3) \leftarrow (2) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-3) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución del sistema:

$$(3, -2, 4, 2)$$

Ejercicio 164

Resolver por el método de eliminación de Gauss cada uno de los siguientes sistemas:

1) $\begin{cases} x - 2y = 13 \\ x - 7y = 38 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 7y = -33 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = -2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - 4y + 3z = 13 \\ 2x + 3y + z = 5 \\ 3x + 2y - 4z = -4 \end{cases} \begin{matrix} -1 \end{matrix}$

5) $\begin{cases} 2x - 3y - 3z = -32 \\ 4x - 2y + z = -11 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - 2y + z = -14 \\ x + z = -4 \\ 4x - 3y + 5z = -23 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x - 3y + 6z = 3 \\ 5y - 2z = 2 \\ 3x - 3y + 4z = 23 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z + 4v = 11 \\ 3x - y - 2z + 2v = -21 \\ 4x - 2y + z + v = -10 \\ x - 2y + z + v = -4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} 2x + y + z + v = 4 \\ 3x - y - z + v = -1 \\ 4x - y + z + 2v = 3 \\ 5x + z + v = 6 \end{cases}$

10) $\begin{cases} 3x + 2y + z = -11 \\ 2x - 2y + v = -6 \\ x - y + 3z + 2v = -12 \\ 4x + z + v = -12 \end{cases}$

$$11) \begin{cases} x + y + z + v + w = 3 \\ x - y + v - w = -3 \\ 2x + y - z - w = 0 \\ 2x + 2y + z - v = 8 \\ x - 2z - v - w = -2 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x - y + z - v + w = 12 \\ 3x + 3z + v + 2w = 17 \\ 2x + 3y - z - 2w = -6 \\ 2x + 3y + 2z - v + w = 12 \\ 2x - 2z + 2v - w = -6 \end{cases}$$

Inversiones de una permutación

Un conjunto de elementos puede ordenarse de muchas formas. El número de formas distintas de ordenar n elementos es

$$P_n = n!$$

Si tomamos n elementos y los ordenamos según cierto criterio, a ese ordenamiento lo llamaremos *permutación principal*.

Dos elementos de otra permutación forman *sucesión* si, prescindiendo de los restantes, están en el mismo orden que en la permutación principal y forman *inversión* en caso contrario.

Por ejemplo, si la permutación principal es 1234567 y una de las permutaciones es 5213647, tenemos que en ésta

el 5 y el 2 forman inversión

el 5 y el 1 forman inversión

el 5 y el 3 forman inversión

el 5 y el 6 forman sucesión

el 5 y el 4 forman inversión

y el 5 y el 7 forman sucesión.

Para hallar el número total de inversiones que forman los elementos de una permutación, se suman las inversiones que forma cada elemento con los que le siguen.

En nuestro ejemplo

el 5 forma 4 inversiones

el 2 forma 1 inversión

el 1 no forma inversiones

el 3 no forma inversiones

el 6 forma 1 inversión

el 4 no forma inversiones

El total de inversiones es $4 + 1 + 1 = 6$.

Clase de una permutación

Si el total de inversiones es par diremos que la permutación es de *clase par*; diremos que es de *clase impar* en caso contrario. En el ejemplo anterior teníamos una permutación de clase par.

Ejemplo 12

Si SECADOR es la permutación principal, determinar de qué clase es la permutación DECORAS.

D forma inversiones con E, C, A y S = 4

E forma inversión con S = 1

C forma inversión con S = 1

O forma inversiones con A y S = 2

R forma inversiones con A y S = 2

A forma inversión con S = 1

El total de inversiones es 9: DECORAS es, por tanto, una permutación de clase impar.

DETERMINANTES

A cada matriz cuadrada se le hace corresponder un número que recibe el nombre de *determinante* de la matriz.

El determinante de una matriz cuadrada es la suma de todos los productos que pueden formarse de tal forma que en cada producto haya un elemento (y sólo uno) de cada fila y un elemento (y sólo uno) de cada columna.

Estos productos serán positivos o negativos según que sean de clase par o impar las permutaciones de los subíndices que indican las filas y las columnas.

En un determinante de segundo orden (un determinante de dos filas y dos columnas)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

sólo pueden obtenerse dos productos distintos que satisfagan las condiciones descritas: $a_{11} \cdot a_{22}$ y $a_{12} \cdot a_{21}$.

El primer producto será positivo pues los subíndices 11 y 22 no forman inversión y son una permutación de clase par.

En el segundo producto, en cambio, el subíndice 12 no forma inversión, pero sí forma inversión el subíndice 21. Se trata de una permutación de clase impar y el producto llevará signo negativo.

Tenemos entonces que

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

En un determinante de tercer orden

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

pueden formarse los siguientes productos:

$$\begin{array}{lll} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}, & a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}, & a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}, \\ a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}, & a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}, & a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{array}$$

los tres últimos negativos por tratarse de permutaciones de clase impar.

Tenemos, entonces, que para un determinante de tercer orden

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

En un determinante de orden n , el número de productos distintos que pueden formarse es

$$\begin{aligned} N &= C_{n,1} \cdot C_{n-1,1} \cdot C_{n-2,1} \cdots C_{1,1} \\ &= n(n-1)(n-2) \cdots 1 \\ &= n! \end{aligned}$$

de los cuales la mitad serán positivos y la mitad negativos.

Así en un determinante de cuarto orden, pueden formarse $4! = 24$ productos distintos. En uno de quinto orden $5! = 120$ productos distintos.

Si en los determinantes de segundo y de tercer orden se hace fácil construir todos los productos distintos, con los de cuarto orden o de orden superior al cuarto se hace del todo imposible.

Uteriormente estudiaremos una serie de propiedades de los determinantes cuya aplicación nos permitirá calcular con relativa facilidad determinantes de orden superior al tercero.

Desarrollo de determinantes de segundo orden

Ya hemos visto que el valor de un determinante de segundo orden es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

En palabras llanas, podemos decir que es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo 13

Calcular el valor de Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 3 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) \\ = 9 + 10$$

$$\Delta = 19$$

Ejemplo 14

Resolver la siguiente ecuación: $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x & 2x \end{vmatrix} = 42$

Desarrollando el determinante del miembro de la izquierda:

$$x \cdot 2x - 5 \cdot x = 42$$

Multiplicando y trasponiendo términos:

$$2x^2 - 5x - 42 = 0$$

De donde:

$$x_1 = 6$$

$$x_2 = -\frac{7}{2}$$

Ejercicio 165

Calcular los siguientes determinantes:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 3\sqrt{2} & \sqrt{7} \\ 2\sqrt{21} & 2\sqrt{6} \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \beta & \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} \lg 3 & \lg 4 \\ -\lg 3 & \lg 25 \end{vmatrix}$$

Resolver las siguientes ecuaciones:

$$7) \begin{vmatrix} 2 & 3x \\ -1 & x \end{vmatrix} = 15$$

$$10) \begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ 2x+1 & x-3 \end{vmatrix} = 1$$

$$8) \begin{vmatrix} 3x & 2 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 11x + 14$$

$$11) \begin{vmatrix} \cos 3x & 2 \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} 3x & 2 \cos x \end{vmatrix} = -1$$

$$9) \begin{vmatrix} x^2 & x \\ x & x \end{vmatrix} = 3x^2 - 3x$$

$$12) \begin{vmatrix} 2 \cos x & -1 \\ 1 & 2 \operatorname{sen} x \end{vmatrix} = 0$$

Resolver los siguientes sistemas:

$$13) \begin{cases} \begin{vmatrix} 2x & 3y \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2y & x \end{vmatrix} = 31 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \begin{vmatrix} x & 3x \\ y & x \end{vmatrix} = -5 \\ \begin{vmatrix} 5 & -y \\ 3 & x \end{vmatrix} = 11 \end{cases}$$

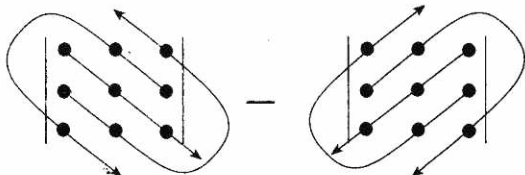
Desarrollo de determinantes de tercer orden

Ya hemos visto también que el valor de un determinante de tercer orden es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Un esquema que puede ayudar a desarrollar el determinante de tercer orden sin tener que recurrir a la memorización de una fórmula es el siguiente:

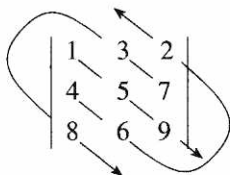


Veámoslo con un ejemplo:

Ejemplo 15

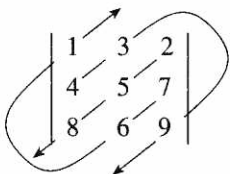
Calcular el valor del determinante $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

Los tres productos que se pueden obtener con la parte izquierda del esquema son:



$$1 \cdot 5 \cdot 9, \quad 4 \cdot 6 \cdot 2, \quad 7 \cdot 3 \cdot 8$$

Los que se obtienen con la parte derecha son:



$$2 \cdot 5 \cdot 8, \quad 7 \cdot 6 \cdot 1, \quad 9 \cdot 3 \cdot 4$$

El valor del determinante es:

$$\Delta = 45 + 48 + 168 - (80 + 42 + 108)$$

$$= 261 - 230$$

$$\Delta = 31$$

Ejemplo 16

$$\text{Resolver: } \begin{vmatrix} x & 2x & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ x & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4x$$

Desarrollamos el determinante:

$$5x + 2x^2 - 24 - (-15x + 4x + 4x) = 4x$$

Reduciendo términos:

$$2x^2 + 8x - 24 = 0$$

Simplificando:

$$x^2 + 4x - 12 = 0$$

De donde:

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 2$$

Ejemplo 17

$$\text{Resolver: } \begin{vmatrix} x & -2 & x \\ -3 & x & 3 \\ 5 & 2x & x \end{vmatrix} \leq 7x^2 - 37x$$

Desarrollamos el determinante:

$$x^3 - 6x^2 - 30 - (5x^2 + 6x + 6x^2) \leq 7x^2 - 37x$$

Reduciendo términos:

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \leq 0$$

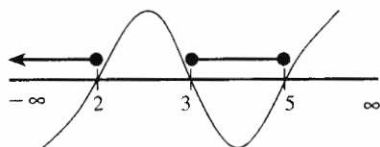
Factorizando:

$$(x-2)(x-3)(x-5) \leq 0$$

Estudiamos la función

$$y = (x-2)(x-3)(x-5)$$

Gráfica:



Solución:

$$(-\infty, 2] \cup [3, 5]$$

Ejercicio 166

Calcular los siguientes determinantes:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 7 & -3 \\ 9 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$9) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{6} & 2\sqrt{6} & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 11 & -13 & 15 \\ -10 & 9 & 12 \\ 17 & -19 & 14 \end{vmatrix}$$

$$10) \begin{vmatrix} \sqrt{21} & \sqrt{14} & \sqrt{7} \\ \sqrt{7} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{21} & -3\sqrt{7} & \sqrt{14} \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} \lg 2 & \lg 2 & 1 \\ -1 & \lg 5 & \lg 5 \\ \lg 25 & 1 & \lg 4 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{2} & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$12) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Resolver las ecuaciones e inequaciones siguientes:

$$13) \begin{vmatrix} 3x & 2x & x \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 64$$

$$14) \begin{vmatrix} 5 & -x & 2x \\ 1 & 1 & x+2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17x - 7$$

$$15) \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ 2 & x+2 & 2 \\ 3 & 3 & x+3 \end{vmatrix} = 10 - 3x$$

$$16) \begin{vmatrix} 3 & 3^x & -1 \\ 2 & -2 & 3^x \\ 3^x & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \cdot 3^x & 7 \cdot 3^x - 5 \\ 2 & 2 \cdot 3^x \end{vmatrix}$$

$$17) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ -1 & x & 0 \\ 2 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -x & 1 \\ -2 & x & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$18) \begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ x & 0 & 1 \\ 2x & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x & 2 \\ -1 & x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$19) \begin{vmatrix} x & -2 & 3 \\ 2 & x & -1 \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix} \geq 8x^2 - 14x + 8$$

$$20) \begin{vmatrix} x^2 & -1 & 2x \\ 2 & x & -4 \\ 5 & -1 & x \end{vmatrix} \geq -x^3 + 7x^2 - x$$

Propiedades de los determinantes

1) Si todos los elementos de una línea (fila o columna) son nulos, el determinante es nulo.

En efecto, por definición, en todos los productos que pueden formarse al desarrollar el determinante debe haber un elemento de cada fila y uno de cada columna. Si todos los elementos de una fila o columna son nulos, todos los productos lo serán pues en cada uno de ellos debe haber un elemento de dicha línea.

2) El determinante de una matriz cuadrada y el de su traspuesta son iguales.

Si en un determinante se escriben, conservando el mismo orden, las filas como columnas, el valor del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

En efecto el desarrollo de ambos determinantes es

$$aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)$$

3) Si se intercambian dos filas o dos columnas, el valor absoluto del determinante no varía, pero cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & c & b \\ d & f & e \\ g & i & h \end{vmatrix}$$

4) Si dos filas o dos columnas de un determinante son idénticas, el determinante es nulo.

Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Si intercambiamos la primera y tercera filas, el determinante, por la propiedad anterior, cambiará de signo y obtendremos $-\Delta$:

$$-\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

Y como dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí, tenemos que

$$\Delta = -\Delta$$

$$2\Delta = 0$$

$$y \quad \Delta = 0$$

5) Si se multiplican todos los elementos de una línea por un mismo número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

Nuevamente recurrimos a la definición de determinante: dado que en cada uno de los productos que se forman al desarrollar el determinante debe aparecer un elemento de la línea en cuestión, estando los elementos de esa línea multiplicados por un número, cada uno de los productos quedará multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = kaei + kbfg + kcdh - (kceg + kbdi + kafh)$$

Sacando factor común:

$$= k[aei + bfg + cdh - (ceg + bdi + afh)]$$

$$= k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Esta propiedad nos permite sacar factor común en una fila o en una columna.

Sea, por ejemplo, el determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 14 & -6 \\ 7 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Si sacamos factor común 2 en la primera fila y luego factor común 3 en la tercera columna, obtendremos:

$$= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

6) Si se cambia el signo de los elementos de una línea, el determinante cambia de signo.

Esta propiedad es corolario de la anterior.

7) Si se cambia el signo de los elementos de un número par de líneas, el determinante no varía. Si se hace, en cambio, con un número impar de líneas, el determinante cambia de signo.

Corolario también de la propiedad 5.

8) Si los elementos de una línea son proporcionales a los de otra línea paralela, el determinante es nulo.

Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

en el que los elementos de la primera fila son proporcionales a los de la tercera. Sacando factor común (propiedad 5):

$$\Delta = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

El determinante del miembro de la derecha es nulo por tener dos filas iguales (propiedad 4). Por tanto

$$\Delta = k \cdot 0$$

$$\Delta = 0$$

9) Un determinante se puede descomponer en una suma de determinantes que tienen todas las líneas iguales a las del primero menos una, si al sumar los elementos correspondientes de esta línea se obtiene la línea del primer determinante.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ k & l & m \\ p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ k & l & m \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ k & l & m \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

En efecto el desarrollo del determinante de la izquierda es:

$$(a_1 + b_1)lr + (a_2 + b_2)mp + (a_3 + b_3)kq - (a_3 + b_3)lp - (a_2 + b_2)kr - (a_1 + b_1)mq \quad (I)$$

El desarrollo de los determinantes de la derecha es:

$$[a_1lr + a_2mp + a_3kq - a_3lp - a_2kr - a_1mq] + [b_1lr + b_2mp + b_3kq - b_3lp - b_2kr - b_1mq]$$

Sacando factor común en los primeros términos de cada corchete, luego en los segundos, y así sucesivamente, se obtiene la expresión (I).

10) Si se suman a los elementos de una línea los correspondientes a otras líneas paralelas, multiplicadas previamente por números cualesquiera, el valor del determinante no varía.

Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Sumémosle a los elementos de la primera fila los de la segunda multiplicados por k y los de la tercera multiplicados por m :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a + kd + mg & b + ke + mh & c + kf + mi \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Por la propiedad 9 podemos descomponer el determinante así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kd & ke & kf \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} mg & mh & mi \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Los dos últimos determinantes son nulos por tener líneas proporcionales (propiedad 8). En consecuencia

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 + 0$$

$\frac{2}{9}$ $\frac{3}{3}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

11) Si una línea de un determinante es combinación lineal de otras líneas paralelas a ella, el determinante es nulo.

Sea el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka+md & kb+me & kc+mf \end{vmatrix}$$

en el que la tercera fila es la suma de las dos primeras multiplicadas previamente por números cualesquiera y, en consecuencia, combinación lineal de ellas.

Por la propiedad 9 lo podemos descomponer así:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ka & kb & kc \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ md & me & mf \end{vmatrix}$$

Como por la propiedad 8 los dos determinantes son nulos, tenemos que

$$\Delta = 0$$

Menor complementario de un elemento

Es el determinante que resulta de suprimir la fila y la columna del elemento.

Obviamente, si el determinante al que pertenece el elemento es de orden n , el menor complementario, al suprimirle una fila y una columna, será de orden $n - 1$.

En el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 4 \\ -7 & 6 & 8 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

el menor complementario del elemento a_{23} es

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Adjunto de un elemento

Si al menor complementario de un elemento le anteponemos un signo positivo o un signo negativo, según sea par o impar, respectivamente, la suma de los subíndices del elemento, obtenemos el *adjunto* de ese elemento.

En el ejemplo anterior el adjunto del elemento a_{23} , que se designa por α_{23} , es

$$\alpha_{23} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Signo de los adjuntos por la posición del elemento

Los signos de los adjuntos se van alternando a lo largo de una fila o de una columna tal como se muestra en el cuadro que sigue.

	Signos			
$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$			

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

El valor de un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna cualquiera por sus correspondientes adjuntos.

Por ejemplo, si en el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

elegimos la primera fila para efectuar el desarrollo por adjuntos, tendremos:

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

(El segundo término es negativo porque el adjunto del elemento a_{12} lo es). Si elegimos, en cambio, la segunda columna para efectuar el desarrollo, el mismo determinante será igual a la expresión que sigue:

$$= -a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

(Nuevamente, los términos negativos deben su signo al hecho de ser negativos los adjuntos de los respectivos elementos).

Utilidad del desarrollo por adjuntos

Es desarrollo por adjuntos facilita el cálculo de los determinantes de tercer orden y puede ser efectuado mentalmente sin necesidad de escribir los menores complementarios de los elementos.

Trate el lector de seguir y entender el siguiente desarrollo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 3(35 - 3) - 2(-21 - 12) + 4(-3 - 20) \\ = 96 + 66 - 92 \\ = 70$$

Pero la ventaja del desarrollo por adjuntos se hace más evidente en casos como el que sigue:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Si desarrollamos por los elementos de la segunda columna, tenemos:

$$= 0 \cdot \alpha_{12} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \alpha_{32} = -20$$

Obviamente, la elección de una línea con la mayor cantidad de elementos nulos hace mucho más breve el cálculo.

Sin embargo, si el método de los adjuntos es útil en el caso de los determinantes de tercer orden, en el caso de los determinantes de orden superior al tercero se hace imprescindible para evitar el cálculo engorroso de $n!$ productos, como vimos con anterioridad.

Con el fin de tener la ventaja adicional de la presencia de ceros entre los elementos de una línea, nos valdremos de las propiedades de los determinantes para hacer convenientes transformaciones.

Las explicaciones las damos a continuación con ejemplos concretos.

Desarrollo de determinantes de orden superior al tercero

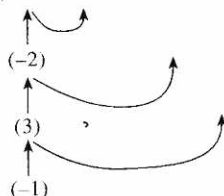
Ejemplo 18

$$\text{Calcular: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Lo primero que debemos hacer es elegir un elemento igual a 1 y que pertenezca a una línea que tenga la mayor cantidad de ceros. En este determinante, el primer elemento y el último de la cuarta fila satisfacen esta condición. Trabajaremos con el primer elemento.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & -2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 0 & 2 \\ \textcircled{1} & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Haciendo uso de la 7ª propiedad, para obtener que se anulen los restantes elementos de la cuarta fila, multiplicaremos la primera columna por -2 y se la sumaremos a la segunda; luego multiplicaremos la primera columna por 3 y se la sumaremos a la cuarta; por último, la multiplicaremos por -1 y se la sumaremos a la quinta columna.



El proceso ya es en cierta forma conocido pues lo utilizamos al aplicar el método de Gauss, sólo que allá sólo sumábamos filas, nunca columnas.

Con determinantes, en cambio, podemos sumar columnas: *cuando se quieren obtener ceros en una fila se suman columnas.*

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & 10 & 3 \\ -4 & 13 & 3 & -12 & 6 \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el determinante por los adjuntos de los elementos de la cuarta fila, tendremos:

$$= (-1) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 1 \\ -9 & 2 & 10 & 3 \\ 13 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

(Dado que los restantes elementos de la cuarta fila son ceros, sus productos por sus respectivos adjuntos se anulan).

Nuevamente, para seguir el cálculo, elegimos un elemento igual a 1 y que pertenezca a una línea con la mayor cantidad de ceros: trabajaremos con el primer elemento de la cuarta columna.

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & \textcircled{1} \\ -9 & 2 & 10 & 3 \\ 13 & 3 & -12 & 6 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-3) \\ \leftarrow (-6) \end{matrix}$$

Para que se anulen los restantes elementos de la cuarta columna, multiplicaremos la primera fila por -3 y se la sumaremos a la segunda; a continuación, multiplicaremos la primera fila por -6 y se la sumaremos a la tercera.

(Cuando se quieren obtener ceros en una columna se suman filas)

$$= - \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & \textcircled{1} \\ -18 & -10 & 7 & 0 \\ -5 & -21 & -18 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la cuarta columna:

$$= -(-1) \begin{vmatrix} -18 & -10 & 7 \\ -5 & -21 & -18 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

El signo que precede al determinante pasó a ser positivo. Dado que tiene muchos elementos negativos, cambiaremos el signo de las dos primeras filas, con lo que el valor del determinante no variará (propiedad 7):

$$= \begin{vmatrix} 18 & 10 & -7 \\ 5 & 21 & 18 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

A este punto, ya que no tenemos ningún elemento igual a 1 y tratar de obtenerlo no facilita el cálculo, desarrollamos por los elementos de la tercera fila:

$$\begin{aligned} &= -8(324 + 35) + 9(378 - 50) \\ &= -2872 + 2952 \\ &= \boxed{80} \end{aligned}$$

Ejemplo 19

Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Elegimos para el desarrollo el tercer elemento de la cuarta columna:

$$= \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (-3) \leftarrow (4) \leftarrow (1) \end{matrix}$$

Procederemos a anular los restantes elementos de la cuarta columna. Las operaciones a realizarse están indicadas al lado del determinante anterior. (Nótese que para obtener ceros en una columna estamos sumando filas):

$$= \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 0 & 3 \\ 6 & -5 & -19 & 0 & -11 \\ -1 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ -7 & 10 & 28 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la cuarta columna:

$$= - \begin{vmatrix} 10 & 5 & -2 & 3 \\ 6 & -5 & -19 & -11 \\ -7 & 10 & 28 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Sacamos factor común en la 2ª columna (propiedad 5):

$$= -5 \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 & 3 \\ 6 & -1 & -19 & -11 \\ -7 & 2 & 28 & 15 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow (1) \leftarrow (-2) \end{matrix}$$

Para continuar elegimos el primer elemento de la segunda columna (sumaremos filas). Las operaciones están indicadas.

$$= -5 \begin{vmatrix} 10 & 1 & -2 & 3 \\ 16 & 0 & -21 & -8 \\ -27 & 0 & 32 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$= -5(-1) \begin{vmatrix} 16 & -21 & -8 \\ -27 & 32 & 9 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la tercera fila:

$$\begin{aligned} &= 5[-4(144 - 216) + 5(512 - 567)] \\ &= 5[288 - 275] \\ &= 5 \cdot 13 \\ &= \boxed{65} \end{aligned}$$

Ejercicio 167

Calcular el valor de los siguientes determinantes:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 11 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 15 & -4 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & -2 & 4 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 9 & 1 \\ -13 & 15 & -21 & 8 \\ 0 & 23 & -2 & 4 \\ 6 & -10 & -3 & 13 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 2 & -20 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 11 & -2 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$9) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$10) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} \alpha & \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & 0 & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \end{vmatrix}$$

$$12) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$$

$$13) \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

$$14) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$$

Resolver las siguientes ecuaciones (Ejercicios 15 al 25):

$$15) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & -1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 2 \\ 1 & -1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$16) \begin{vmatrix} 2 & 3 & x & 1 \\ 1 & x & -1 & -1 \\ 1 & 0 & x & -1 \\ 1 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$17) \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & 2 \\ -x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ 11 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix} + 3$$

$$18) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & x \\ x & -2 & 0 & -x \\ x & x & -x & x \\ x & 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$19) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ -1 & 1 & -1 & x & 0 \\ 2 & 0 & x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & x & -1 \\ 1 & 0 & x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x & 0 & x \\ 7 & x & 0 \\ 3x & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$20) \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$21) \begin{vmatrix} x & a & b & -a \\ b & a & b & -a \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$22) \begin{vmatrix} x & a & b & a \\ a & x & a & b \\ b & a & x & a \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$23) \begin{vmatrix} x^3 & a^2+1 & 1 \\ a^3 & x^2+1 & 1 \\ 1 & x^2+a^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (a^2 \neq 1)$$

$$24) \begin{vmatrix} a & b & c & x \\ b & a & x & c \\ c & x & a & b \\ x & c & b & a \end{vmatrix} = 0$$

$$25) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ c & x & a & b \\ b & c & x & a \\ a & b & c & x \end{vmatrix} = 0$$

Demostrar las siguientes igualdades (Ejercicios 26 al 52)

$$26) \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ 1 & b & b & b \\ 1 & 1 & c & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix} = a(b-1)(c-1)(d-1)$$

$$27) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$$

$$28) \begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ b & c & a & -1 \\ c & a & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & c & 3 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = (a-b-c)^2$$

$$29) \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

$$30) \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c+a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

$$31) \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 & b^2 \\ b^2 & 2ab & a^2 \end{vmatrix} = (a^3 + b^3)^2$$

$$32) \begin{vmatrix} 0 & a & b & d \\ -a & 0 & c & e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix} = (be - cd)^2$$

$$33) \begin{vmatrix} b+c & c & b \\ c & a+c & a \\ b & a & a+b \end{vmatrix} = 4abc$$

$$34) \begin{vmatrix} 4 & a+1 & a+1 \\ a+1 & (a+2)^2 & 1 \\ a+1 & 1 & (a+2)^2 \end{vmatrix} = 2(a+3)^3(a+1)$$

$$35) \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^4$$

$$36) \begin{vmatrix} a-1 & a^2-1 & a^3-1 \\ 2a-4 & a^2-4 & a^3-8 \\ 3a-9 & a^2-9 & a^3-27 \end{vmatrix} = -2a(a-1)(a-2)(a-3)$$

$$37) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^4$$

$$38) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & 2a & 3a^2 & 4a^3 \\ 4a^3 & 3a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix} = a^2(a^2 - 1)^4$$

$$39) \begin{vmatrix} \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 2 \cos(\beta - \gamma) \\ \operatorname{sen} \beta & \cos \beta & 2 \cos(\alpha - \gamma) \\ \operatorname{sen} \gamma & \cos \gamma & 2 \cos(\alpha - \beta) \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sen}(2\alpha - 2\beta) + \operatorname{sen}(2\beta - 2\gamma) + \operatorname{sen}(2\gamma - 2\alpha)$$

$$40) \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \operatorname{sen}^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \operatorname{sen}^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$41) \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 \alpha & \operatorname{sen}^2 \beta & \operatorname{sen}^2 \gamma \\ \cos^2 \alpha & \cos^2 \beta & \cos^2 \gamma \\ \cos^2 \theta & 1 - \operatorname{sen}^2 \theta & \cos^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$

$$42) \begin{vmatrix} \cos(\alpha - \beta) & \cos(\beta - \gamma) & \cos(\gamma - \alpha) \\ \cos(\alpha + \beta) & \cos(\beta + \gamma) & \cos(\gamma + \alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \operatorname{sen}(\beta + \gamma) & \operatorname{sen}(\gamma + \alpha) \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \operatorname{sen}(\beta - \gamma) \operatorname{sen}(\gamma - \alpha)$$

$$43) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg} \beta & \operatorname{tg} \gamma \\ \operatorname{sen} 2\alpha & \operatorname{sen} 2\beta & \operatorname{sen} 2\gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Si } \alpha + \beta + \gamma = \pi)$$

$$44) \begin{vmatrix} 1 & \cos \gamma & \cos \beta \\ \cos \gamma & 1 & \cos \alpha \\ \cos \beta & \cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad (\text{Si } \alpha + \beta + \gamma = \pi)$$

$$45) \begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta & 1 \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma & 1 \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -16 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}$$

$$46) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 2(\cos \beta - \cos \gamma)(\cos \gamma - \cos \alpha)(\cos \alpha - \cos \beta)$$

$$47) \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \\ \cos 3\alpha & \cos 3\beta & \cos 3\gamma \end{vmatrix} = 4(\cos \alpha - \cos \beta)(\cos \beta - \cos \gamma)(\cos \gamma - \cos \alpha) \cdot (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$$

$$48) \begin{vmatrix} \sin \alpha & \sin^3 \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \sin^3 \beta & \cos \beta \\ \sin \gamma & \sin^3 \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} = \sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha)$$

$$49) \begin{vmatrix} \sin 2\alpha & \cos \alpha & 1 \\ 2 \operatorname{tg} \alpha & \sec \alpha & 1 \\ 2 \sin \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$50) \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos 4\alpha$$

$$51) \begin{vmatrix} 2 \cos \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 \cos \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \cos \alpha \end{vmatrix} = \frac{\sin 5\alpha}{\sin \alpha}$$

$$52) \begin{vmatrix} \lg_2 3 & \lg_3 4 & \lg_4 5 \\ \lg_2 3 & \lg_3 4 & \lg_2 5 \\ \lg_5 3 & \lg_5 4 & \lg_4 2 \end{vmatrix} = 1 - \lg_2 3$$

53) Demostrar que, si $ab + bc + ca = 0$, una raíz de la ecuación

$$\begin{vmatrix} x^2 + a^2 & x + a & bc \\ x^2 + b^2 & x + b & ca \\ x^2 + c^2 & x + c & ab \end{vmatrix} = 0$$

es $x = 0$ y buscar la otra raíz.

Calcular los siguientes determinantes:

$$54) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & C_{2,1} & C_{3,1} & C_{4,1} & C_{5,1} \\ 1 & C_{3,2} & C_{4,2} & C_{5,2} & C_{6,2} \\ 1 & C_{4,3} & C_{5,3} & C_{6,3} & C_{7,3} \\ 1 & C_{5,4} & C_{6,4} & C_{7,4} & C_{8,4} \end{vmatrix}$$

$$55) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ C_{x,1} & C_{x+1,1} & C_{x+2,1} & C_{x+3,1} \\ C_{x+1,2} & C_{x+2,2} & C_{x+3,2} & C_{x+4,2} \\ C_{x+2,3} & C_{x+3,3} & C_{x+4,3} & C_{x+5,3} \end{vmatrix}$$

$$56) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & 0 & 0 \\ 1 & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & C_{4,4} & 0 \\ 1 & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} & C_{5,4} & C_{5,5} \\ 1 & C_{6,1} & C_{6,2} & C_{6,3} & C_{6,4} & C_{6,5} \end{vmatrix}$$

$$57) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & C_{1,1} & 0 & 0 & x \\ 1 & C_{2,1} & C_{2,2} & 0 & x^2 \\ 1 & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & x^3 \\ 1 & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} & x^4 \end{vmatrix}$$

58) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} c+a & a+b & b+c \\ f+d & d+e & e+f \\ i+g & g+h & h+i \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

59) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 & (a+6)^2 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante de Vandermonde

Obsérvese el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & b & c & d & \dots & p & q \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & \dots & p^2 & q^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & \dots & p^3 & q^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^{n-1} & b^{n-1} & c^{n-1} & d^{n-1} & \dots & p^{n-1} & q^{n-1} \end{vmatrix}$$

La primera fila está compuesta por n elementos elevados cada uno al exponente cero.

La segunda fila corresponde a los mismos elementos elevados al exponente uno.

La tercera, a los mismos elementos elevados al cuadrado.

Y así sucesivamente hasta la última fila que corresponde a los mismos elementos elevados al exponente $n - 1$.

Un determinante de este tipo es un *determinante de Vandermonde* y se puede calcular mediante un procedimiento sencillo que deduciremos a continuación.

Sumando a cada fila la anterior multiplicada por $-a$ y sacando factor común, se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a & \dots & p-a & q-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) & \dots & p(p-a) & q(q-a) \\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a) & \dots & p^2(p-a) & q^2(q-a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b^{n-2}(b-a) & c^{n-2}(c-a) & d^{n-2}(d-a) & \dots & p^{n-2}(p-a) & q^{n-2}(q-a) \end{vmatrix}$$

Desarrollando por los elementos de la primera columna y sacando factor común $(b-a)$, $(c-a)$, etc. en cada columna del determinante obtenido, tenemos:

$$\Delta = (b-a)(c-a)(d-a) \dots (p-a)(q-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b & c & d & \dots & p & q \\ b^2 & c^2 & d^2 & \dots & p^2 & q^2 \\ b^3 & c^3 & d^3 & \dots & p^3 & q^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b^{n-2} & c^{n-2} & d^{n-2} & \dots & p^{n-2} & q^{n-2} \end{vmatrix}$$

El determinante que resultó de este proceso es de orden $n - 1$ y también es de Vandermonde. Si volvemos a efectuar en él un proceso análogo, multiplicando ahora por $-b$ cada fila antes de sumársela a la siguiente, obtendremos esta expresión:

$$\Delta \doteq [(b-a)(c-a)(d-a)\cdots(p-a)(q-a)][(c-b)(d-b)\cdots$$

$$\cdots(p-a)(q-a)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ c & d & \cdots & p & q \\ c^2 & d^2 & \cdots & p^2 & q^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c^3 & d^3 & \cdots & p^3 & q^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c^{n-3} & d^{n-3} & \cdots & p^{n-3} & q^{n-3} \end{vmatrix}$$

en la que el determinante de orden $n-2$ es de Vandermonde.

Continuando en forma análoga con cada determinante que resulte, llegaremos necesariamente a un determinante de segundo orden

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} \quad \text{cuyo valor es } (q-p).$$

El valor de Δ será, entonces, igual al producto de todos los factores comunes que hemos ido sacando durante el proceso:

$$\begin{aligned} \Delta &= (b-a)(c-a)(d-a)\cdots(p-a)(q-a) \cdot \\ &\quad (c-b)(d-b)\cdots(p-b)(q-b) \cdot \\ &\quad (d-c)\cdots(p-c)(q-c) \cdot \\ &\quad \vdots \quad \vdots \\ &\quad (p-k)(q-k) \cdot \\ &\quad (q-p) \end{aligned}$$

El valor del determinante de Vandermonde se calcula, en definitiva, multiplicando todas las diferencias que se obtienen restando cada elemento a, b, c , etc. de todos los que le siguen.

Ejemplo 20

Calcular el valor del siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 5 & -3 \\ 4 & 9 & 4 & 25 & 9 \\ 8 & 27 & -8 & 125 & -27 \\ 16 & 81 & 16 & 625 & 81 \end{vmatrix}$$

Se trata de un determinante de Vandermonde, por tanto:

$$\Delta = (3-2)(-2-2)(5-2)(-3-2) \cdot (-2-3)(5-3)(-3-3) \cdot (5+2)(-3+2) \cdot (-3-5)$$

$$\Delta = 201600$$

Ejemplo 21

$$\text{Calcular } \Delta = \begin{vmatrix} a & b & -c & -a \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 \\ a^3 & b^3 & -c^3 & -a^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & a^4 \end{vmatrix}$$

Sacando factor común a en la primera columna, b en la segunda, $-c$ en la tercera y $-a$ en la cuarta:

$$= a^2 bc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & -c & -a \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 \\ a^3 & b^3 & -c^3 & -a^3 \end{vmatrix}$$

El determinante que queda es de Vandermonde. Lo desarrollamos como tal:

$$= a^2 bc (b-a)(-c-a)(-a-a)(-c-b)(-a-b)(-a+c)$$

Cambiando el signo a los seis últimos factores:

$$= a^2 bc (a-b)(c+a) \cdot 2a(c+b)(a+b)(a-c)$$

$$\Delta = 2a^3 bc (a+b)(a-b)(b+c)(a+c)(a-c)$$

Ejercicio 168

Calcular los siguientes determinantes:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \\ 4 & 16 & 49 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 6 & 3 & -10 \\ 4 & 12 & 9 & 50 \\ -8 & 24 & 27 & -250 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & a & -a \\ 9 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -10 & -1 \\ 9 & 2 & 20 & 1 \\ 27 & 4 & -40 & -1 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^5 \\ 2 & -a^3 & a^6 \\ 4 & a^4 & a^7 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} a^2 & 3 & 1 & 1 \\ a^4 & 12 & 2 & 1 \\ a^6 & 48 & 4 & 1 \\ a^8 & 192 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 2 & 1 \\ 49 & 9 & 4 & 1 \\ 343 & 27 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2\sqrt{2} & -3\sqrt{3} & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

9) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & -\sec^2 \alpha & 1 \\ \sec^2 \alpha & 1 & -\cos^2 \alpha \\ \sec^4 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos^4 \alpha \end{vmatrix} = 2 \cos 2\alpha$$

10) Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos^2 \alpha \sin^2 \beta & \sin^2 \alpha \cos^2 \beta & -\sin^2 \alpha \sin^2 \beta & -\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \\ \cos^4 \alpha \sin^4 \beta & \sin^4 \alpha \cos^4 \beta & \sin^4 \alpha \sin^4 \beta & \cos^4 \alpha \cos^4 \beta \\ \cos^6 \alpha \sin^6 \beta & \sin^6 \alpha \cos^6 \beta & -\sin^6 \alpha \sin^6 \beta & -\cos^6 \alpha \cos^6 \beta \end{vmatrix} = -\frac{1}{64} \sin(2\alpha + 2\beta) \sin(2\alpha - 2\beta) \sin^2 2\alpha \sin^2 2\beta$$

Resolución de sistemas de ecuaciones por determinantes – Método de Cramer

Dado un sistema ordenado de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \dots = k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots = k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots = k_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

llamaremos Δ al determinante que se forma con los coeficientes de las incógnitas:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Llamaremos, además, Δ_x , Δ_y , $\Delta_z \dots$ a los determinantes que se obtienen substituyendo en Δ la columna de los coeficientes de la respectiva incógnita por la de los términos independientes:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} k_1 & b_1 & c_1 & \dots \\ k_2 & b_2 & c_2 & \dots \\ k_3 & b_3 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & k_1 & c_1 & \dots \\ a_2 & k_2 & c_2 & \dots \\ a_3 & k_3 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & k_1 & \dots \\ a_2 & b_2 & k_2 & \dots \\ a_3 & b_3 & k_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \dots$$

En estas condiciones, los valores de las incógnitas son:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \quad \dots$$

Ejemplo 22

Resolver por el método de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - z + 2v = 5 \\ x - y - z + v = 0 \\ x + y - 2z + v = -1 \\ 2x - y + z - v = 8 \end{cases}$$

Construimos el determinante del sistema, Δ , con los coeficientes de las incógnitas y resolvemos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ (3) \end{matrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -7 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = -10$$

Construimos Δ_x sustituyendo en Δ la primera columna por la de los términos independientes y resolvemos:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow + + + \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_x = -40$$

Obtenemos el valor de la primera incógnita:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-40}{-10} = \boxed{4}$$

Construimos Δ_z sustituyendo en Δ la tercera columna por la de los términos independientes y resolvemos:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 23 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 23 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_z = -50$$

Con este resultado podemos obtener el valor de z :

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-50}{-10} = \boxed{5}$$

Intencionalmente nos abstuvimos de calcular Δ_v dado que la incógnita v no figura en la primera ecuación. Esto permite que, teniendo los valores de x y de z , calculemos v por simple sustitución.

Sustituyendo valores conocidos en la primera ecuación:

$$4 - 5 + 2v = 5$$

$$\boxed{v = 3}$$

Sustituyendo, por último, en cualquiera de las otras tres ecuaciones, obtenemos el valor de y :

$$\boxed{y = 2}$$

La solución del sistema es, en definitiva:

$$\boxed{(4, 2, 5, 3)}$$

Ejercicio 169

Resolver por el método de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$1) \begin{cases} 3x - 2y = 13 \\ 5x + 4y = 7 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2}y = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} ax + by = 2ab \\ (a+b)x + (a-b)y = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ 3x - 2z = -5 \\ 5x - 3y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ y - 2z = -5 \\ 4x - 5y - z = -2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + y + z + v = 5 \\ x - y + 2z + 3v = 2 \\ 3x + 2z + 5v = 4 \\ x + 2z + 4v = 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + 2y + 5z + v = 8 \\ 2x - y + 2z = 13 \\ x + 2y + 3z - v = 10 \\ x + 2z = 7 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x + y + z + 4v = 3 \\ 2x - y + 5v = -11 \\ x + 3y + 3z + 6v = 7 \\ x + y + z = 11 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x+z+4v=-15 \\ x-y+5v=-22 \\ x+y+z+6v=-26 \\ x+z=5 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x+v=8 \\ x-2w=7 \\ y+2v=2 \\ x+z=6 \\ z+v=0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x+y+z+v=2 \\ x+y+z+w=7 \\ x+y+v+w=3 \\ x+z+v+w=4 \\ y+z+v+w=4 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x+y+z+v-w=3 \\ x+y+z-v+w=3 \\ x+y-z+v+w=3 \\ x-y+z+v+w=3 \\ -x+y+z+v+w=3 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x+z+v=5 \\ x+y+2w=2 \\ x+y+3v=9 \\ x+z+w=2 \\ y+z+v=9 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 7x+11y+14z+17v-19w=252 \\ 25x+37y+19z-16v+21w=330 \\ 18x-9y+27z-36v+31w=953 \\ 13x-12y+29z+23v-37w=946 \\ -15x+16y+41z+43v-27w=424 \end{cases}$$

Característica de una matriz rectangular

Menor de una matriz

es cualquier matriz cuadrada de orden k formada con elementos de k filas y k columnas de una matriz rectangular.

Por ejemplo, en la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -11 & 3 & 0 & -14 \\ -2 & 15 & 7 & -3 & 6 & -2 \\ -4 & 9 & -5 & 8 & 11 & -9 \\ 1 & 10 & -1 & -6 & 14 & -7 \\ -8 & 5 & -13 & -10 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

algunos de los menores de segundo orden que pueden formarse (con los elementos de las líneas que se señalan) son:

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix} \quad (2^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \text{ filas; } 2^{\text{a}} \text{ y } 5^{\text{a}} \text{ columnas})$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \quad (1^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \text{ filas; } 3^{\text{a}} \text{ y } 4^{\text{a}} \text{ columnas})$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} \quad (4^{\text{a}} \text{ y } 5^{\text{a}} \text{ filas; } 2^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \text{ columnas})$$

Algunos de los menores de tercer orden pudieran ser:

$$\begin{pmatrix} 13 & -11 & 3 \\ -4 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

(1ª, 3ª y 4ª filas; 1ª, 3ª y 4ª columnas)

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 & -2 \\ 10 & 14 & -7 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(2ª, 4ª y 5ª filas; 2ª, 5ª y 6ª columnas)

y así sucesivamente.

Menor orlado

Orlar un menor de orden k consiste en añadirle los elementos correspondientes de otra fila y de otra columna, transformándolo en una matriz cuadrada de orden $k + 1$.

Algunas de las formas de orlar el menor

$$\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}$$

(señalando entre paréntesis las líneas cuyos elementos se añaden) podrían ser:

$$\begin{pmatrix} (15) & 7 & (6) \\ (10) & -1 & (14) \\ 5 & -13 & 0 \end{pmatrix}$$

(5ª fila y 3ª columna)

$$\begin{pmatrix} (2) & 3 & 0 \\ (15) & -3 & (6) \\ (10) & -6 & (14) \end{pmatrix}$$

(1ª fila y 4ª columna)

$$\begin{pmatrix} (15) & (6) & -2 \\ 9 & 11 & -9 \\ (10) & (14) & -7 \end{pmatrix}$$

(3ª fila y 6ª columna)

Y en forma análoga para menores de orden superior.

Es obvio, en nuestro ejemplo, que los menores de quinto orden que pueden construirse no pueden ser orlados, pues se necesitaría una sexta fila para tal fin.

Propiedad

Si una fila de una matriz es producto de otra o combinación lineal de otras, los determinantes de los menores que contengan los elementos de todas esas filas son nulos.

Recíprocamente, si los determinantes de todos los menores que se obtienen orlando un cierto menor de filas linealmente independientes son nulos, la fila que se utilizó para orlar el menor es combinación lineal de las filas que lo integran.

Característica de una matriz

Es el orden del mayor determinante no nulo que puede formarse con las filas y las columnas de la matriz.

Cálculo de la característica de una matriz

Para calcular la característica de una matriz procederemos de la siguiente forma:

Eliminamos, en primer lugar, todas aquellas filas que, por simple inspección, sean producto de otra o combinación lineal de otras.

A continuación pasamos a estudiar la matriz resultante de esta eliminación. Tomamos como referencia la primera fila y la consideramos como fila independiente, con lo que la característica de la matriz es, como mínimo, 1.

Tratamos entonces de localizar un menor de segundo orden no nulo con los elementos de las dos primeras filas. Apenas localizamos uno, concluimos que la segunda fila es también independiente, que la característica de la matriz es, al menos, 2 y pasamos a estudiar la tercera fila. (Si, en cambio, *todos* los menores resultan nulos, concluimos que la segunda fila es producto de la primera, la eliminamos y pasamos a estudiar la fila siguiente como hicimos con la segunda).

Orlando un menor no nulo de segundo orden con elementos pertenecientes a la fila siguiente, tratamos de localizar un menor de tercer orden no nulo. Apenas localizamos uno, concluimos que la fila estudiada es independiente, que la característica es, al menos, 3 y pasamos a estudiar la cuarta fila orlando un menor no nulo de tercer orden. (En caso contrario, es decir, si no localizamos ninguno, concluimos que la fila estudiada es combinación lineal de las anteriores, la eliminamos y repetimos con la fila siguiente lo que hicimos con la recién eliminada).

Siguiendo de esta forma estudiamos todas las filas restantes eliminándolas u obteniendo menores no nulos de orden cada vez mayor hasta llegar a uno que no podamos orlar por no existir más filas. El orden de este último menor no nulo nos dará la característica de la matriz.

Ejemplo 23

Calcular la característica de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 15 & 9 & 4 & -1 & 8 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & -2 & 1 & 15 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Inspeccionando la matriz salta a la vista que la tercera fila es la suma de las dos primeras: siendo combinación lineal de ellas, podemos eliminarla. Si existen otras filas que sean combinación lineal no es fácilmente detectable, por lo que pasamos a estudiar la matriz.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & -2 & 1 & 15 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{IND}$$

2) Tomamos la primera fila como referencia y tratamos de localizar con los elementos de la segunda un menor no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Hemos localizado un menor de segundo orden no nulo, por lo que concluimos que la característica es, por lo menos, 2 y que la fila estudiada es independiente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & -2 & 1 & 15 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \end{matrix}$$

3) Tomamos el menor no nulo de segundo orden obtenido y lo orlamos con los elementos de la tercera fila y, sucesivamente, de las restantes columnas tratando de localizar un menor no nulo de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Habiendo localizado un menor de tercer orden no nulo, concluimos que la característica de la matriz es, como mínimo, 3 y que la fila estudiada es independiente.

4) Tomamos el menor de tercer orden y lo orlamos con los elementos de la cuarta fila y, sucesivamente, las restantes columnas tratando de localizar un menor no nulo de cuarto orden:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 10 & -22 & -2 & 1 & 15 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \end{matrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 10 & 3 \\ 3 & -4 & 13 & 2 \\ 0 & 10 & -22 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 10 & 1 & 15 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Completamos el estudio de la cuarta fila con todas las columnas disponibles y no localizamos ningún menor de cuarto orden distinto de cero. Concluimos que la cuarta fila es combinación lineal de las anteriores y la eliminamos.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \end{matrix}$$

Repetimos el paso 4 con la siguiente fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & 10 & 3 \\ 3 & -4 & 13 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

La característica de la matriz es, al menos, 4 y la cuarta fila es independiente.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{JND} \\ \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \end{matrix}$$

6) Estudiamos la fila siguiente orlando el menor de cuarto orden con ella:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$$

La característica es, al menos, 5 y la fila estudiada es independiente.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 & 6 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \\ \longrightarrow \text{IND} \end{matrix}$$

7) Estudiamos la última fila orlando el menor de quinto orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 10 & 6 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 13 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 13 & 0 & -11 & 0 \end{vmatrix} = 1944 \neq 0$$

La última fila es también independiente y la característica de la matriz es 6. Este resultado es definitivo, pues no hay más filas para poder obtener un menor de séptimo orden.

Característica = 6

Ejercicio 170

Calcular la característica de las siguientes matrices:

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & -6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & -2 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & -2 & 5 & 5 & 11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 \\ -2 & 6 & -8 \\ 1 & -3 & 4 \\ -5 & 15 & -20 \\ 4 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 & 6 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & -2 & -1 & 5 & -3 \\ 5 & -6 & 0 & -5 & 5 & 8 & -6 \\ -7 & 9 & 0 & 7 & -4 & -13 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -9 & 10 & 11 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Discusión de sistemas de ecuaciones lineales

Los sistemas de ecuaciones lineales con los que hemos trabajado hasta el presente han sido sistemas con un número igual de incógnitas que de ecuaciones y con una solución única.

Sin embargo no siempre es así. Ya en alguna rara oportunidad nos hemos encontrado con sistemas que no tenían solución (Ejercicio 159, N^{os} 3 y 7). En lo sucesivo esta circunstancia será mucho más frecuente.

La única forma que tenemos hasta este momento para saber que un sistema no tiene solución es ponernos a resolverlo y constatar, a cierto punto, que no hay salida o que se origina una situación absurda.

Esta parte de nuestro estudio tiene como finalidad la de dotarnos de herramientas que nos permitan conocer previamente si el sistema tiene o no solución y, en caso de tenerla, si ésta es única o hay un número infinito de soluciones.

Un sistema de ecuaciones lineales es *compatible* si tiene solución e *incompatible* en caso contrario.

Un sistema compatible es *determinado* si tiene una única solución e *indeterminado* si tiene infinitas soluciones.

Tal como hicimos al estudiar el método de Gauss (pág. 700 y ss.), a la matriz construida con los coeficientes de las incógnitas la llamaremos *matriz de las incógnitas* y a la matriz que tiene una columna adicional compuesta por los términos independientes, *matriz ampliada*. Designaremos la primera por M y la segunda, por M' .

Si el sistema a estudiar es, por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 8x + 3y - z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

señalaremos la matriz de las incógnitas y la matriz ampliada en un solo esquema de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = M'$$

donde la matriz M está formada por las tres primeras columnas y la matriz M' por las cuatro columnas. Llamaremos h a la característica de la matriz de las incógnitas y h' a la característica de la matriz ampliada.

Teorema de Rouché-Frobenius

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible es que la característica h de la matriz de las incógnitas y la característica h' de la matriz ampliada sean iguales. En tal caso, si la característica es igual al número de incógnitas, el sistema es determinado y admite una única solución; si es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado y admite infinitas soluciones.

En resumen:

- 1) Si $h < h'$ → el sistema es incompatible (no hay solución)
- 2) Si $h = h'$ → el sistema es compatible

En tal caso:

- $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } h = \text{número de incógnitas} & \rightarrow \text{El sistema es determinado} \\ & \text{(solución única)} \\ \text{si } h < \text{número de incógnitas} & \rightarrow \text{El sistema es indeterminado} \\ & \text{(infinitas soluciones)} \end{array} \right.$$

No puede darse el caso de que h sea mayor que h' pues todo menor no nulo de M pertenece también a M' .

Ejemplo 24

Discutir y, si es posible, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 8x + 3y - z = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Construimos la matriz de las incógnitas y la ampliada:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = M'$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda tratando de localizar un menor no nulo de segundo orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

La segunda fila es independiente y la característica, al menos, 2.

Pasamos a estudiar la tercera tratando de localizar un menor no nulo de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 8 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

No podemos en M y con estas filas obtener un menor no nulo de tercer orden. Verificamos si es posible en M' :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

La tercera fila es combinación lineal de las dos primeras. La eliminamos y pasamos a estudiar la última fila, que pasa a ser la tercera:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \\ 8 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{C. L.}} M'$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

La característica es, en definitiva:

$$h = h' = 3$$

El sistema, eliminando la tercera ecuación que es combinación lineal de las primeras, queda reducido al siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + 3y - 2z = 1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

y, dado que la característica es igual al número de incógnitas, el sistema es determinado.

Resuelto por cualquiera de los métodos conocidos, se obtiene la solución única:

$$(1, -2, -3)$$

Ejemplo 25

Discutir y, si es posible, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4v = 1 \\ 3x + 2y + z - v = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 2z - 5v = 3 \end{cases}$$

Construimos las matrices M y M' :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = M'$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

La segunda fila es independiente y la característica, al menos, 2.

Estudio de la tercera (orlamos el menor con la tercera fila):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

La tercera fila es independiente y la característica, al menos, 3.

Estudio de la cuarta (orlamos el menor con la cuarta fila):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Concluimos que, en definitiva, h es 3, ya que no tenemos más filas o columnas en M para orlar el menor de tercer orden.

$$h = 3$$

Verificamos si es posible obtener un menor no nulo de cuarto orden en M' . Orlamos el menor con la última columna de M' :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$$

Concluimos que

$$h' = 4$$

y como

$$h < h' \rightarrow \text{el sistema es incompatible}$$

Ejemplo 26

Discutir y, si es posible, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 9y - 3z + 6v = 7 \\ -2x - 6y + 2z - 4v = 5 \\ x + 2y + 3v = 1 \\ 2x + 11y + 8z - v = 3 \end{cases}$$

Construimos las matrices M y M' :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 & 6 \\ -2 & -6 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 11 & 8 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} = M'$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

No es posible localizar en M , con estas filas, un menor no nulo de segundo orden.

Verificamos si es posible en M' :

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 29 \neq 0$$

Obtuvimos un menor no nulo. Tenemos que concluir que, para las dos primeras filas, $h = 1$ y $h' = 2$. Siendo h menor que h' , las dos primeras ecuaciones del sistema son incompatibles. Esto hace que el sistema completo sea incompatible y, en consecuencia, es innecesario continuar el estudio.

$h < h' \rightarrow$ el sistema es incompatible

Ejemplo 27

Discutir y, si es posible, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 5 \\ x + 3y - 6z = 4 \\ 12x + y + 3z = 13 \\ x - 4y + 9z = -3 \end{cases}$$

La tercera ecuación es la diferencia entre la segunda y la primera y, por tanto, combinación lineal de ellas. Eliminamos, pues, la tercera ecuación. (Si no hubiéramos advertido esto desde el principio, lo hubiéramos descubierto después haciendo el estudio de cada fila).

Construimos las matrices M y M' sin los elementos de la tercera fila, pues ya sabemos que es combinación lineal:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 12 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ -3 \end{pmatrix} = M'$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

La segunda es independiente y la característica, al menos,

2. Estudiamos la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 12 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Orlando con la tercera fila no se obtiene en M un menor no nulo de tercer orden. Probamos en M' :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 12 & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

La tercera fila también es combinación lineal y la eliminamos. Estudiamos la cuarta:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Concluimos que, definitivamente,

$$h = 2$$

pues no hay más filas en M para orlar el menor de segundo orden.

Orlamos con la cuarta columna de M' :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

En conclusión

$$h' = 2$$

$h = h' \rightarrow$ el sistema es compatible

$h < \text{N}^\circ \text{ de incógnitas} \rightarrow$ el sistema es indeterminado

El sistema, después de las eliminaciones hechas, quedó reducido al siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 3z = 5 \end{cases}$$

Para resolver sistemas indeterminados se acostumbra hacer cuanto sigue:

Se toman como incógnitas principales tantas como ecuaciones haya y en el mismo orden de aparición (a menos que el determinante de sus coeficientes sea nulo: ver ejemplo 28). A las restantes se les da el tratamiento de parámetros y los términos que las contienen se trasponen al miembro de la derecha.

En nuestro caso tomamos dos incógnitas como principales:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 - 3z \\ 3x + 2y = 5 + 3z \end{cases}$$

El sistema de k ecuaciones y k incógnitas resultantes se resuelve por cualquiera de los métodos conocidos. (En nuestro ejemplo utilizaremos el de reducción).

Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando miembro a miembro:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 - 6z \\ 3x + 2y = 5 + 3z \\ \hline 5x = 7 - 3z \end{cases}$$

$$x = \frac{7 - 3z}{5}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$2\left(\frac{7 - 3z}{5}\right) - y = 1 - 3z$$

De donde:

$$y = \frac{9 + 9z}{5}$$

Y la solución del sistema es:

$$\left(\frac{7 - 3z}{5}, \frac{9 + 9z}{5}, z\right)$$

Ejemplo 28

Discutir y, si es posible, resolver:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z + 2v = 1 \\ 2x + 6y - 2z + 3v = 2 \\ x + 3y + 5z = 1 \\ x + 3y + z + v = 1 \\ 4z - v = 0 \end{cases}$$

Construimos las matrices M y M' :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M'$$

Nótese, antes de realizar el estudio, que la segunda *columna* es proporcional a la primera y que la de los términos independientes es idéntica a la primera.

Eso significa que nunca podremos obtener un menor no nulo de quinto orden en M' y tampoco un menor no nulo de cuarto orden ni en M , ni en M' .

La conclusión inmediata es que la cuarta y la quinta filas son combinación lineal de las anteriores y podemos eliminarlas.

M y M' se reducen, por tanto, de la siguiente forma:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = M'$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

La segunda fila es independiente y la característica, al menos, 2.

Pasamos a estudiar la tercera fila (no orlamos el menor con los elementos de la segunda columna por los motivos antes expuestos):

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En definitiva:

$$h = h' = 2 < N^{\circ} \text{ de incógnitas}$$

→ El sistema es compatible indeterminado

(No hemos orlado con la columna de los términos independientes pues, si en M no hemos conseguido un menor no nulo, utilizando una columna idéntica a la primera tampoco lo obtendremos).

El sistema se reduce, pues, a las dos primeras ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 3y - 3z + 2v = 1 \\ 2x + 6y - 2z + 3v = 2 \end{cases}$$

Dado que el determinante de los coeficientes de x y de y es nulo, tomaremos como incógnitas principales la x y la z trasponiendo las otras al miembro de la derecha:

$$\begin{cases} x - 3z = 1 - 3y - 2v \\ 2x - 2z = 2 - 6y - 3v \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -2 y sumando:

$$\begin{cases} -2x + 6z = 2 + 6y + 4v \\ 2x - 2z = 2 - 6y - 3v \end{cases}$$

$$\hline 4z = \quad \quad v$$

$$\boxed{z = \frac{v}{4}}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x - 3\left(\frac{v}{4}\right) = 1 - 3y - 2v$$

$$\boxed{x = 1 - 3y - \frac{5v}{4}}$$

Solución del sistema:

$$\boxed{\left(1 - 3y - \frac{5v}{4}, y, \frac{v}{4}, v\right)}$$

Ejemplo 29

Determinar cuál debe ser el valor de k para que el siguiente sistema sea compatible determinado y resolverlo:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 13 \\ 2x + y + kz = -4 \\ x - 2y - 2z = 7 \\ 3x - y + z = k \end{cases}$$

Construimos las matrices M y M' colocando de primeras las filas que en M no tienen el parámetro k :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 13 \\ 1 & -2 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & k \\ 2 & 1 & k & -4 \end{pmatrix} = M'$$

Estudiamos, en primer lugar, si las tres primeras filas son independientes.

Tomamos la primera como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

La segunda es independiente y la característica, por ahora, es 2.

Estudio de la tercera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -21 \neq 0$$

La tercera es independiente y, definitivamente,

$$h = 3$$

Razonamiento: para que el sistema sea compatible h' debe ser igual a h , es decir, a 3, y, para que esto ocurra, la cuarta fila debe ser combinación lineal.

En consecuencia, debe ser nulo el siguiente menor de cuarto orden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 13 \\ 1 & -2 & -2 & 7 \\ 3 & -1 & 1 & k \\ 2 & 1 & k & -4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$3(k-3)(k-24) = 0$$

ecuaciones cuyas raíces son:

$$k_1 = 3$$

$$k_2 = 24$$

Si el parámetro k toma esos valores, la cuarta fila es combinación lineal de las otras y puede ser eliminada.

Resolución del sistema

Para $k = 3$, el sistema es

$$\begin{cases} x + y - 2z = 13 \\ x - 2y - 2z = 7 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

y la solución:

$$(3, 2, -4)$$

Para $k = 24$, el sistema es

$$\begin{cases} x + y - 2z = 13 \\ x - 2y - 2z = 7 \\ 3x - y + z = 24 \end{cases}$$

y la solución:

$$(9, 2, -1)$$

Ejemplo 30

Determinar qué valores deben tomar m y n para que el siguiente sistema sea compatible y resolverlo:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ mx - ny = -11 \\ x + 2y = 13 \\ nx - (4 + m)y = -23 \end{cases}$$

Construimos las matrices M y M' colocando de primeras las filas que no contienen el parámetro k :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ m & -n \\ n & -4 - m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \\ -11 \\ -23 \end{pmatrix} = M'$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

La segunda también es independiente.

Razonamiento: siendo independientes las dos primeras ecuaciones, es condición indispensable que las dos ecuaciones que contienen parámetros sean combinación lineal.

En consecuencia, deben ser nulos los siguientes menores:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \\ m & -n & -11 \end{vmatrix} \quad y \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 13 \\ n & -4-m & -23 \end{vmatrix}$$

Desarrollando el primero e igualando a cero:

$$-15m + 25n - 55 = 0$$

Simplificando:

$$3m - 5n = -11 \quad (I)$$

Desarrollando el segundo e igualando a cero:

$$25m - 15n - 15 = 0$$

Simplificando:

$$5m - 3n = 3 \quad (II)$$

Formamos un sistema con las ecuaciones I y II:

$$\begin{cases} 3m - 5n = -11 \\ 5m - 3n = 3 \end{cases}$$

sistema cuya solución es:

$$\boxed{m = 3} \quad \boxed{n = 4}$$

Si los parámetros toman estos valores el sistema queda reducido a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$\boxed{(3, 5)}$$

Ejemplo 31

Determinar el valor que debe tomar k para que el siguiente sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} kx + 2y - z + v = 2 \\ x + y - 2z = -1 \\ kx + y + z + v = 1 \\ ky - 2z + v = 2 \end{cases}$$

Construimos M y M' :

$$M = \begin{pmatrix} k & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = M'$$

Razonamiento: el sistema sólo

será incompatible si $h < h'$, es decir, si el menor de cuarto orden en M es nulo y en M' no lo es.

Buscaremos, pues, el valor de k que anula el primero y verificaremos si hace distinto de cero al segundo.

$$\begin{vmatrix} k & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ k & 1 & 1 & 1 \\ 0 & k & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante se obtiene:

$$2k^2 + k - 3 = 0$$

ecuación que da dos valores para k :

$$k_1 = -\frac{3}{2}$$

$$k_2 = 1$$

Con estos valores sabemos que $h < 4$.

Calculamos h' :

Para $k = -\frac{3}{2}$:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Para $k = 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$$

En conclusión, ambos valores obtenidos para k hacen que h sea menor que h' y el sistema, por tanto, incompatible.

Ejercicio 171

Discutir y, si es posible, resolver los siguientes sistemas:

$$1) \begin{cases} x - y + z = 9 \\ x + y - 2z = -3 \\ 2x - 5y - z = 21 \\ 5x + y - 4z = 9 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2z = 7 \\ 3x + 4y + 3z = 7 \\ x + 3y + 7z = -8 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x + y - z = 9 \\ x + 3y - z = 7 \\ 2x - y - z = 5 \\ 7x - 11y + z = 2 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 8x - 4y + 6z = -1 \\ 12x - 6y + 9z = 4 \\ x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x + y - 3z = 11 \\ 3x - 2y - z = 13 \\ 5x + 6y - 11z = 31 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 4y - z = 20 \\ x + 2y + 7z = 25 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x + z + v = 0 \\ x - y - 2v = 6 \\ x + y + z - v = 3 \\ x + z + 2v = -2 \\ x - 2y - z - 5v = 12 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} x - y + z - v = 1 \\ 2x - y - 2v = 3 \\ x + y + z - v = -1 \\ 3x + 7y - v = 0 \\ x - z - v = 2 \\ x - 2y + 3z - v = 0 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x - 2y + z + 2v = 6 \\ 2x - y - 2z - v = 3 \\ x - 3y + z - v = 1 \\ 5x - y - 7z - 5v = 3 \\ 4x + y - 8z - 7v = 5 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x + z - v = -2 \\ 2x - y - z - 2v = 2 \\ x - y - 2z - v = 4 \\ 3x - 2y - 3z - 3v = 6 \\ y + 3z = -6 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x + 2y - z + 3v + w = 4 \\ 2x + y + 2v + 3w = -2 \\ x - y + z - v + 2w = 5 \\ x + y + z + v = 3 \\ x - 3y - z - 3w = 7 \end{cases}$$

Hallar el valor de k para que los siguientes sistemas sean compatibles determinados y resolverlos:

$$12) \begin{cases} x + y - 2z = 11 \\ 2x + 3y - z = 21 \\ x - ky - z = -k \\ 4x + 7y + kz = 41 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x + ky - z = -5 \\ 3x + 2y - z = 1 \\ 5x - kz = 3 \\ 2ky - kz = -16 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 4x + ky = 7 \\ x + y = k \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x + y = 1 \\ 8x + ky = 23 \\ (k-1)x + 3y = -1 \\ (k+2)x + ky = 11 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x + 5y + 3z = 2 \\ x + (k-3)y + (k+1)z = 2k - 4 \end{cases}$$

Hallar el valor de k para que los siguientes sistemas sean compatibles indeterminados y resolverlos:

$$17) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 3 \\ x - 2ky + (k+3)z = -6 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 2x - y - z + v = 3 \\ x + z - v = 0 \\ 3x - 2y + z - 2v = -3 \\ (k-1)x - 3y - kz + kv = 9 \end{cases}$$

Hallar el valor de k que hace incompatibles los siguientes sistemas:

$$19) \begin{cases} x + 2y - kz = 1 \\ 2x + (k+3)y - z = 5 \\ (k-1)y - 7z = -21 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} kx + y - z - v = 2 \\ 2x - y + kz - v = 3 \\ 2x + ky - z - 2v = 4 \\ kx - 2y + 2z = 5 \end{cases}$$

Hallar los valores de m y n que hacen indeterminado el siguiente sistema y resolverlo:

$$21) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x + 2y - 2z = 2 \\ mx + (n+3)y + z = 3 \\ mx + 2ny + 8z = 0 \end{cases}$$

Discutir, según los valores que puede tomar k , los siguientes sistemas:

$$22) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 2x + 5y - z = 6 \\ 4x - ky + (k-1)z = 3 \\ 2x - 19y + kz = -3 \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 3v = 0 \\ 3x - y + 2z - 5v = -1 \\ x + (k-1)y - z - kv = -1 \\ x - 3y + (k+2)z - v = -1 \\ 4y - 5z + (1-k)v = -2 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 4x - ky + kz = 13 \\ x + ky = k + 2 \end{cases}$$

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas

Son sistemas de ecuaciones lineales homogéneas (o, más brevemente, sistemas homogéneos) aquellos sistemas cuyas ecuaciones tienen todas el término independiente nulo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \dots = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots = 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{cases}$$

Como los términos independientes son todos nulos, nunca podrá ser h' mayor que h y, en consecuencia, *estos sistemas son siempre compatibles*.

Una solución evidente, común a todos los sistemas homogéneos, es $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, etc. Esta solución recibe el nombre de *solución trivial*.

En el estudio de los sistemas homogéneos sólo pueden presentarse dos casos:

1) Si h es igual al número de incógnitas, el sistema es determinado y admite una única solución: la trivial.

2) Si h es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado y admite infinitas soluciones.

Por todo lo dicho anteriormente, en el estudio de los sistemas homogéneos trabajaremos sólo con la matriz de las incógnitas y no con la ampliada.

Resolución de sistemas homogéneos indeterminados

Los sistemas homogéneos indeterminados pueden ser resueltos como los sistemas indeterminados no homogéneos estudiados con anterioridad.

Sin embargo, para el caso de que la diferencia de h y el número de incógnitas sea 1 ($h = N^\circ$ de incógnitas $- 1$), puede utilizarse el siguiente criterio:

Sea el sistema indeterminado

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1v = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2v = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3v = 0 \end{cases}$$

Trasponiendo el último término al miembro de la derecha y dividiendo por v tenemos:

$$\begin{cases} a_1\left(\frac{x}{v}\right) + b_1\left(\frac{y}{v}\right) + c_1\left(\frac{z}{v}\right) = -d_1 \\ a_2\left(\frac{x}{v}\right) + b_2\left(\frac{y}{v}\right) + c_2\left(\frac{z}{v}\right) = -d_2 \\ a_3\left(\frac{x}{v}\right) + b_3\left(\frac{y}{v}\right) + c_3\left(\frac{z}{v}\right) = -d_3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por Cramer se obtiene:

$$\frac{x}{v} = \frac{\Delta_a}{\Delta} \quad \frac{y}{v} = \frac{\Delta_b}{\Delta} \quad \frac{z}{v} = \frac{\Delta_c}{\Delta}$$

igualdades en las que Δ es el determinante de los coeficientes de las nuevas incógnitas y Δ_a , Δ_b y Δ_c los determinantes que se obtienen sustituyendo, respectivamente, la 1ª, 2ª y 3ª columnas por la nueva columna de los términos independientes.

Las igualdades anteriores pueden escribirse así:

$$\frac{x}{\Delta_a} = \frac{v}{\Delta} \quad \frac{y}{\Delta_b} = \frac{v}{\Delta} \quad \frac{z}{\Delta_c} = \frac{v}{\Delta}$$

lo que permite establecer esta cuádruple igualdad:

$$\frac{x}{\Delta_a} = \frac{y}{\Delta_b} = \frac{z}{\Delta_c} = \frac{v}{\Delta}$$

Llamando k el valor de estas relaciones equivalentes, tenemos:

$$\frac{x}{\Delta_a} = \frac{y}{\Delta_b} = \frac{z}{\Delta_c} = \frac{v}{\Delta} = k$$

de donde:

$$\begin{aligned} x &= k \cdot \Delta_a \\ y &= k \cdot \Delta_b \\ z &= k \cdot \Delta_c \\ v &= k \cdot \Delta \end{aligned}$$

Ejemplo 32

Discutir y resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

Construimos M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

La segunda fila es independiente. Orlando el menor, estudiamos la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

La tercera fila es combinación lineal, por lo que la eliminamos. La característica es, en definitiva, 2 y el sistema es indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$$

Trasponiendo al miembro de la derecha el último término de cada ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 3z \\ 2x + y = 4z \end{cases}$$

Cálculo de los determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

En conclusión:

$$x = k \cdot \Delta_a = -5k$$

$$y = k \cdot \Delta_b = -2k$$

$$z = k \cdot \Delta = -3k$$

y la solución del sistema (simplificando):

$$(5k, 2k, 3k)$$

Ejemplo 33

Discutir y resolver:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z + v = 0 \\ 3x + 4y - z + v = 0 \\ x + 6y - 3z + 3v = 0 \\ x - 11z - v = 0 \end{cases}$$

Construimos M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -11 & -1 \end{pmatrix}$$

Tomamos la primera fila como independiente y estudiamos la segunda:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

La segunda fila es independiente. Orlando el menor, estudiamos la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 80 \neq 0$$

La tercera también es independiente. Estudiamos la cuarta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -11 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

La cuarta es combinación lineal y se elimina: $h = 3$ y el sistema es indeterminado.

Trasponiendo de una vez el último término y eliminando la cuarta ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = -v \\ 3x + 4y - z = -v \\ x + 6y - 3z = -3v \end{cases}$$

Cálculo de los determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 80$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -1 \\ -3 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 36$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -48$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -3 \end{vmatrix} = -4$$

En conclusión:

$$x = k \cdot \Delta_a = 36k$$

$$y = k \cdot \Delta_b = -48k$$

$$z = k \cdot \Delta_c = -4k$$

$$v = k \cdot \Delta = 80k$$

La solución del sistema es (después de simplificar):

$$(9k, -12k, -k, 20k)$$

Ejemplo 34

Discutir y resolver:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + v = 0 \\ x + 2y + 2z - v = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \\ x - 8y + 5v = 0 \end{cases}$$

Construimos M :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La tercera fila es la suma de las dos primeras; podemos, pues, eliminarla:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Estudio de la segunda:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

La segunda es independiente. Estudio de la tercera:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

La tercera es combinación lineal y la eliminamos.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + v = 0 \\ x + 2y + 2z - v = 0 \end{cases}$$

El sistema es indeterminado, pero como la diferencia entre h y el número de incógnitas es 2, procederemos como lo hacíamos con los sistemas indeterminados no homogéneos.

Tomamos x y y como incógnitas principales y trasponemos las otras:

$$\begin{cases} 2x - y = -3z - v \\ x + 2y = -2z + v \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por 2 y sumando:

$$\begin{cases} 4x - 2y = -6z - 2v \\ x + 2y = -2z + v \\ \hline 5x = -8z - v \end{cases}$$

$$x = \frac{-8z - v}{5}$$

Sustituyendo en la primera:

$$2\left(\frac{-8z - v}{5}\right) - y = -3z - v$$

$$y = \frac{-z + 3v}{5}$$

Solución del sistema:

$$\left(\frac{-8z - v}{5}, \frac{-z + 3v}{5}, z, v \right)$$

Ejemplo 35

Discutir y resolver:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ 3x - y - z = 0 \\ 5x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

Construimos M :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudio de la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

La segunda es independiente. Estudio de la tercera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 120 \neq 0$$

La tercera fila es también independiente y $h = 3$.

Siendo h igual al número de incógnitas, el sistema es determinado y admite sólo la solución trivial:

Solución trivial: $(0, 0, 0)$

Ejemplo 36

Hallar el valor de m para que el siguiente sistema tenga otras soluciones distintas de la trivial y resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \\ 6x - 4y + mz = 0 \end{cases}$$

Construimos M :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & m \end{pmatrix}$$

Estudio de la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

La segunda fila es independiente.

Razonamiento: para que el sistema admita otras soluciones, además de la trivial, h debe ser menor que 3. Es necesario, por tanto, que

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & -4 & m \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo:

$$8m - 136 = 0$$

de donde:

$$m = 17$$

Para $m = 17$ la tercera ecuación es combinación lineal y el sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

Trasponiendo el último término:

$$\begin{cases} 3x + 2y = -5z \\ 2x + 4y = -z \end{cases}$$

Cálculo de los determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 8$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -18$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7$$

$$x = k \cdot \Delta_a = -18k$$

$$y = k \cdot \Delta_b = 7k$$

$$z = k \cdot \Delta = 8k$$

Solución del sistema:

$$(-18k, 7k, 8k)$$

Ejercicio 172

Discutir y resolver los siguientes sistemas:

$$1) \begin{cases} x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + 2y - 7z = 0 \\ 5x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 4x + y - 3z + 2v = 0 \\ 2x + 2y - z + 3v = 0 \\ 3y + z + 4v = 0 \\ 2x - 4y - 3z - 5v = 0 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x + y + z + v = 0 \\ 2x + y + 2z - v = 0 \\ x + 3z + v = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x - y + z - v = 0 \\ x - 2y + 3z - 2v = 0 \\ 2x + 3y - z + v = 0 \\ x + y - 3z + v = 0 \\ x - 5y + 9z - 5v = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x + 2z - 3v = 0 \\ 2x + y - v = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ x + 2y - 6z + 7v = 0 \\ x - 2y + 10z - 13v = 0 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x + 2y - 2z + v = 0 \\ x + y + z - 2v = 0 \\ x + y - 11z + 13v = 0 \\ x + y - 7z + 8v = 0 \\ x + y + 9z - 12v = 0 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x + 3y + 2z + 3v = 0 \\ 2x + 4y + z + 2v = 0 \\ x + 3y + z + v = 0 \\ 2x - 8y + 3z + 2v = 0 \\ 6z - v = 0 \end{cases}$$

- 9) Hallar el valor de k para que el siguiente sistema admita sólo la solución trivial:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ 4x + y + kz = 0 \end{cases}$$

- 10) Hallar k para que el siguiente sistema sea indeterminado y resolverlo:

$$\begin{cases} kx + 4y - 5z = 0 \\ 2x + 3y - 6z = 0 \\ x + 3kz = 0 \end{cases}$$

- 11) Hallar k para que el siguiente sistema sea determinado:

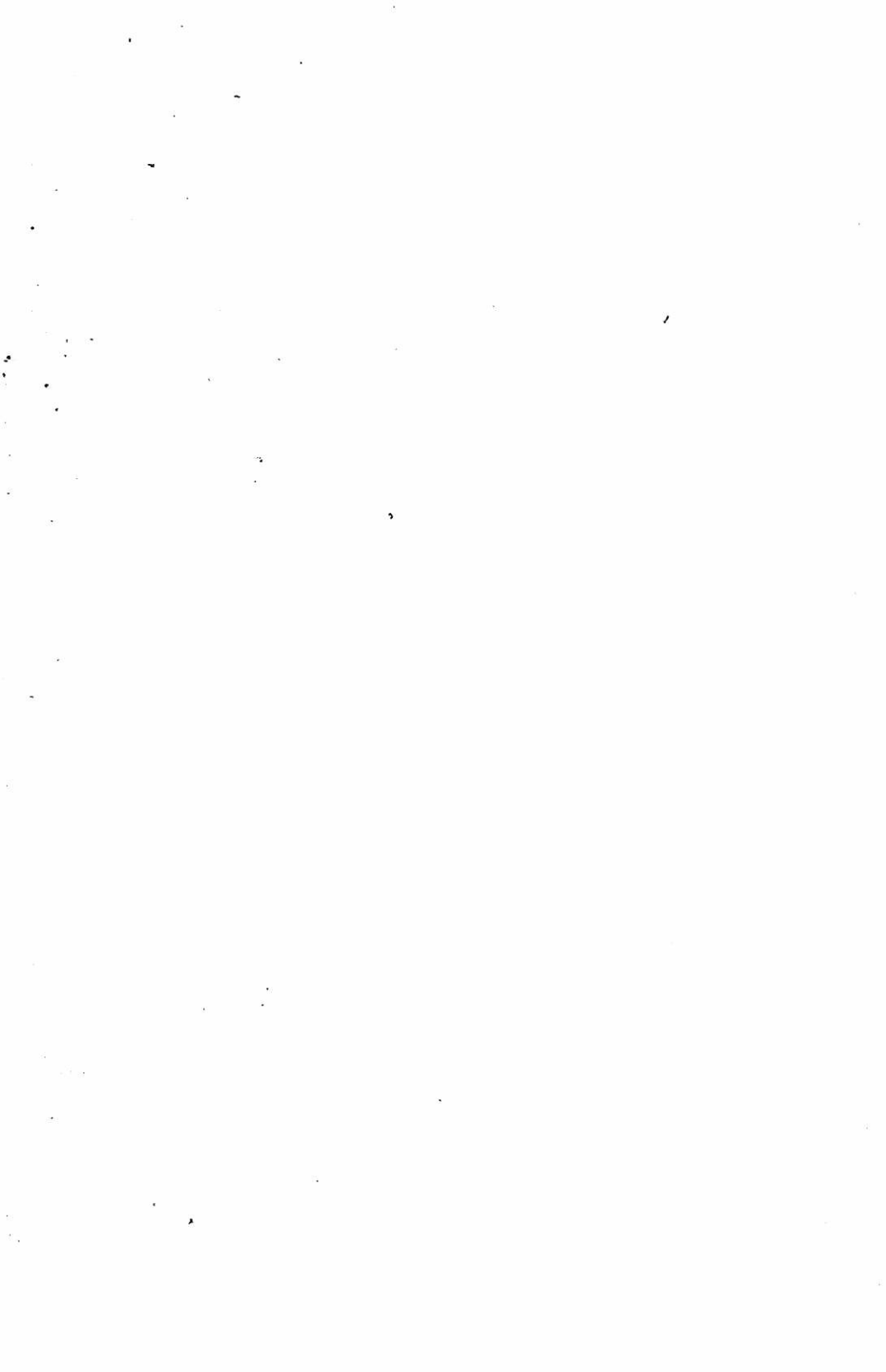
$$\begin{cases} kx + 5y + z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = 0 \\ x - 8y + kz = 0 \end{cases}$$

- 12) Hallar m y n para que el siguiente sistema sea indeterminado y resolverlo:

$$\begin{cases} 2x + 5y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \\ x + (2m - 3)y + (n + 2)z = 0 \\ 2x + (3m - 1)y + (n + 1)z = 0 \end{cases}$$

- 13) Hallar k para que el siguiente sistema admita sólo la solución trivial:

$$\begin{cases} 3x + y + kv = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 4x - 2ky + z + 3v = 0 \\ kx - 2y + z + v = 0 \end{cases}$$



CIRCUNFERENCIA

A continuación aparecen simplemente enunciados algunas definiciones y teoremas relativos a las circunferencias o sus elementos.

- 1) El radio (o el diámetro) es perpendicular a la tangente en el punto de tangencia.
- 2) El radio (o el diámetro) es perpendicular a la cuerda en su punto medio.
- 3) *Circunferencia circunscrita*: es la que pasa por todos los vértices de un polígono (Fig. 1).

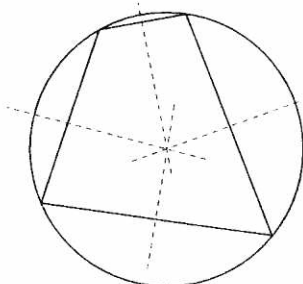


Fig. 1

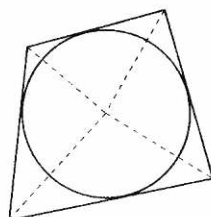


Fig. 2

- 4) *Circuncentro*: es el centro de la circunferencia circunscrita. Es el punto de intersección de las mediatrices de los lados del polígono.

- 5) *Circunferencia inscrita*: es la que es tangente a todos los lados del polígono (Fig. 2).

- 6) *Incentro*: es el centro de la circunferencia inscrita. Es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos internos del polígono.

- 7) *Circunferencia ex-inscrita a un triángulo*: es una circunferencia exterior a él y que es tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos (Fig. 3).

- 8) *Ex-incentro*: es el centro de la circunferencia ex-inscrita. Es el punto de corte de la bisectriz de un ángulo interno y las bisectrices de los ángulos exteriores no adyacentes a él.

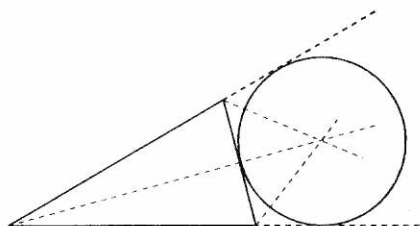


Fig. 3

9) *Circunferencias concéntricas*: son las que tienen el mismo centro.

10) *Puntos diametralmente opuestos*: son dos puntos de una circunferencia separados por la distancia de un diámetro (son los extremos de ese diámetro).

11) *Puntos concíclicos*: los que pertenecen a una misma circunferencia.

12) *Ángulo central*: aquél cuyo vértice coincide con el centro de la circunferencia (Fig. 4).

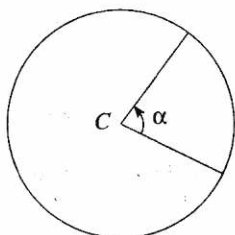


Fig. 4

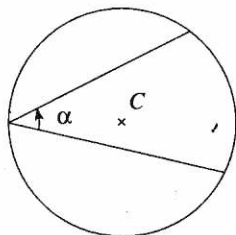


Fig. 5

13) *Ángulo inscrito*: es el que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados la cortan (Fig. 5).

14) La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del ángulo central que comprende el mismo arco (Figs. 6 y 7).

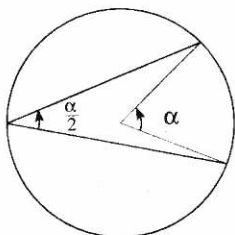


Fig. 6

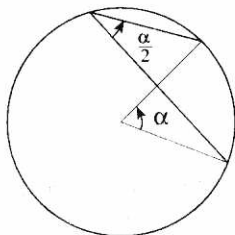


Fig. 7

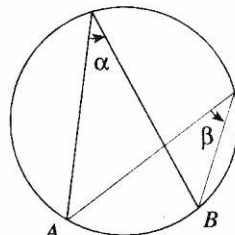


Fig. 8

15) Todos los ángulos inscritos que comprenden un mismo arco son iguales. En la Fig. 8, $\alpha = \beta$.

16) *Ángulo semi-inscrito*: es el que tiene su vértice en la circunferencia siendo uno de sus lados secante y el otro tangente a dicha circunferencia (Fig. 9).

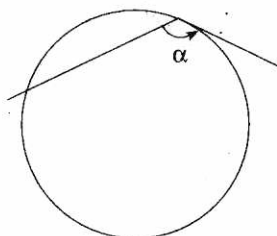


Fig. 9

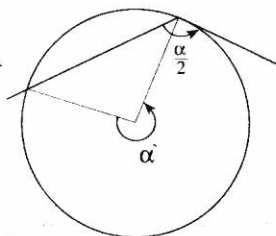


Fig. 10

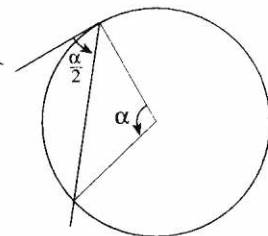


Fig. 11

17) La medida del ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del ángulo central que comprende el mismo arco (Figs. 10 y 11).

18) *Angulo exterior a una circunferencia*: es el que tiene su vértice fuera de la circunferencia y sus lados secantes o tangentes a ella (Fig. 12).

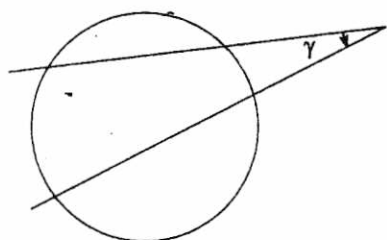


Fig. 12

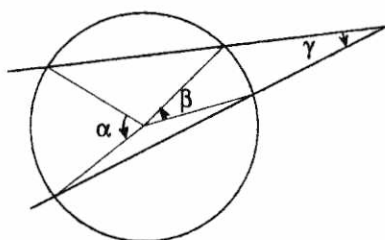


Fig. 13,

19) La medida del ángulo exterior es igual a la semidiferencia de los ángulos centrales correspondientes. En la Fig. 13, $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

20) *Angulo interior de una circunferencia*: es el que tiene su vértice en el círculo (Fig. 14).

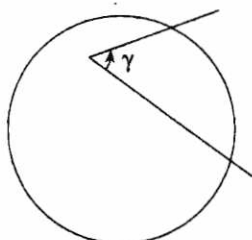


Fig. 14

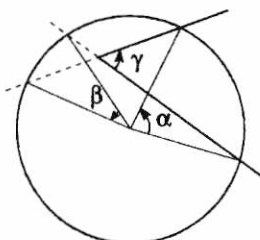


Fig. 15

21) La medida de un ángulo interior es igual a la semisuma de los ángulos centrales correspondientes. En la Fig. 15, $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

22) *Angulo entre una circunferencia y una recta que la corta*: es el que forma la recta con la tangente a la circunferencia en el punto de intersección (Fig. 16).

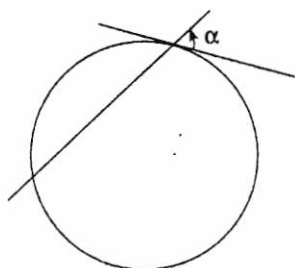


Fig. 16

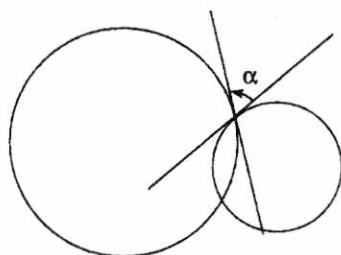


Fig. 17

23) *Angulo entre dos circunferencias*: es el ángulo comprendido entre sus respectivas tangentes en el punto de intersección (Fig. 17).

24) *Circunferencias ortogonales*: dos circunferencias son ortogonales si el ángulo que forman es recto.

25) *Flecha*: es la porción del radio perpendicular a una cuerda, comprendida entre la cuerda y el arco que ésta subtiende (Fig. 18).

26) En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, dos cuerdas iguales están a igual distancia del centro y, recíprocamente, dos cuerdas equidistantes del centro son iguales.

27) En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, de dos cuerdas desiguales, la mayor está más próxima al centro.

28) La cuerda mínima que pasa por un punto interior a una circunferencia es la perpendicular al diámetro (al radio) que pasa por dicho punto.

29) En una misma circunferencia o en circunferencias iguales, dos cuerdas iguales subtienden arcos iguales y, recíprocamente, dos arcos iguales subtienden cuerdas iguales.

30) Los arcos comprendidos entre dos cuerdas paralelas de una circunferencia son iguales.

31) *Recta normal*: es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia y es, por tanto, la prolongación del diámetro en dicho punto.

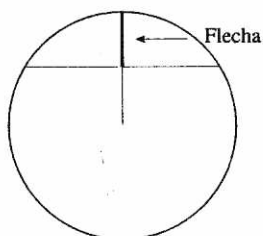


Fig. 18

1

- 1) $6x^6 + 17x^5 + 2x^4 - 43x^2 + 10x - 59$
- 2) $-x^3 + 3x^2 + 7$
- 3) $6x^6 + 19x^5 + 3x^4 - 8x^3 - 9x^2 - 23x - 59$
- 4) $4x^5 + 4x^4 - 5x^3 + 47x^2 - 27x + 42$
- 5) $2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 5x + 1$
- 6) $x^5 - x^4 + 11x^3 - 30x^2 + 32x - 1$
- 7) $8x^5 + 9x^4 - 38x^3 - 26x^2 - 11x - 70$
- 8) $Q_{(x)} = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$;
 $R_{(x)} = x - 2$
- 9) $Q_{(x)} = 3x^3 + x^2 - 9$; $R = 0$
- 10) $Q_{(x)} = 2x + 3$; $R_{(x)} = -5x - 17$
- 11) $Q_{(x)} = 2x^2 + 9x + 17$; $R = 41$
- 12) $Q = 2$; $R_{(x)} = -10x^2 - 13$

2

- 1) $3x^2 + 4x - 3$; 1
- 2) $5x^3 - 15x^2 + 2x - 2$; 10
- 3) $x^3 - 2$; -2
- 4) $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$; 0
- 5) $3x^3 + 6x^2 + 6x + 12$; 3
- 6) $6x^3 + 9x^2 - 3x - 15$; 0
- 7) $4x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{4}$; $\frac{5}{8}$
- 8) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{15}{8}$; $\frac{1}{16}$
- 9) $x^4 + \sqrt{2}x^3 - 3x^2 - 3\sqrt{2}x + 5$; $10\sqrt{2}$
- 10) $x^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{9}$; $-\frac{11}{9}$
- 11) $3x^4 - 9\sqrt{2}x^3 + x^2 - \sqrt{2}x - 1$; $4\sqrt{2}$
- 12) $x^4 - ax^3 - 2x - 4a$; $1 - 4a^2$
- 13) $2x^2 + mx + am - 1$; m
- 14) $2Z^3 + iZ^2 + 3$; i
- 15) $Z^4 + (1-i)Z^3 + (1-4i)Z^2 + (2-2i)Z + 2$; 0
- 16) $(1+i)Z^2 + (2+3i)Z + 1 + 2i$; -1
- 17) $(1+2i)Z^2$; $-6+4i$
- 18) $2Z^2 + (4-2i)Z + 2 + 4i$; 0
- 19) $3x^4 - x^2 + 5$; 2
- 20) $x^{10} + x^5 - 6$; 5
- 21) $2x^{12} + 1$; 1
- 22) $6x^{14} - 4x^7 - 2$; 2
- 23) $3x^9 - 6x^6 + 2x^3 + 3$; 0
- 24) $ax^{12} - ax^6 - a$; $5 - 2a$
- 25) $3x^4 + ax^2 + 6a^2$; 0
- 26) $2Z^6 + (3-2i)Z^3 - 2$; i

- 6) -3
- 7) $\frac{1}{7}$

- 27) $2Z^{16} + (7-3i)Z^8 - 4 - i$; i
- 28) $Z^6 + (1+i)Z^4 + 2Z^2 - 2 + 2i$; 0

3

- 1) $2x^2 + 6x + \frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$
- 2) $3x^3 + x^2 - 1$; 2
- 3) $2x^2 + x + \frac{1}{3}$; $\frac{11}{3}$
- 4) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$; $-\frac{11}{8}$
- 5) $x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - 1$; -13
- 6) $x^3 - 4x - a$; a^2
- 7) $x^2 - ix$; 6
- 8) $\frac{1}{2}x^2 + 6x - 15$; 8
- 9) $3x^2 + \frac{3}{2}x + 1$; 1
- 10) $x^3 + 2x - ab$; $2ab^2$
- 11) $2Z^2 + (1+i)Z + \frac{1}{2}$; $-1+2i$
- 12) $Z^2 + (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i)Z + 1$; $4+2i$
- 13) $(1+i)Z^2 + (1-i)Z + 2i$; 1
- 14) $5x^9 + 10x^6 - 5x^3 + 15$; -5
- 15) $\frac{1}{2}x^{14} - \frac{1}{2}x^7 + \frac{2}{3}$; 1
- 16) $(3-i)Z^2 + (2-i)Z - 3 + 2i$; 0
- 17) $(2-i)Z^3 + (3-2i)Z^2 + (5-i)Z + 4$; $2+i$

4

- 1) 5; 21; 21
- 2) 5; 101; 3
- 3) 8; 19; $-\frac{13}{8}$
- 4) -16; 3-9i; 2i
- 5) 0; -12+4i; $3-3\sqrt{2}$

5

- 1) 1
- 2) -3
- 3) 5
- 4) 2
- 5) 8
- 6) 3-4i

6

- 1) -2
- 2) $\frac{1}{3}$
- 3) 6; -2
- 4) 5; 2
- 5) $\pm\sqrt{5}$
- 2) $3(x+1)^3 - 4(x+1) + 2$

- 8) 5,
- 9) -2
- 10) $-\frac{1}{3}$
- 11) 2; $-\frac{1}{3}$
- 12) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$

7

- 1) (-4, -13)
- 2) (4, -5)
- 3) (3, -8)
- 4) (7, 7)
- 5) (1, -7, -1)
- 6) (2, -7, -8)
- 7) -11
- 8) (4, 0)
- 9) (5, -3)
- 10) (7, 2)
- 11) (3, -5, 1)
- 12) (2, -13, 10)
- 13) $x^3 - 4x^2 + x + 6$
- 14) $2x^3 + x^2 - 5x + 2$
- 15) $-\frac{15}{8}$
- 16) (-3, 1)
- 17) (1, -5, 7)
- 18) (1, 0, 0, -16)

8

- 1) $3(x+3)^3 - 17(x+3)^2 + 25(x+3) + 2$
- 2) $(x-2)^4 + 5(x-2)^3 + 8(x-2)^2 + 5(x-2) + 5$
- 3) $2(x+2)^4 - 12(x+2)^3 + 21(x+2)^2 - 3(x+2) - 4$
- 4) $(x-1)^4 - 3(x-1)^2 - 4(x-1) - 1$
- 5) $2(x-\sqrt{2})^4 + 9\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^3 + 25(x-\sqrt{2})^2 + 11\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) + 1$
- 6) $(x-a)^3 + 2(x-a)^2 + 3(x-a) + 1$
- 7) $(x-m)^3 + (x-m)^2 + (x-m) + m - 2$
- 8) $(x+i)^4 + 2(x+i)^3 - 2(x+i) + 3i$
- 9) $(x-1-i)^3 + (x-1-i)^2 + 5(x-1-i) + 1$
- 10) $(x^5-2)^4 + 3(x^5-2)^3 + (x^5-2)^2 - 7(x^5-2) - 6$
- 11) $(x^3-3)^3 + 5(x^3-3)^2 + 8(x^3-3) - 1$
- 12) $(2x+1)^3 - 2(2x+1)^2 + (2x+1) - 3$
- 13) $(2x-3)^3 + 3(2x-3)^2 + 5(2x-3) + 4$
- 14) $(3x-1)^3 + 2(3x-1) + 5$
- 15) $(2x-5)^3 + 3(2x-5)^2 + 47$
- 16) $\frac{1}{2}(2x-1)^3 - 4(2x-1)^2 - \frac{15}{2}(2x-1) + 4$
- 17) $\frac{1}{9}(3x+1)^4 + \frac{4}{9}(3x+1)^3 - \frac{20}{9}(3x+1)^2 + \frac{23}{3}(3x+1) + 1$
- 18) $\frac{1}{2}(2x-7)^4 + 10(2x-7)^3 + \frac{105}{2}(2x-7)^2 - 13$

9

- 1) $(x-2)^3 - 7(x-2) - 5$

- 3) $2(x-5)^3 - 30(x-5) + 75$
- 4) $4(x-1)^3 + (x-1) - 2$
- 5) $(x-3)^3 - 10(x-3) - 1$
- 6) $(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4;$
 $(x-1)^3 + 3(x-1)^2$
- 7) $(x-1)^3 + 4(x-1)^2 - 1;$
 $(x+\frac{5}{3})^3 - 4(x+\frac{5}{3})^2 + \frac{229}{27}$
- 8) $2(x+1)^3 - 5(x+1)^2 + 4;$
 $2(x-\frac{2}{3})^3 + 5(x-\frac{2}{3})^2 - \frac{17}{27}$
- 9) $(x+2)^3 - 7(x+2)^2 + 10;$
 $(x-\frac{8}{3})^3 + 7(x-\frac{8}{3})^2 - \frac{109}{27}$
- 10) $(x+1)^4 - 3(x+1)^3 + 2(x+1) + 4;$
 $(x-\frac{1}{2})^4 + 3(x-\frac{1}{2})^3 - \frac{19}{4}(x-\frac{1}{2}) + \frac{31}{16}$

10

- 1) -1, 2, 2
- 2) 1, 1, -2
- 3) 1, 1, -1
- 4) 0, 1, 2, 3
- 5) 0, 1, -2, -3
- 6) 2, -2, 3
- 7) 2, 2, -2
- 8) 0, -1, -1, 5
- 9) -2, 3, 3
- 10) 2, 4, -5
- 11) 0, 3, -4, 5
- 12) 1, -1, 9
- 13) 1, -1, 2, -4
- 14) 0, -1, 2, 3, -4
- 15) -2, -4, 5, 6
- 16) 0, -1, 3, 3, -3
- 17) -2, -2, -2, -6
- 18) 0, -2, 3, -4, 6
- 19) -3, -3, 5, -5
- 20) 1, -2, 3, 4, 5
- 21) -1, -2, -3, -4, 5
- 22) 0, -2, 3, 3, -3, 4
- 23) 0, 1, 2, 3, 4, -6
- 24) -1, -3, -4, 6, -6
- 25) -1, -1, 2, -2, -2, -2
- 26) 0, 1, -1, 2, -2, 3, 3
- 27) -1, 2, 2, -2, -2, 4
- 28) 1, 1, 1, -1, 6, 12
- 29) 0, 1, -1, -2, 3, -3, -3
- 30) 1, 1, 2, -2, 4, 5, -5
- 31) 0, 2, 2, -2, -2, 3, -4, 5

11

- 1) -3, $\pm \frac{1}{2}$
- 2) -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
- 3) ± 1 , $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$
- 4) 0, ± 2 , $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$
- 5) 2, $\pm \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$
- 6) 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$
- 7) 0, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$

- 8) $\pm \frac{3}{2}, \pm \frac{5}{2}$
- 9) $0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}$
- 10) $-1, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$
- 11) $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}$
- 12) $0, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
- 13) $-3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$
- 14) $\pm 1, -3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$
- 15) $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$
- 16) $-1, 2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

12

- 1) $1, -2, \frac{5 \pm \sqrt{31}}{2}$
- 2) $-1, 2, \frac{-9 \pm \sqrt{5}}{2}$
- 3) $-1, \frac{1}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$
- 4) $1, -\frac{1}{3}, 3 \pm i$
- 5) $\pm 5, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$
- 6) $0, 1, 2, \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$
- 7) $1, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{51}}{2}$
- 8) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2}$
- 9) $0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1 \pm \sqrt{31}}{2}$
- 10) $\pm 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{71}}{2}$

13

- 1) $1, 1, -3, -\frac{1}{3}$
- 2) $-2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$
- 3) $-3, -\frac{1}{3}, 4, \frac{1}{4}$
- 4) $2, \frac{1}{2}, \pm i$
- 5) $-1, -1, \pm i$
- 6) $\frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}, \pm i$
- 7) $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{4}{3}$
- 8) $\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}$
- 9) $-1, 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$
- 10) $1, 2, \frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$
- 11) $1, -2, -\frac{1}{2}, -3, -\frac{1}{3}$
- 12) $-1, 1, 1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- 13) $1, 2, \frac{1}{2}, 2 \pm \sqrt{3}$
- 14) $-1, -1, 3, \frac{1}{3}, -4, -\frac{1}{4}$
- 15) $\pm 1, 2, \frac{1}{2}, \pm i$
- 16) $\pm 1, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, \pm i$
- 17) $\pm 1, -2 \pm \sqrt{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{3}$
- 18) $2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm 2\sqrt{2}, \frac{1 \pm \sqrt{31}}{2}$
- 19) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{51}}{2}$
- 20) $1, \pm 1, -2, \frac{1}{2}, \frac{1 \pm 2\sqrt{21}}{3}$

- 21) $\pm 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$
- 22) $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2}$
- 23) $\pm 1, -2, -\frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$
- 24) $\frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{151}}{4}, \frac{1 \pm \sqrt{351}}{6}, \pm i$
- 25) $\frac{1 \pm \sqrt{31}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{2}, \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}, \frac{7 \pm \sqrt{33}}{4}$
- 26) $-1, \pm \frac{a}{b}, \pm \frac{b}{a}$
- 27) $-1, -1, a, \frac{1}{a}$

14

- 1) $k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
- 2) $k \cdot 180^\circ + 45^\circ; k \cdot 180^\circ \pm 60^\circ; k \cdot 180^\circ - 63^\circ 26'$
- 3) $k\pi \pm \frac{\pi}{4}; \pi(1 + 2k)$
- 4) $k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ; k \cdot 360^\circ \pm 101^\circ 32'; k \cdot 360^\circ \pm 70^\circ 31'$
- 5) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi; k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$
- 6) $270^\circ + k \cdot 360^\circ; k \cdot 180^\circ - (-1)^k 11^\circ 32'; k \cdot 180^\circ + (-1)^k 11^\circ 32'$
- 7) $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}; k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$
- 8) $k \cdot 180^\circ - 45^\circ; k \cdot 180^\circ + 63^\circ 26'; k \cdot 180^\circ \pm 30^\circ$
- 9) $k \cdot 180^\circ + (-1)^k 19^\circ 28'; k \cdot 180^\circ - (-1)^k 14^\circ 28'$
- 10) $k \cdot 360^\circ \pm 78^\circ 27'; k \cdot 360^\circ \pm 120^\circ; 180^\circ(1 + 2k)$
- 11) $10, 100, 1000$
- 12) $10; 100; 1,93$
- 13) $\frac{1}{100}; 1000; 1,389$
- 14) $\frac{1}{2}, 4, 8, 16$
- 15) $10; 3,162; 2,154$
- 16) $10; \frac{1}{100}; 2,154$
- 17) $1, 3, \frac{1}{3}, 27, \frac{1}{243}$
- 18) $1; 100; \frac{1}{100}; 1,468$
- 19) $0, 1, 2$
- 20) $0; 1; 1,585$
- 21) $0, 1, 2$
- 22) $0; 1; 1,585; 2$
- 23) $0, \frac{1}{2}$
- 24) $2; 2,807$
- 25) $0; 1,609; 1,946$
- 26) $\frac{1}{2}; 0,7925; 1$
- 27) $-1; -2; 1,322$
- 28) $0, \lg_m a, \lg_m b$

15

- 1) $\frac{x+3}{x-3}$
- 2) $\frac{x-2}{x-3}$
- 3) $\frac{x+4}{(x+2)(2x+1)}$
- 4) $x-2$
- 5) $(3x-1)(3x+2)$
- 6) $\frac{2x+1}{2x-3}$
- 7) $\frac{x+5}{x-5}$
- 8) $2x-1$
- 9) $\frac{2x}{x-1}$
- 10) $\frac{2x+1}{3x-1}$

16

- 1) -2
- 2) 0
- 3) ∞
- 4) 0
- 5) $\frac{97}{43}$
- 6) $\frac{2}{3}$
- 7) $-\frac{3}{10}$
- 8) $\frac{134}{227}$
- 9) $-\infty$
- 10) -6
- 11) $-\frac{7}{19}$
- 12) -2
- 13) $-\frac{14}{9}$
- 14) 2a
- 15) ∞

17

- 1) $\frac{2}{3}$
- 2) 2
- 3) $\frac{1}{8}$
- 4) $\frac{8}{35}$
- 5) ∞
- 6) 6
- 7) 3
- 8) $-\frac{6}{17}$
- 9) $\frac{3}{1+c}$
- 10) $-\infty$
- 11) 0
- 12) $\frac{4}{3}$
- 13) 0
- 14) $\frac{5}{3}$

18

- 1) $-\frac{1}{3}$
- 2) -1
- 3) 2
- 4) $\frac{3}{7}$
- 5) $\frac{1}{2}$
- 6) -2
- 7) $\frac{2}{3}$
- 8) $-\frac{1}{3}$
- 9) $\frac{7}{3}$
- 10) $\frac{4}{3}$
- 11) $\frac{1}{2}$
- 12) $\frac{3}{4}$
- 13) $\frac{8}{3}$
- 14) $-\frac{5}{12}$
- 15) 6
- 16) ∞

19

- 1) -3
- 2) $\frac{1}{2}$
- 3) 0
- 4) $\frac{3}{4}$
- 5) -3
- 6) $\frac{29}{35}$
- 7) -4
- 8) $-\frac{5}{4}$
- 9) 1
- 10) $\frac{2}{3}$
- 11) $\frac{1+c^2}{1-c^2}$
- 12) $\frac{21}{13}$
- 13) $-\frac{4}{5}$
- 14) $\frac{9}{14}$
- 15) 2
- 16) 3
- 17) $-\frac{14}{3}$

20

- 1) $\frac{3}{2}$
- 2) $\frac{1}{3}$
- 3) $\frac{2}{7}$
- 4) $\frac{9}{14}$
- 5) $-\frac{45}{2}$
- 6) ∞
- 7) $-\frac{10}{9}$
- 8) $\frac{24}{5}$
- 9) 0
- 10) $-\frac{9}{55}$
- 11) $-\frac{1}{12}$
- 12) -10
- 13) 5
- 14) $\frac{32}{11}$
- 15) $-\frac{5}{4}$
- 16) -1
- 17) $\frac{1}{4}$

21

- 1) $x^2 - xy + y^2$
- 2) No es divisible
- 3) $a^3 - 2a^2 + 4a - 8$
- 4) $a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6$
- 5) $a^5 + 2a^4 + 4a^3 + 8a^2 + 16a + 32$
- 6) No es divisible
- 7) $25 + 5x + x^2$
- 8) No es divisible
- 9) $x^3 - 3x^2 + 9x - 27$
- 10) No es divisible
- 11) $a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7$
- 12) No es divisible
- 13) $m^4 + 2m^3 + 4m^2 + 8m + 16$
- 14) $9 + 3m + m^2$
- 15) $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$
- 16) $a^3b^3 + 5a^2b^2 + 25ab + 125$
- 17) $9m^2 - 6mn + 4n^2$
- 18) $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$

22

- | | | |
|--------------------------|---------------------------------|---|
| 1) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ | 7) $\frac{\sqrt{ab}}{ab}$ | 14) $\frac{\sqrt[4]{a^3b}}{ab}$ |
| 2) $\sqrt{3}$ | 8) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ | 15) $\frac{\sqrt[3]{2a^2b^4c^3}}{2a}$ |
| 3) $2\sqrt{2}$ | 9) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ | 16) $\frac{\sqrt[4]{18a^3b}}{2}$ |
| 4) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ | 10) $\frac{2\sqrt{14}}{5}$ | 17) $\frac{\sqrt[3]{48a^4b^4c^3}}{2}$ |
| 5) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ | 11) $\frac{2\sqrt{33}}{3}$ | 18) $\frac{\sqrt[5]{54a^2b^4c^3}}{3b^2c^3}$ |
| 6) $\frac{\sqrt{a}}{b}$ | 12) $2(x-y)\sqrt{x+y}$ | 19) $\frac{b^2\sqrt[3]{125a^3b^3c^3}}{a^4}$ |
| | 13) $\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{ab}$ | 20) $2(3a-b)^3\sqrt[3]{9a^2+6ab+b^2}$ |

- 21) $(a+b)^2 \sqrt[3]{a+b}$
 22) $(x-2)\sqrt[5]{(x+3)^3}$
 23) $(x+1)\sqrt[4]{(x+2)^3(x-3)^2}$
 24) $(x-1)\sqrt[3]{(2x-1)^2(x+1)}$

23

- 1) $2 - \sqrt{3}$
 2) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$
 3) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$
 4) $2(\sqrt{2}+1)$
 5) $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$
 6) $\sqrt{35}+5$
 7) $5\sqrt{2}-3\sqrt{5}$
 8) $\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{a}$
 9) $5+2\sqrt{6}$
 10) $\frac{19+6\sqrt{2}}{17}$
 11) $\frac{40+13\sqrt{10}}{45}$
 12) $\sqrt{2}$
 13) $\frac{3\sqrt{3}}{10}$
 14) $\frac{m\sqrt{n}+n\sqrt{m}}{m-n}$
 15) $\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x-15}}{4}$
 16) $\frac{(\sqrt{2x-1}+2)(\sqrt{5x-1}+2)}{x-1}$
 17) $\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}$
 18) i
 19) l
 20) $\frac{\sqrt{5+21}}{2}$
 21) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$
 22) $\frac{\sqrt{9+4\sqrt{2}}}{7}$
 23) 2
 24) $\frac{\sqrt{46+16\sqrt{7}}}{3}$
 25) 3
 26) $\frac{(a+\sqrt{a^2-\sqrt{a}})\sqrt{a}}{a}$
 27) $\sqrt{a+1-2\sqrt{a}}$
 28) $(a+3)\sqrt{a+3+2\sqrt{3a}}$
 29) $4+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$
 30) $\frac{7+2\sqrt{15}-\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{11}$
 31) $\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{6}}{6}$
 32) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$
 33) $3+\sqrt{3}+\sqrt{7}$
 34) $\frac{2\sqrt{3+3\sqrt{2}}+\sqrt{6}}{2}$
 35) $\sqrt{2}+2+\sqrt{6}$

- 36) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
 37) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
 38) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$
 39) $\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$
 40) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-2$
 41) $7-\sqrt{15}-\sqrt{21}+\sqrt{35}+\sqrt{105}+5\sqrt{3}-3\sqrt{5}-\sqrt{7}$
 42) $\frac{4\sqrt{3}-2\sqrt{5}-5\sqrt{2}-6+\sqrt{30}+2\sqrt{15}-2\sqrt{10}+2\sqrt{6}}{4}$
 43) $\sqrt{15}+\sqrt{10}$
 44) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
 45) $\sqrt{15}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{8-\sqrt{15}})$
 46) $\sqrt{3}-\sqrt{7}$
 47) $\sqrt{11}-\sqrt{7}$
 48) $\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)$
 49) $\frac{(a^2-2a\sqrt{b}+b)^3(\sqrt{a+b})^2}{a^2-b}$

24

- 1) $\frac{\sqrt[3]{a^2-\sqrt{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{a+b}$
 2) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$
 3) $\sqrt[4]{343}-\sqrt[4]{147}+\sqrt[4]{63}-\sqrt[4]{27}$
 4) $\frac{(a+b)(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3})}{a-b}$
 5) $\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}$
 6) $\sqrt[5]{625}+\sqrt[5]{375}+\sqrt[5]{225}+\sqrt[5]{135}+\sqrt[5]{81}$
 7) $\frac{\sqrt[3]{x^2-2\sqrt{x}+4}}{x+8}$
 8) $\frac{\sqrt[4]{a^3}+2\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}+8}{a-16}$
 9) $(x-1)(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81})$
 10) $(x+1)(\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9)$
 11) $(a-1)(\sqrt[6]{a^5}-\sqrt[6]{a^2}+\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{a}-1)$
 12) $\sqrt[5]{625}-\sqrt[5]{250}+\sqrt[5]{100}-\sqrt[5]{40}+\sqrt[5]{16}$
 13) $\frac{(m+2n)\sqrt[4]{a}(\sqrt[4]{m^3}+\sqrt[4]{m^2n}+\sqrt[4]{mn^2}+\sqrt[4]{n^3})}{a}$
 14) $\frac{\sqrt[3]{a^4}(\sqrt[3]{x^6}+2\sqrt[3]{x^5y}+2\sqrt[3]{x^4y^2}+2\sqrt[3]{x^3y^3}+2\sqrt[3]{x^2y^4}+2\sqrt[3]{xy^5}+2\sqrt[3]{y^6})}{a}$
 15) $\frac{\sqrt[4]{ab^3}(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3})}{ab}$
 16) $\sqrt[5]{8}\left(\sqrt[5]{16x^4}-\sqrt[5]{8x^3y}+\sqrt[5]{4x^2y^2}-\sqrt[5]{2xy^3}+\sqrt[5]{y^4}\right)$
 17) $\frac{a^2\sqrt[4]{a}-a\sqrt[4]{a^3y}+\sqrt[4]{a^3y^2}-\sqrt[4]{y^3}}{a^3-y}$
 18) $\frac{\sqrt[3]{y^4}(\sqrt[3]{x^3}+x\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{x^2y}+y\sqrt[3]{x^2y}+y\sqrt[3]{y^3})}{y}$
 19) $\frac{a^3\sqrt[4]{a}+a^2\sqrt[4]{b}+a\sqrt[4]{a^3b^3}+ab\sqrt[4]{a^2b^2}+b\sqrt[4]{b^3}}{a^3-b^3}$
 20) $\frac{\sqrt[4]{32}(\sqrt[4]{32}-\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}-1)}{2}$

- 21) $\frac{-\sqrt[3]{a^2b^2}(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{ab}$
- 22) $\frac{6\sqrt[5]{a^5}(a\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{a}+a+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1)}{a-1}$
- 23) $\sqrt[4]{8}\left(12\sqrt[2]{11}+\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[4]{2^3}+\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[12]{2^7}+\sqrt{2}+\sqrt[12]{2^5}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}+\sqrt[6]{2}+\sqrt[12]{2}+1\right)$
- 24) $3\sqrt[3]{9}-3\sqrt[4]{72}+6-2\sqrt[5]{648}+4\sqrt{3}-4\sqrt{2}$
- 25) $\frac{\sqrt[3]{x^5}(\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x}+1)}{x-1}$
- 26) $\sqrt[6]{x^5}(\sqrt{x}-1)$
- 27) $\sqrt[5]{16}(4^{10}\sqrt[10]{128}+4\sqrt[5]{4}+4^{10}\sqrt[2]{2}+2\sqrt[5]{16}+2\sqrt{2}+2\sqrt[5]{2}+\sqrt[10]{512}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[10]{8}+1)$
- 28) $\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a+b}$
- 29) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$
- 30) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$
- 31) $\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}$
- 32) $(x^2+xy+y^2)(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{y})$
- 33) $2(\sqrt[3]{x}-1)$
- 34) $\frac{(\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{49})\sqrt[3]{100}(\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})}{210}$
- 35) $4\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$

25

- 1) $\frac{1}{4}$
- 2) $\frac{1}{8}$
- 3) 6
- 4) 32
- 5) $-\frac{3}{4}$
- 6) $\frac{16}{21}$
- 7) $\frac{5}{3}$
- 8) $-\frac{2\sqrt{14}}{7}$
- 9) $\frac{\sqrt{5}}{6}$
- 10) $-\frac{6\sqrt{5}}{5}$
- 11) $-\frac{6\sqrt{11}}{11}$
- 12) $-\frac{1}{24}$
- 13) $\frac{1-2a}{2\sqrt{a^2+a}}$
- 14) -36
- 15) $12\sqrt[3]{9}$
- 16) $\frac{7}{144}$
- 17) $\frac{5}{36}$
- 18) $\frac{1}{48}$
- 19) ∞
- 20) $\frac{13\sqrt{7}}{4}$
- 21) $\frac{11}{12}$
- 22) $-\frac{8\sqrt[5]{81000}}{27}$
- 23) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$

26

- 24) $\frac{51\sqrt[3]{36}}{2}$
- 25) $\frac{2\sqrt[6]{b^5}}{36}$
- 26) $\frac{\sqrt[4]{8}}{3}$
- 27) $-\frac{\sqrt[3]{361}}{21}$
- 28) $\frac{\sqrt[4]{343}}{3}$
- 29) ∞
- 30) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
- 31) $-\frac{1}{3}$
- 32) $-\frac{3}{8}$
- 33) $\frac{80}{21}$
- 34) $\frac{1}{12}$
- 1) $m=3; n=2$
- 2) $p=0; q=5; r=-2$
- 3) $m=-3; n=4$
- 4) $m=2; n=-1$
- 5) $m=5; n=1$
- 6) $p=2; m=3; n=2$
- 7) $a=2; b=-3; p=-7$
- 8) $a=-3; b=2; p=-7$
- 9) $a=-3; b=-2; p=3$
- 10) $a=2; b=3; p=3$
- 11) $A=1; B=-1; C=0$
- 12) $A=\frac{1}{2}; B=\frac{5}{2}; C=-\frac{1}{2}$
- 13) $A=\frac{25}{6}; B=-\frac{3}{2}; C=\frac{1}{3}$
- 14) $A=0; B=\frac{4}{5}; C=2; D=\frac{1}{5}$
- 15) $(m=5; n=4); (m=\frac{5}{4}; n=-\frac{7}{2})$

27

- 1) $x^2-2x-2; -4x+8$
- 2) $x^3+3x^2-2x+4; -3x+4$
- 3) $x^3+2x-1; x^2+3$
- 4) $x^3+x^2+2x+3; x+4$
- 5) $x^3+2; -2x+1$

28

- 1) $Q_{(x)}=\pm(x^2+x+2); R_{(x)}=-x+1$
- 2) $Q_{(x)}=\pm(2x^2-x+3); R=0$
- 3) $Q_{(x)}=\pm(3x^2-4x+2); R_{(x)}=10x-3$
- 4) $Q_{(x)}=\pm(x^3+x+3); R_{(x)}=5x^2-3$
- 5) $Q_{(x)}=\pm(x^3+x^2+1); R_{(x)}=-x^2$
- 6) $Q_{(x)}=x^2-x+1; R_{(x)}=-2x^3-2x$
- 7) $Q_{(x)}=x^2-x-3; R_{(x)}=9x^2$
- 8) $Q_{(x)}=\pm(x^2+x-1); R=0$

29

- 1) $\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}$
- 2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$
- 3) $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$
- 4) $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}$
- 5) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x-3}$

$$\begin{aligned}
 6) & \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x-4} \\
 7) & \frac{1}{4(x+1)} - \frac{2}{x-2} + \frac{7}{4(x-3)} \\
 8) & \frac{3}{x-1} + \frac{1}{2x-1} + \frac{2}{(2x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^4} \\
 9) & \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x-1)^4} \\
 10) & \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)^3} \\
 11) & \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} \\
 12) & \frac{1}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{11}{(x-1)^3} + \frac{7}{(x-1)^4} \\
 13) & \frac{5}{x+2} - \frac{8}{(x+2)^2} - \frac{4}{(x+2)^3} + \frac{3}{(x+2)^4} \\
 14) & -\frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^3} + \frac{2}{x+5} \\
 15) & \frac{5}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^4} - \frac{1}{(x+1)^5} \\
 16) & -\frac{7}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} + \frac{3}{x+3} \\
 17) & \frac{7}{x+3} - \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+3)^3} + \frac{4}{(x+3)^4} \\
 18) & \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^4} \\
 19) & \frac{1}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{5}{(x-2)^3} \\
 20) & \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1} \\
 21) & \frac{5}{x+2} - \frac{3}{x^2+x+1} \\
 22) & \frac{7}{x-1} + \frac{2x-2}{x^2+1} \\
 23) & \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x^2+2x+2} \\
 24) & \frac{4}{x-2} - \frac{7}{x+3} + \frac{3x}{x^2+x+1} \\
 25) & \frac{3}{x-1} + \frac{2x-1}{x^2+3} \\
 26) & \frac{8}{x+1} + \frac{3x-2}{x^2+2} \\
 27) & \frac{7}{x-2} - \frac{2x+1}{x^2+2} \\
 28) & \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} + \frac{4x}{x^2+2} \\
 29) & \frac{1}{x-4} - \frac{3}{x+3} + \frac{2x-3}{x^2+1} \\
 30) & \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2+1} \\
 31) & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{2}{x^2+3x+3} \\
 32) & \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{5}{(x-2)^2} + \frac{4}{x^2+1} \\
 33) & \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \\
 34) & \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x^2+1} - \frac{5x}{(x^2+1)^2} \\
 35) & \frac{1}{x-1} + \frac{3x}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2} \\
 36) & \frac{1}{x-2} + \frac{3x-1}{x^2+x+1} + \frac{x+5}{(x^2+x+1)^2} \\
 37) & \frac{3}{x-2} + \frac{2x-1}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2} \\
 38) & \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} + \frac{2x+1}{(x^2+1)^2} \\
 39) & \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2} \\
 40) & \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{5x+10}{(x^2+1)^2} \\
 41) & -\frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x^2+2} - \frac{1}{(x^2+2)^2} \\
 42) & \frac{1}{3(x-3)} - \frac{x+3}{3(x^2+3)} - \frac{4x+12}{(x^2+3)^2} \\
 43) & 2 - \frac{3}{x+1} - \frac{5}{x^2+2} \\
 44) & 2x - 3 + \frac{3}{x-2} + \frac{9}{x+3} \\
 45) & x + 2 - \frac{6}{x-1} + \frac{15}{x-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 46) & 3x - 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+3} \\
 47) & x^3 - 1 - \frac{2}{x(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} \\
 48) & 3x - 5 + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+3} \\
 49) & x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \\
 50) & 2x - 3 - \frac{3}{x-4} + \frac{7}{x+2} + \frac{2}{x+3} \\
 51) & x^3 + 3x^2 + 6x + 10 + \frac{14}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} \\
 52) & x^2 - x + 2 + \frac{2}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3} - \frac{12}{(x+2)^4} \\
 53) & 3x - 1 + \frac{2}{x-3} - \frac{2x+1}{x+1} + \frac{5x}{(x^2+1)^2} \\
 54) & x - 1 + \frac{1}{x+2} + \frac{3x-1}{x^2+2} - \frac{5x-3}{(x^2+2)^2} \\
 55) & x^4 + 5x^3 - 7 - \frac{x-6}{x^2+1} - \frac{2}{x-2} \\
 56) & 2x + a + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+3} \\
 57) & ax + b - \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-b} \\
 58) & \frac{x+2}{x^2+2x+2} - \frac{x-2}{x^2-2x+2} \\
 59) & 2 - \frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} \\
 60) & \frac{-5x+4}{x^2+2} + \frac{8x+1}{x^2+x+1} \\
 61) & \frac{2}{x-1} + \frac{5x}{x^2+3} - \frac{x+1}{(x^2+3)^2}
 \end{aligned}$$

30

- 1) $(-4, 8, -2, 2); (4, 0, 2, -2)$
- 2) $a = -c; b = -(p+1); 4d = c^2 - 4(p+1)$
- 3) $a=3; b=2$
- 4) $a=1; b=-4$
- 5) $1-i; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$
- 6) $\pm 3; \pm 1; (m=2)$
- 7) $\pm 6; \pm 2; (m=15); \pm 3i; \pm i; (m=0)$
- 8) $x^2 - 3x + 5$
- 9) $2x^2 + x - 7$
- 10) $-3x^2 + 7x - 5$
- 11) $x^3 + x^2 + x + 1$
- 12) $2x^3 - x^2 + 2x - 1$
- 13) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$
- 14) $x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x + 2$
- 15) $2x^4 - 6x^3 - 3x^2 + x - 7$
- 16) $5x^4 - 11x^3 + 6x^2 - 7x + 1$
- 17) $2x^4 - 7x^3 - 18x^2 + 13x + 10$
- 18) -1
- 19) 0
- 20) ∞
- 21) $\frac{31}{9}$
- 22) 6
- 23) $p = -1 - m^2; q = m$
- 24) $q = p - 1; m = 0$
 $q = 1; m = \pm \sqrt{2 - p}$
- 25) $A=3; B=-4$
- 26) $x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4$
- 27) $x^4 - 3x^3 - x^2 - x - 6$
- 28) $x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 106x + 357$
- 29) $x^7 + 5x^6 + 16x^5 + 18x^4 + 17x^3 - 23x^2 + 2x - 36$
- 30) $x^4 - 8x^3 + 42x^2 - 104x + 169$
- 31) $a^3 - 4ab + 8c = 0$

- 32) $m = \pm 6$
 33) $b = c \pm 0$;
 $a = b = -1, c = 1$
 34) $a = b = c = 0$; $a = 1, b = -2, c = 0$; $a = 1, b = c = -1$;
 $b = \alpha, a = -\frac{1}{\alpha}, c = \frac{2-\alpha^2}{\alpha}$
 (donde $\alpha^3 - 2\alpha + 2 = 0$)
 35) $q^3 + pq + q = 0$
 36) $3x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 11x^2 + 4x + 12$
 37) $x^3 + 3x^2 + x + 3$
 38) $x^4 + 8x^3 + 14x^2 - 8x - 15$
 39) $y^4 - 3y^3 - 27y^2 + 27y + 162$
 40) $y^4 - 10y^3 + 33y^2 - 24y$
 41) $y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12$
 42) $y^4 + 12y^2 + 16y + 48$;
 $1 \pm \sqrt{11}i; -1 \pm \sqrt{3}i$
 43) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$
 44) $k = -16; 6, -1, -2$
 45) $k = 52; 2, 3, \frac{2}{3}$
 46) $k = -46; 4, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$
 47) $k = -5; -1, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}$
 48) $k = -4; \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$
 49) $m = \frac{457}{3}, n = -22; \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
 50) $m = 42, n = -104; 2 \pm 3i; 2 \pm 3i$
 51) $m = -\frac{5}{8}, n = -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1$
 $m = \frac{7}{8}, n = -\frac{1}{64}; \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{5}{4}$
 55) $(x^2 + 3x + 2) y (x^2 - 5x - 6)$;
 $(-2x^2 - 6x + 2) y (-2x^2 - 2x - 6)$
 56) 100; 0,1; 0,001
 57) 4; 32; $\frac{1}{2}$
 58) 1000; 1,642; 0,0283
 59) $k \cdot 180^\circ + 45^\circ$
 $k \cdot 180^\circ + 72^\circ 34'$
 $k \cdot 180^\circ + 17^\circ 25'$
 $k \cdot 180^\circ - 29^\circ 30'$
 $k \cdot 180^\circ - 60^\circ 30'$
 60) $x + 27$
 61) $15x - 14$
 62) $-30x - 75$
 63) $14x^2 + 41x + 25$
 64) $9x^2 - 32x + 19$
 65) $A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
 66) 5
 67) $\Phi_{(x)} = \frac{4}{3}x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$; $Q_{(x)} = \frac{64}{125}x + \frac{32}{125}$
 68) $27ad^2 - 9bcd + 2c^3 = 0$
 69) $\pm\sqrt{2}i; \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
 70) $\pm 2i; \frac{1 \pm 3\sqrt{11}i}{10}$
 71) $1 \pm 3i; \pm\sqrt{3}i; -2 \pm 4i$
 72) $Q_{(x)} = q^2x^3 + px - 1$
 73) 11; -6
 74) 4; 5; Bs 5.400.000

- 3) 30
 4) 7
 5) 18
 6) 35
 7) 140
 8) 220
 9) 70
 10) -30
 11) 180
 12) 16
 13) -7
 14) -6
 15) -3
 16) 10
 17) 4
 18) $5 + 6 + 7 + \dots + (n + 5)$
 19) $8 + 27 + 64 + \dots + (n + 1)^3$
 20) $9 + 18 + 29 + \dots + (n^2 + 6n + 2)$
 21) $1 + 1 + 9 + \dots + (2n + 1)^2$
 22) $25 + 36 + 25 + \dots + (n^2 - 4n - 2)^2$
 23) $7 + \lg_2 315$
 24) $8 + \lg_2 15$
 25) $\operatorname{colg} 36$
 26) $1 + \operatorname{colg}_5 77$
 27) -1
 28) 1
 29) $3 + \sin x + \cos x$
 30) 0
 31) 0
 32) 2
 33) $\frac{20}{3}$
 34) 0
 35) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$
 36) -1
 37) $\cos 2\alpha + \cos \alpha + \frac{1}{2}$
 38) $2i \sin 3\alpha$
 39) $2 \cos \frac{5\alpha}{2} \operatorname{Cis}(-\frac{\alpha}{2})$
 40) $\frac{9}{2} + \sqrt{3} + \lg_2 3$
 41) 1
 42) 37

32

- 1) 45
 2) 319
 3) 156
 4) $\frac{1}{4} + \frac{1}{27} + 148$
 5) $\frac{18 - 3\sqrt{2}}{4}$
 6) $\frac{135 + 28\sqrt{3}}{12}$
 7) $14 + \sqrt{2}$
 8) 6
 9) $\frac{11}{2} + \frac{3}{2} \lg_2 3 + 3 \lg_3 2$
 10) $4 + \lg_2 3 - 3 \lg_3 2$
 11) $\frac{25}{12} \lg_a 12$
 12) 0
 13) $\frac{65}{6}$
 14) 4
 15) 1600
 16) 9

31

- 1) 15
 2) 50

- 17) $10 + \frac{3}{2} \lg_2 3 + 6 \lg_3 2$
 18) $\frac{11+3\sqrt{3}}{2} + 18 \lg a$
 19) $21 + \frac{61}{2} + \frac{127}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} [(n+2)(n+3) + \frac{1}{n-1}]$
 20) $3 + 12 + 110 + \dots + [(2n+1)^n + (2n+2)^n + (2n+3)^n]$
 21) $[1 - 7 + 49 + \dots + (-7)^n] + [1 - 5 + 25 + \dots + (-5)^n] + [1 - 3 + 9 + \dots + (-3)^n]$
 22) $[1 - 1 + 9 + \dots + (1 - 2n)^n] + [1 + 2 + 0 + \dots + (4 - 2n)^n] + [1 + 5 + 9 + \dots + (7 - 2n)^n]$
 23) $[0 + 1 + \dots + (n - 2)] + [-1 + 0 + \dots + (n - 3)] + \dots + [(3 - n) + (4 - n) + \dots + 1]$
 24) $[1 + 1 + \dots + (7 - 2n)^{n-2}] + [1 + 0 + \dots + (8 - 2n)^{n-3}] + \dots + [(n - 1)^{3-n} + (n - 3)^{4-n} + \dots + 1]$
 25) $\frac{25}{4}$

33

- 1) 54
 2) 0
 3) 68
 4) 12
 5) $\frac{69}{2} + \frac{9}{2} \lg_2 3 + 3 \lg_3 2$
 6) $15 + 2 \lg_3 2$
 7) $8 + 4 \lg_3 2 + 3 \lg_2 3$
 8) $\frac{99}{2} + 3 \lg_3 2 + 5 \lg_3 2 + \frac{3}{2} \lg_2 3 + \frac{5}{4} \lg_2 3$
 9) $\frac{72+4\sqrt{3}}{3}$
 10) 390
 11) 135
 12) 37
 13) $4 + \lg_2 3$
 14) 37195
 15) 53508

34

- 1) $\sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^2 (k+i)^k$
 2) $\sum_{k=0}^7 \sum_{i=0}^{n-5} (2k+3i+1)^{-3-i}$
 3) $\sum_{k=0}^7 \sum_{i=0}^{20} (k+i)^k$
 4) $\sum_{k=0}^7 \sum_{t=0}^n \sum_{i=0}^{n+1} (2k-t+3i)^{k+t-i}$
 5) $\sum_{k=0}^6 (k+3)(2k+3)$
 6) $\sum_{k=0}^3 \sum_{i=0}^3 \frac{e^k}{i^2}$
 7) $\sum_{k=0}^4 (3-k)(3k+7)$
 8) $\sum_{k=0}^2 \sum_{t=0}^5 3^{k-1} \sin^2(7-t)x$
 9) $\sum_{k=0}^6 (3-k)(4k+3)$
 10) $\sum_{k=0}^3 \sum_{t=0}^4 2^{k4t} \lg(5-t)x$

- 11) $\sum_{k=0}^8 \sum_{t=0}^7 [\lg(k-3)x]^{-t}$
 12) $\sum_{k=0}^5 \sum_{i=0}^{12} (2k-3i)$

35

- 1) $\sum_{k=1}^n k$
 2) $\sum_{k=1}^n 2k$
 3) $\sum_{k=1}^n (2k-1)$
 4) $\sum_{k=1}^n 3k$
 5) $\sum_{k=1}^n (3k+1)$
 6) $\sum_{k=1}^n (3k-1)$
 7) $\sum_{k=1}^{250} 2k$
 8) $\sum_{k=1}^{90} (3k+1)$
 9) $\sum_{k=0}^{151} (5k+1)$
 10) $\sum_{k=0}^n (100-k)$
 11) $\sum_{k=0}^{200} (50-k)$
 12) $\sum_{k=0}^n (100-2k)$
 13) $\sum_{k=0}^{30} (250-7k)$
 14) $\sum_{k=0}^n (k+1)(-1)^k$
 15) $\sum_{k=1}^n k(-1)^k$

$$\begin{aligned}
16) & \sum_{k=1}^n 2k(-1)^{k+1} \\
17) & \sum_{k=0}^n (200-2k)(-1)^k \\
18) & \sum_{k=1}^{100} k(-1)^{k+1} \\
19) & \sum_{k=1}^n k(k+1) \\
20) & \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \\
21) & \sum_{k=2}^n k(k+2)(-1)^k \\
22) & \sum_{k=1}^{50} k(k+1)(-1)^k \\
23) & \sum_{k=1}^n k(2k)(3k) \\
24) & \sum_{k=1}^n k(2k+1)(4k+1)(-1)^{k+1} \\
25) & \sum_{k=0}^n (k+1)(100-k) \\
26) & \sum_{k=1}^{180} \frac{k}{k+1} \\
27) & \sum_{k=1}^n \frac{(3k-2)(-1)^{k+1}}{(k+1)(2k+1)} \\
28) & \sum_{k=2}^n \frac{k^{k+1}}{(k+1)^k} \\
29) & \sum_{k=0}^n \frac{(50-k)^{k+1}(-1)^k}{(k+4)^{10-k}} \\
30) & \sum_{k=5}^n \frac{k^{11-k}}{(k-4)(k-3)k} \\
31) & \sum_{k=1}^n \frac{(k+5)^{8-k}}{k(k+1)^3(k+4)^{k+2}} \\
32) & \sum_{k=2}^n \sqrt[k]{k-1} \\
33) & \sum_{k=3}^n (-1)^{k+1} \lg kx \\
34) & \sum_{k=1}^n [\lg kx + \operatorname{sen}(k+1)x] \\
35) & \sum_{k=1}^n [\operatorname{sen} kx + \cos(8-k)x] \\
36) & \sum_{k=3}^n \lg_{k-3}(x+k) \\
37) & \sum_{k=0}^6 7-k\sqrt{k+7} \\
38) & \sum_{k=1}^{40} \frac{7k-2}{(5k+3)(4k-2)} \\
39) & \sum_{k=0}^{60} \frac{80-3k}{(6k+5)(7k+1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
40) & \sum_{k=0}^{29} \frac{[\lg_2(60-2k)](-1)^{k+1}}{5k+3} \\
41) & \sum_{k=2}^{64} \frac{\lg_2 k}{k+1} \\
42) & \sum_{k=0}^{24} \frac{(100-5k)(-1)^k}{(7k-1)^{2k+1}}
\end{aligned}$$

36

- 1) 18
- 2) -103
- 3) 160
- 4) 44; -97
- 5) 42
- 6) 129
- 7) -28
- 8) 118
- 9) 58
- 10) 175
- 11) 140
- 12) 33
- 13) 377
- 14) 8
- 15) 2
- 17) $\frac{1000}{1601}$
- 18) $\frac{374749}{250500}$
- 19) $\frac{391}{1380}$
- 20) $\frac{41000}{31209}$
- 21) (3,2)
- 22) (4,-1)
- 23) $(4, \frac{1}{2})$
- 24) (2,1); $(6, \frac{1}{3})$
- 25) 8.120.600
- 26) 1.002.000
- 27) 923.520
- 28) -90.600
- 29) 80.396
- 30) 3
- 31) -11
- 32) $\frac{1}{3}$
- 33) 3
- 34) 365
- 35) 500
- 36) -50
- 37) 35

42

- 1) 120
- 2) 24
- 3) 720
- 4) 2
- 5) 6
- 6) 479.001.600
- 7) 362.880
- 8) 39.916.800

43

- 1) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!$
- 2) $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!$

- 3) $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!$
- 4) $(x+9)(x+8)(x+7)(x+6)!$
- 5) $(a-2)(a-3)(a-4)(a-5)!$
- 6) $(m+6)(m+5)(m+4)(m+3)!$
- 7) $(a-7)(a-8)(a-9)(a-10)!$
- 8) $(m+2)(m+1)m(m-1)!$
- 9) $(x+3)(x+2)(x+1)x!$
- 10) $(a+4)(a+3)(a+2)(a+1)!$
- 11) $(5x+3)(5x+2)(5x+1)(5x)!$
- 12) $(4m-1)(4m-2)(4m-3)(4m-4)!$
- 13) $a(a-1)(a-2)(a-3)!$
- 14) $(m+n+7)(m+n+6)(m+n+5)(m+n+4)!$
- 15) $(m+n-5)(m+n-6)(m+n-7)(m+n-8)!$
- 16) $(m-n+3)(m-n+2)(m-n+1)(m-n)!$
- 17) $(7-x)(6-x)(5-x)(4-x)!$
- 18) $(2+x)(1+x)x(x-1)!$
- 19) $(m+n)((m+n-1)(m+n-2)(m+n-3)!$
- 20) $(m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)!$

44

- 1) $7!$
- 2) $9!$
- 3) $(m-1)!$
- 4) $10!$
- 5) $8!$
- 6) $4!$
- 7) $12!$
- 8) $(m+n+1)!$
- 9) $(m+n+1)!$
- 10) $(m-n+2)!$
- 11) $7!$
- 12) $9!$
- 13) $(m+2)!$
- 14) $(x+1)!$
- 15) $(a+3)!$
- 16) $9!$
- 17) $7!$
- 18) $6!$
- 19) $11!$
- 20) $12!$
- 21) $(x+3)!$
- 22) $(a+2)!$
- 23) $(x+1)!$
- 24) $(2x+3)!$
- 25) $m!$
- 26) $7! \cdot 3!$
- 27) $11! \cdot 6!$
- 28) $13! \cdot 8!$
- 29) $10! \cdot 9! \cdot 4!$
- 30) $11! \cdot 7! \cdot 3!$
- 31) $13! \cdot 8! \cdot 5! \cdot 4!$
- 32) $7! \cdot 6! \cdot 4! \cdot 3!$

45

- 1) 42
- 2) 1.680
- 3) 1/56
- 4) 1/156
- 5) 13/42
- 6) 75/28
- 7) 224
- 8) 1
- 9) 599
- 10) 1.121
- 11) 3/539
- 12) 12

46

- 1) $(x+2)(x+1)$
- 2) $\frac{1}{x-4}$
- 3) $(x-3)(x-4)$
- 4) $x-1$
- 5) $x+5$
- 6) $(x+5)!$
- 7) $\frac{1}{(x-4)!}$
- 8) $(7-x)(6-x)$
- 9) $(x+7)/(x-3)$
- 10) $\frac{x}{(x+6)(x-5)}$
- 11) $x+4$
- 12) $x-2$
- 13) $\frac{x-2}{x-1}$
- 14) $x-5$
- 15) $x+6$
- 16) $x-4$

47

- 1) 5 040
- 2) 3.628.800
- 3) 2
- 4) 40.320
- 5) 6.227.020.800
- 6) 720
- 7) $n!$
- 8) $(x+1)!$
- 9) $(2n-1)!$
- 10) $(3-x)!$

48

- 1) 30
- 2) $x(x-1)$
- 3) 7
- 4) $(x+3)(x+2)(x+1)$
- 5) 336
- 6) 72
- 7) 5.040
- 8) $(7-x)(6-x)$
- 9) $(x+1)x(x-1)(x-2)$
- 10) 990
- 11) $(m+n-1)(m+n-2)$
- 12) $(m-n+1)(m-n)$

49

- 1) $\frac{7!}{(7-n)!}$
- 2) $\frac{(x+4)!}{6}$
- 3) $\frac{(x-3)!}{2}$
- 4) $\frac{x!}{24}$
- 5) $\frac{(2x-3)!}{(x-2)!}$

- 6) $\frac{(m+n)!}{(2n)!}$
- 7) $\frac{(m+n)!}{(m+3)!}$
- 8) $\frac{(m-n)!}{(m-4)!}$
- 9) $\frac{(m+n+p)!}{m!}$
- 10) $\frac{(m-n+p)!}{(m-2n)!}$

50

- 1) 10
- 2) 20
- 3) 120
- 4) 126
- 5) 66
- 6) $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$
- 7) $x+7$
- 8) $\frac{(2x+1)x(2x-1)}{3}$
- 9) $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120}$
- 10) 330
- 11) $\frac{(m+n+1)(m+n)(m+n-1)}{6}$
- 12) $\frac{(m+p)(m+p-1)}{2}$

51

- 1) $\frac{6}{(3-n)! \cdot n!}$
- 2) $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$
- 3) $\frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}{24}$
- 4) $x-5$
- 5) $\frac{(2x+3)!}{(x+4)!(x-1)!}$
- 6) $\frac{5040}{(8-n)!(n-1)!}$
- 7) $\frac{120}{(7-x)!(x-2)!}$
- 8) $x+7$
- 9) $\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}$
- 10) $m-9$
- 11) $\frac{(m+n-p)!}{m!(n-p)!}$
- 12) $\frac{(m-n+p)!}{(m-2n)!(n+p)!}$

52

- 1) 190
- 2) 680
- 3) 1.485
- 4) 26

- 5) 45
- 6) 4.950
- 7) 916.895
- 8) 5.456
- 9) 19.900
- 10) 62
- 11) 38.760
- 12) 18.564

53

- 1) 2
- 2) $\frac{1}{6}$
- 3) 1
- 4) $\frac{11}{13}$
- 5) 1
- 6) $\frac{1}{3-x}$
- 7) 56
- 8) 34
- 9) 89
- 10) 84
- 11) $\frac{8}{3}$

54

- 1) 4
- 2) 5
- 3) 7
- 4) 3
- 5) 5
- 6) 5
- 7) 5
- 8) 8
- 9) 5
- 10) 8
- 11) 10
- 12) 12
- 13) 15
- 14) 5
- 15) 10
- 16) 7
- 17) 8
- 18) 9
- 19) 6
- 20) 6
- 21) 3
- 22) 3
- 23) 4
- 24) 6
- 25) 7
- 26) 6
- 27) 6
- 28) 2
- 29) 5
- 30) 7
- 31) 7
- 32) 4
- 33) 5
- 34) 4
- 35) 5
- 36) 6
- 37) 5
- 38) 8
- 39) 4
- 40) 4
- 41) 2

- 42) 6
- 43) 6
- 44) 5
- 45) 4
- 46) 3
- 47) 2
- 48) 5
- 49) 8
- 50) 4
- 51) 5
- 52) 6
- 53) 2
- 54) -3
- 55) 5
- 56) 7
- 57) 4
- 58) 3
- 59) 5
- 60) -1
- 61) 3
- 62) -1
- 63) 6
- 64) 5
- 65) 3
- 66) 1
- 67) 2
- 68) 5
- 69) 3
- 70) 1
- 71) 8
- 72) 21; 4
- 73) 3
- 74) 2
- 75) 3
- 76) 3
- 77) 4
- 78) 7
- 79) 3
- 80) 4
- 81) 4
- 82) 5
- 83) 7
- 84) 4
- 85) 2
- 86) 2
- 87) 6
- 88) 2
- 89) 5
- 90) 1
- 91) 4; 3
- 92) 6; 5
- 93) 6; 3
- 94) 5; 4
- 95) 6
- 96) 5
- 97) 2
- 98) 3
- 99) 6
- 100) 4
- 101) 5
- 102) 0

56

- 1) (17, 9)
- 2) (6, 3)
- 3) (8, 5)
- 4) (7, 3)
- 5) (8, 4)

- 6) (6, 2)
- 7) (6, 3); (5, 3)
- 8) (11, 4); (6, 4)
- 9) (3, 4)
- 10) (8, 4)
- 11) (11, 4)
- 12) (7, 5)
- 13) (5, 2)
- 14) (6, 2)
- 15) (3, 2)
- 16) (7, 4)
- 17) (6, 3)
- 18) (7, 2)

57

- 1) 336
- 2) 120
- 3) 120
- 4) 360
- 5) 27.405
- 6) 5.040
- 7) 20
- 8) 421.200
- 9) 1.573.735.800
- 10) 336
- 11) 54.486.432.000;
- 1365
- 12) 1.184.040
- 13) 5.040

58

- 1) 90
- 2) 480
- 3) 12.960
- 4) 199
- 5) 4.440
- 6) 4.620
- 7) 348
- 8) 13.699
- 9) 5.871
- 10) 7.828
- 11) 144
- 12) 1.440
- 13) 144
- 14) 1.008
- 15) 144

59

- 1) 750
- 2) 2.880
- 3) 91.560
- 4) 771
- 5) 39.270
- 6) 81.720
- 7) 633
- 8) 26.040
- 9) 1.924
- 10) 216
- 11) 3.600
- 12) 5.384

60

- 1) 54.600

- 2) 1.152
- 3) 201.600
- 4) 3.456
- 5) 512
- 6) 1.023
- 7) 582.120
- 8) 756.756
- 9) 33.633.600
- 10) 247
- 11) 450.450
- 12) 210; 315
- 13) 540
- 14) 36
- 15) 1.024
- 16) 5.040
- 17) 240
- 18) 32
- 19) 5.040
- 20) 120; 48
- 21) 30.240
- 22) 30.240
- 23) 332.640
- 24) 7.200
- 25) 2.160
- 26) 120
- 27) 12
- 28) 57
- 29) 2.970
- 30) 450.450
- 31) 846.720
- 32) 681.384
- 33) 6.336
- 34) 20
- 35) 35
- 36) 70
- 37) 126

61

- 1) 6.227.020.800
- 2) 622.080
- 3) 207.360
- 4) 3.628.800
- 5) 87.091.200
- 6) 725.760
- 7) 239.500.800
- 8) 1.197.504.000
- 9) 40.320
- 10) 7.257.600

62

- 1) 9
- 2) 20
- 3) 7
- 4) 27
- 5) 81
- 6) 275
- 7) 19
- 8) 57
- 9) 21
- 10) 73
- 11) 56
- 12) 126
- 13) $n(n-1)$
- 14) 455
- 15) 454
- 16) 451

- 17) 445
18) 264
19) 120
20) 1.365
21) 126
22) 455
23) 60
24) 420
25) 60
26) $\frac{1}{4}m(m-1)n(n-1)$
27) 60
28) 150
29) 60; 12

63

- 1) 8
2) 27
3) 8
4) 6
5) 14
6) 6
7) 8
8) 5
9) 12
10) 13
11) 17
12) Exágono
13) 8
14) 10
15) 6
16) 8
17) 7
18) 7
19) 7
20) 9
21) 10; 8
22) 10; 8; 7
23) 2; 3; 4
24) 1; 4; 5; 6
25) Pentágono
26) Cuadrilátero
27) 6
28) 8
29) 15
30) 15
31) 7
32) 15
33) 18
34) 35

64

- 1) 4
2) 5
3) 120
4) 60
5) 15
6) 60
7) 360
8) 420
9) 3.360
10) 45.360
11) 151.200
12) 1.680
13) 45.360
14) 83.160
15) 10.810.800

- 16) 288
17) 8
18) 120
19) 2.400
20) 400
21) 210
22) 30
23) 20
24) 4

65

- 1) 216
2) 7.776
3) 150
4) 23.976
5) 63.504
6) 4.096
7) 240
8) 325
9) 1.080
10) 720
11) 656

66

- 1) 56
2) 35
3) 1.365
4) 45
5) 364
6) 84
7) 126
8) 120
9) 330
10) 100
11) 875

67

- 1) 6
2) 362.880
3) 5.040
4) 5.760
5) 240
6) 37.440
7) 6
8) 144

68

- 8) 60
9) 24
10) 61.425;
173.110
11) 30.240
12) 15.120
13) 17
14) (3,2)
15) (4,1)
16) (5,2)
17) 360
18) 204
19) 79.833.600
20) 1.451.520
21) 161.280
22) 100.800

- 23) 12.441.600
24) 77.575.680
25) 11.520
26) 633.600
27) 4.488.000
28) 120.960
29) 43.545.600
30) 440
31) 805
32) 3.136
33) 784
34) 228
35) 138
36) 152
37) 540 km

69

- 1) 220
2) 231
3) 1
4) 12.341
5) 215.820
6) 1.365
7) 169.911
8) 64.824
9) 22.100
10) 1.830
11) 73.815
12) 2.024.785
13) 4.095
14) 7.140
15) 246.905
16) 943

$$17) \frac{(x+1)x}{2}$$

$$18) \frac{(x-5)(x-6)(x-7)}{6}$$

$$19) \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$20) \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$21) x$$

$$22) \frac{(x+1)x}{2}$$

$$23) \frac{(x+2)(x+1)x}{6}$$

70

- 1) 3
2) 4
3) 7
4) 2
5) 6
6) 7
7) 0
8) 10
9) 18
10) a-b

71

- 1) 9
2) 14

- 3) 8
4) 2
5) a+b
6) 3
7) 9
8) 1
9) -11
10) 2-a-b
11) x
12) ± 3
13) ± 4

72

$$1) \left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right)$$

$$2) \left(\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \right)$$

$$3) \left(\begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 6 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

$$4) \left(\begin{matrix} 8 \\ 3 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 8 \\ 4 \end{matrix} \right)$$

$$5) \left(\begin{matrix} 11 \\ 4 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 11 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

$$6) \left(\begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 9 \\ 2 \end{matrix} \right)$$

$$7) \left(\begin{matrix} 8 \\ 0 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 8 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

$$8) \left(\begin{matrix} 17 \\ 13 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 17 \\ 14 \end{matrix} \right)$$

$$9) \left(\begin{matrix} a+2 \\ b+1 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} a+2 \\ b+2 \end{matrix} \right)$$

$$10) \left(\begin{matrix} 2x-2 \\ x \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 2x-2 \\ x+1 \end{matrix} \right)$$

73

$$1) \left(\begin{matrix} 9 \\ 6 \end{matrix} \right)$$

$$2) \left(\begin{matrix} 10 \\ 5 \end{matrix} \right)$$

$$3) \left(\begin{matrix} 12 \\ 7 \end{matrix} \right)$$

$$4) \left(\begin{matrix} 11 \\ 9 \end{matrix} \right)$$

$$5) \left(\begin{matrix} x+1 \\ 7 \end{matrix} \right)$$

$$6) \left(\begin{matrix} x+2 \\ 1 \end{matrix} \right)$$

$$7) \left(\begin{matrix} 2x+4 \\ 9 \end{matrix} \right)$$

$$8) \left(\begin{matrix} 3x-1 \\ 12 \end{matrix} \right)$$

$$9) \left(\begin{matrix} 11 \\ x+6 \end{matrix} \right)$$

$$10) \left(\frac{21}{x+7} \right)$$

74

- 1) 7
- 2) 11
- 3) 5
- 4) 8
- 5) 1
- 6) 6
- 7) 6
- 8) 4
- 9) 9
- 10) 2
- 11) 4
- 12) 3

75

- 2) $2 \left(\frac{11}{6} \right)$
- 3) $2 \left(\frac{17}{9} \right)$
- 4) $2 \left(\frac{19}{10} \right)$
- 5) $2 \left(\frac{9}{5} \right)$
- 11) 4
- 12) 4
- 13) 4

78

- 1) $\frac{55a^4b^{16}}{9}$
- 2) $\frac{91a^{22}b^9}{13824} - \frac{143a^{14}b^{21}}{11664}$
- 3) $286ab^2; 1287a^2\sqrt[3]{a^2b}$
- 4) $\frac{35a^8b^6}{2}; -\frac{20\sqrt[3]{3a^{14}b^3}}{3}$
- 5) $\frac{7xy^5}{8}$
- 6) $-92378ab^{21}\sqrt[12]{a^6b^3};$
 $92378ab^2\sqrt{ab}$
- 7) $17ab^4$
- 8) 5005
- 9) $33a^2b$
- 10) $-\frac{336}{x^4}$
- 11) $210; 120t^2\alpha\sqrt{tg\alpha}$
- 12) $\frac{77\sqrt{2}}{24}; -\frac{77\sqrt{3}}{54}$
- 13) $-\frac{715}{576}; \frac{143\sqrt{2}}{72}$
- 14) $\frac{2431}{2^3x+26}; 99008 \cdot 2^{5x}$

76

- 1) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
- 2) $a^{10} - 5a^8 + 10a^6 - 10a^4 + 5a^2 - 1$
- 3) $x^2\sqrt{x} + 5x^2 + 10x\sqrt{x} + 10x + 5\sqrt{x} + 1$
- 4) $x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}$
- 5) $\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha \sin\alpha + 6\cos^2\alpha \sin^2\alpha + 4\cos\alpha \sin^3\alpha + \sin^4\alpha =$
 $= (1 + \sin 2\alpha)^2$
- 6) $\cos^3x - 3\cos^2x \sin x + 3\cos x \sin^2x - \sin^3x$
- 7) $\frac{a^4}{16} + a^2 + 6 + \frac{16}{a^2} + \frac{16}{a^4}$
- 8) $25x^5 + 5 \cdot 24x^4 + 5 \cdot 23x^3 + 5 \cdot 22x^2 + 5 \cdot 21x + 1$
- 9) $x^7 - 7\sqrt{2}x^6 + 42x^5 - 70\sqrt{2}x^4 + 140x^3 - 84\sqrt{2}x^2 + 56x - 8\sqrt{2}$
- 10) $x^2 + 8x^2\sqrt{x} + 24x^3 + 32x^3\sqrt{x} + 16x^4$
- 11) -8i
- 12) $-4 + 4i$
- 13) $64 + 64\sqrt{3}i$
- 14) $x - 12\sqrt[6]{x^5} + 60\sqrt[3]{x^2} - 160\sqrt{x} + 240\sqrt[3]{x} - 192\sqrt[6]{x} + 64$
- 15) $1 - 4\lg x + 6\lg^2x - 4\lg^3x + \lg^4x$
- 16) $\frac{a^5}{b^5} + 5\frac{a^3}{b^3} + 10\frac{a}{b} + 10\frac{b}{a} + 5\frac{b^3}{a^3} + \frac{b^5}{a^5}$
- 17) $a^{4x} - 12a^{3x} + 54a^{2x} - 108a^x + 81$
- 18) $a^6b^9 + 3a^4b^6 + 3a^2b^3 + 1$
- 19) $tg^6\alpha + 6tg^4\alpha + 15tg^2\alpha + 20 + 15ctg^2\alpha + 6ctg^4\alpha + ctg^6\alpha$
- 20) $x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 +$
 $+ 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$

77

- 1) 6, 15, 7, 3, 64
- 2) 6, 6, 7, 2, 64
- 3) 7, 21, 8, 6, 128
- 4) 7, 35, 8, 4, 128
- 5) 5, 10, 6, 3, 32
- 6) 11, 55, 12, 3, 2048
- 7) 10, 120, 11, 8, 1024
- 8) 12, 792, 13, 8, 4096
- 9) 9, 9, 10, 9, 512
- 10) 13, 78, 14, 12, 8192

79

- 1) $T_4; T_7$
- 2) $T_8; -12y^{21}$
- 3) $\frac{224a^3}{3b^8}; \text{No}$
- 4) $T_5; 8$
- 5) $-3; 43758$
- 6) $\frac{11}{294}; T_{10}$
- 7) $5005\cos^{21}x; 5005$
- 8) $8008; T_{13}$
- 9) $-2002; T_7$
- 10) $T_{15}; 840\sin^{36}2\alpha$

80

- 1) 29
- 2) 24
- 3) 44
- 4) 75
- 5) 14; 7
- 6) 20
- 7) 11
- 8) 19
- 9) 6
- 10) 14
- 11) 9
- 12) 6
- 13) 11
- 14) 15

81

- 1) 8; T_7
- 2) 12; T_3
- 3) 9; -84
- 4) -48620
- 5) $11/2$
- 6) 323
- 7) 10; 2
- 8) $(\pm 1, \mp 1)$
- 9) $(1, -3)$
- 10) $(3, \pm 1)$
- 11) $(3, 2)$
- 12) $(1, 2)$
- 13) $(2, -1)$
- 14) $(4, 3)$
- 15) $(2, 1)$
- 16) $(\sqrt{2}, 5)$
- 17) $(\pm 1, \pm 1)$
- 18) $(\pm 2, \mp 1); (\pm 1, \mp 2)$
- 19) $(3, -1); \left(\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{3 \mp \sqrt{3}i}{2} \right)$
- 20) $\left(1, -\frac{1}{2} \right)$
- 21) $(-2, 1)$
- 22) $(1, 4)$
- 23) $(4, -1); (1, 8)$
- 24) $(4, 9)$
- 25) $(2, 3)$
- 26) $(2, 1, 5)$
- 27) $(\sqrt{2}, 1, 5)$
- 28) $(\pm 1, \pm 2, 6)$
- 29) $(2, 1, 9)$

82

- 1) $\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$
- 2) $3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$
- 3) $\frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$
- 4) $\frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$
- 5) $\cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha$
- 6) $5 \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha$
- 7) $\frac{5 \operatorname{tg} \alpha - 10 \operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{tg}^5 \alpha}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \alpha + 5 \operatorname{tg}^4 \alpha}$
- 8) $\frac{\operatorname{ctg}^5 \alpha - 10 \operatorname{ctg}^3 \alpha + 5 \operatorname{ctg} \alpha}{5 \operatorname{ctg}^4 \alpha - 10 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}$
- 9) $\cos^6 \alpha - 15 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + 15 \cos^2 \alpha \sin^4 \alpha - \sin^6 \alpha$
- 10) $6 \cos^5 \alpha \sin \alpha - 20 \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha + 6 \cos \alpha \sin^5 \alpha$
- 11) $\frac{6 \operatorname{tg} \alpha - 20 \operatorname{tg}^3 \alpha + 6 \operatorname{tg}^5 \alpha}{1 - 15 \operatorname{tg}^2 \alpha + 15 \operatorname{tg}^4 \alpha - \operatorname{tg}^6 \alpha}$
- 12) $\frac{\operatorname{ctg}^6 \alpha - 15 \operatorname{ctg}^4 \alpha + 15 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{6 \operatorname{ctg}^5 \alpha - 20 \operatorname{ctg}^3 \alpha + 6 \operatorname{ctg} \alpha}$

- 13) $\cos^7 \alpha - 21 \cos^5 \alpha \sin^2 \alpha + 35 \cos^3 \alpha \sin^4 \alpha - 7 \cos \alpha \sin^6 \alpha$
- 14) $7 \cos^6 \alpha \sin \alpha - 35 \cos^4 \alpha \sin^3 \alpha + 21 \cos^2 \alpha \sin^5 \alpha - \sin^7 \alpha$
- 15) $\frac{7 \operatorname{tg} \alpha - 35 \operatorname{tg}^3 \alpha + 21 \operatorname{tg}^5 \alpha - \operatorname{tg}^7 \alpha}{1 - 21 \operatorname{tg}^2 \alpha + 35 \operatorname{tg}^4 \alpha - 7 \operatorname{tg}^6 \alpha}$
- 16) $\frac{\operatorname{ctg}^7 \alpha - 21 \operatorname{ctg}^5 \alpha + 35 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 7 \operatorname{ctg} \alpha}{7 \operatorname{ctg}^6 \alpha - 35 \operatorname{ctg}^4 \alpha + 21 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}$
- 17) $\cos^8 \alpha - 28 \cos^6 \alpha \sin^2 \alpha + 70 \cos^4 \alpha \sin^4 \alpha - 28 \cos^2 \alpha \sin^6 \alpha + \sin^8 \alpha$
- 18) $8 \cos^7 \alpha \sin \alpha - 56 \cos^5 \alpha \sin^3 \alpha + 56 \cos^3 \alpha \sin^5 \alpha - 8 \cos \alpha \sin^7 \alpha$
- 19) $\frac{8 \operatorname{tg} \alpha - 56 \operatorname{tg}^3 \alpha + 56 \operatorname{tg}^5 \alpha - 8 \operatorname{tg}^7 \alpha}{1 - 28 \operatorname{tg}^2 \alpha + 70 \operatorname{tg}^4 \alpha - 28 \operatorname{tg}^6 \alpha + \operatorname{tg}^8 \alpha}$
- 20) $\frac{\operatorname{ctg}^8 \alpha - 28 \operatorname{ctg}^6 \alpha + 70 \operatorname{ctg}^4 \alpha - 28 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}{8 \operatorname{ctg}^7 \alpha - 56 \operatorname{ctg}^5 \alpha + 56 \operatorname{ctg}^3 \alpha - 8 \operatorname{ctg} \alpha}$

83

- 1) $\frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$
- 2) $\frac{1}{4}(3 \sin \alpha - \sin 3\alpha)$
- 3) $\frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
- 4) $\frac{1}{16}(10 \sin \alpha - 5 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha)$
- 5) $\frac{1}{32}(10 - 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha - \cos 6\alpha)$
- 6) $\frac{1}{64}(35 \sin \alpha - 21 \sin 3\alpha + 7 \sin 5\alpha - \sin 7\alpha)$
- 7) $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$
- 8) $\frac{1}{4}(3 \cos \alpha + \cos 3\alpha)$
- 9) $\frac{1}{8}(3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)$
- 10) $\frac{1}{16}(10 \cos \alpha + 5 \cos 3\alpha + \cos 5\alpha)$
- 11) $\frac{1}{32}(10 + 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha + \cos 6\alpha)$
- 12) $\frac{1}{64}(35 \cos \alpha + 21 \cos 3\alpha + 7 \cos 5\alpha + \cos 7\alpha)$
- 13) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$
- 14) $\frac{1}{4}(\sin 3\alpha + \sin \alpha)$
- 15) $\frac{1}{8}(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha)$
- 16) $\frac{1}{16}(\sin 5\alpha + 3 \sin 3\alpha + 2 \sin \alpha)$
- 17) $\frac{1}{4}(\cos \alpha - \cos 3\alpha)$
- 18) $\frac{1}{8}(1 - \cos 4\alpha)$
- 19) $\frac{1}{16}(2 \cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha)$
- 20) $\frac{1}{32}(2 + \cos 2\alpha - 2 \cos 4\alpha - \cos 6\alpha)$
- 21) $\frac{1}{8}(2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha)$
- 22) $\frac{1}{16}(2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha)$
- 23) $\frac{1}{32}(3 \sin 2\alpha - \sin 6\alpha)$
- 24) $\frac{1}{64}(3 \sin \alpha + 3 \sin 3\alpha - \sin 5\alpha - \sin 7\alpha)$
- 25) $\frac{1}{16}(\cos 5\alpha - 3 \cos 3\alpha + 2 \cos \alpha)$
- 26) $\frac{1}{32}(\cos 6\alpha - 2 \cos 4\alpha - \cos 2\alpha + 2)$
- 27) $\frac{1}{64}(\cos 7\alpha - \cos 5\alpha - 3 \cos 3\alpha + 3 \cos \alpha)$
- 28) $\frac{1}{128}(3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha)$

84

- 1) 64
- 2) 1.024
- 3) 511
- 4) 1.816
- 5) 32.768
- 6) 120
- 7) 4.017
- 8) 1.012
- 9) 630
- 10) 148
- 11) 3.072
- 12) 1.535
- 13) 8.187
- 14) 1.002
- 15) 512
- 16) 256
- 17) 15.914
- 18) 7.099
- 19) 130.220
- 20) 63.004

85

- 1) $(3n-1)(2n+3)$
- 2) $3n^2+8n+1$
- 3) $(n+3)(7n-1)$
- 4) $\frac{1}{2}(3n-1)(n+4)$
- 5) $2n^2-7n+11$
- 6) n^3+n^2+5
- 7) $(n+2)(n^2+n+1)$
- 8) $(n+1)(3n-2)(2n+5)$
- 9) $2n^4-5n^3-n^2+n-1$
- 10) $n(n-3)(n^2+5n-1)$
- 11) $(n-3)(n-4)(n^2-n+1)$
- 12) $\frac{n^2+7n+3}{n^3+n^2+5n+1}$
- 13) $\frac{3n^2-10n+1}{n^4+2n^2-2}$
- 14) $(n-3)(n-4)(n-5)(3n^2+n+5)$

86

- 1) $2(x^2+24x+16)$
- 2) $2a(a^6+21a^5+14a^4-63a^3+14a^2+21a-7)$
- 5) 11
- 6) $\frac{1}{2}(n-2)$
- 7) 8
- 8) (6,3)
- 9) (7,4)
- 10) (5,2)
- 11) 165
- 12) T_{65}
- 13) $1820x^6$

88

- 1) -5
- 2) 9
- 3) -8
- 4) 3
- 5) 5
- 6) 4
- 7) -7
- 8) 8
- 9) -7
- 10) -3
- 11) -2
- 12) 7
- 13) 2
- 14) -4
- 15) 4

89

- 1) $\sqrt{41}$
- 2) $\sqrt{82}$
- 3) $\sqrt{290}$
- 4) $3\sqrt{5}$
- 5) $\sqrt{17}$
- 6) $2\sqrt{5}$
- 7) 5
- 8) 17
- 9) $2\sqrt{41}$
- 10) 10
- 11) $\sqrt{73}$
- 12) $4\sqrt{10}$
- 13) $\sqrt{193}$
- 14) $5\sqrt{5}$
- 15) $\sqrt{74}$
- 16) $\sqrt{281}$
- 17) $7\sqrt{5}$
- 18) $\sqrt{170}$
- 19) $2\sqrt{2}$
- 20) $\sqrt{29}$
- 21) 3

90

- 1) $5+\sqrt{101}+\sqrt{74}$
- 2) $\frac{23+\sqrt{401}}{2}$
- 9) 29
- 10) $\frac{15}{2}$
- 11) 15
- 12) 16
- 13) 15
- 14) 29
- 26) $\sqrt{9a^2+16b^2}$
- 27) $4\sqrt{m^2+4n^2}$

- 28) $\sqrt{4x^2+25}$
- 29) $\sqrt{2m^2+2m+13}$
- 30) $2\sqrt{a^2+2\sqrt{3a+3}}$
- 31) (2,1)
- 32) (1,-1)
- 33) (-3,-2)
- 34) (-3,7)
- 35) (16,0)
- 36) (0,-3)
- 37) (2,2)
- 38) (3,-2)
- 39) (-5,1)
- 40) (3,1)
- 41) (4,-3)'
- 42) (1,-6)
- 43) Si
- 44) No
- 45) Si
- 46) Si
- 47) No
- 53) -7; 9
- 54) 5; -1
- 55) -3; 7
- 56) (5,-1); (5,7)
- 57) (-11,1); (1,1)
- 58) $(-3, -\frac{32}{3})$; (-3,4)
- 59) $-\frac{11}{2}$; 2
- 60) (8,5); (-2,5)
- 61) -4; -2
- 67) $(x-5)^2+(y+2)^2=9$
- 68) $(x+3)^2+(y-7)^2<16$
- 69) $(x-3)^2+(y+4)^2\geq 25$
- 70) $(x-5)^2+y^2\leq 49$
- 71) $(x+3)^2+(y-2)^2>36$
- 72) $25<(x-3)^2+(y+2)^2<64$
- 73) $3x+2y-4=0$
- 74) $8x-10y+41=0$
- 75) $5x-3y-4=0$
- 76) $3x+5y-13=0$
- 77) (-8,4)

91

- 1) $(\frac{9}{2}, 3)$
- 2) $(1, \frac{7}{2})$
- 3) $(3, -\frac{1}{2})$
- 4) $(4-\sqrt{5}, -4)$
- 5) $(\frac{5}{12}, \frac{1}{20})$
- 6) $(\frac{25}{8}, \frac{5}{4})$
- 7) $(4a, -\frac{3b}{2})$
- 8) $(-\sqrt{a}, -3\sqrt{b})$
- 9) $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$

- 10) $(0, 5a - 2b)$
 15) $\sqrt{5}$
 16) $\sqrt{5}$
 17) $\sqrt{26}$
 18) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
 23) 5
 24) 13
 25) $2\sqrt{13}$
 26) $\frac{29}{2}$
 27) $\frac{\sqrt{445}}{2}; \frac{\sqrt{277}}{2}; 10$
 28) $5; \frac{\sqrt{226}}{2}; \frac{\sqrt{130}}{2}$
 34) $(0, -1); 2\sqrt{29}\pi; 29\pi$
 35) $(-1, 1); 10\pi; 25\pi$
 36) $(1, \frac{7}{2}); 3\sqrt{5}\pi; \frac{45\pi}{4}$
 37) $(\frac{\sqrt{3+3\sqrt{2}}}{2}, \frac{3}{2}); \sqrt{142-6\sqrt{6}\pi};$
 $\frac{(71-3\sqrt{6})\pi}{2}$
 38) $(1, 7)$
 39) $(-6, 4)$
 40) $(11, -2)$
 41) $(-4 + \sqrt{5}, 10 + \sqrt{3})$
 42) $(5a+b, 4a+5b)$
 43) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{15})$
 44) 5; 7
 45) -7; -6
 46) $a-b; b-3a$
 47) 0; 0
 48) $(5, 2); (1, -4); (-3, 8)$
 49) $(-3, 4); (9, 0); (1, -8)$
 50) $(3, 7); (-4, 0); (1, -4)$
 51) $(3, 6); (5, -2)$
 52) $(-3, 4); (-4, -1)$
 53) $(5, -3); (1, -5)$
 54) $(7, -7)$

92

- 1) $(-4, 7); (-1, 6)$
 2) $(-3, -\frac{9}{2}); (-2, -3); (-1, -\frac{3}{2});$
 $(0, 0); (1, \frac{3}{2})$
 3) $(-\frac{7}{5}, \frac{18}{5}); (\frac{1}{5}, \frac{21}{5});$
 $(\frac{9}{5}, \frac{24}{5}); (\frac{17}{5}, \frac{27}{5})$
 4) $(4, \frac{3}{5})$
 5) $(6, 5)$
 6) $(-9, -5)$
 7) $(2, -\frac{11}{2})$
 8) $(-8, -2)$
 9) $(3, -5)$
 10) $(9, \frac{39}{5})$
 11) $(\frac{5}{2}, \frac{13}{4})$
 12) $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{4})$

- 13) $(-7, -12)$
 14) $(-\frac{3}{5}, 4)$
 15) $(-\frac{9}{5}, 1)$
 16) $\frac{1}{3}$
 17) $-\frac{5}{3}$
 18) $\frac{2}{7}$
 19) $-\frac{5}{3}$
 20) 3
 21) $(-8, 3)$
 22) $(-10, 31)$
 26) $(1, 3)$
 27) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
 28) $(2, \frac{4}{3})$
 29) $(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$
 30) $(-5, -10)$
 31) $(-2, 1)$
 32) $(3, 11); (-1, -3)$
 33) $(1, 9); (-1, 1)$
 34) $(-4, 4); (10, 0); (-6, -4)$
 35) $(18, 15)$

93

- 1) $\frac{4}{3}; 53^\circ 7'$
 2) $-\frac{7}{3}; 125^\circ 32'$
 3) $\frac{26}{31}; 27^\circ$
 4) $-\frac{13}{6}; 114^\circ 46'$
 5) $\sqrt{3}; 60^\circ$
 6) $-1; 135^\circ$
 7) $-\frac{16}{39}; -\frac{46}{3}; -\frac{2}{3}$
 8) $-\frac{8}{3}; -\frac{2}{3}; \infty$
 9) $\frac{8}{9}; \frac{2}{3}; 0$
 10) $\frac{39}{5}$
 11) $\frac{3}{2}$
 12) 4
 13) -11
 14) $\frac{4\sqrt{3}-12}{3}$
 15) $\frac{-4\sqrt{3}-12}{3}$
 16) $4\sqrt{2}$
 17) $-4-4\sqrt{3}$
 18) $4+4\sqrt{3}$
 19) $4\sqrt{2}-8$
 20) $4\sqrt{3}-12$
 30) D
 31) N
 32) T
 33) 19
 34) 3
 35) 2
 36) $5-3\sqrt{2}$
 37) $(3, 4); (4, 3)$
 38) $(1, 7); (-9, -3)$

- 39) $(\frac{-5\pm 4\sqrt{55}}{5}, \frac{10\pm 2\sqrt{55}}{5})$
 40) $(-\frac{20}{7}, -\frac{25}{7})$
 41) $(-2, 6)$
 42) $(-4, 8)$
 43) $6x - 5y + 17 = 0$
 44) $(2 + \sqrt{3})x - y + \sqrt{3} = 0$
 45) $5x + 4y - 7 = 0$

94

- 1) 45°
 2) $32^\circ 28'$
 3) $126^\circ 52'$
 4) $68^\circ 3'$
 5) $41^\circ 56'; 63^\circ 52'; 74^\circ 12'$
 6) $97^\circ 56'; 53^\circ 20'; 28^\circ 42'$
 7) $137^\circ 38'; 16^\circ 9'; 26^\circ 12'$
 8) $125^\circ 4'; 27^\circ 5'; 27^\circ 50'$
 9) $-\frac{4}{3}$
 10) $\frac{29\sqrt{3}-40}{71}$
 11) $\frac{24-13\sqrt{3}}{3}$
 12) $\frac{-8-5\sqrt{3}}{11}$
 13) $-\frac{7}{9}$
 14) $\frac{63}{5}$
 15) 8
 16) 6
 17) 9
 18) $43^\circ 36'$
 19) $151^\circ 55'$
 23) $18^\circ 11'$
 24) $15^\circ 18'$
 25) $110^\circ 22'$
 29) $72^\circ 54'; 74^\circ 56'; 119^\circ 59'$
 30) $107^\circ 6'; 60^\circ 1'; 105^\circ 4'$

95

- 11) -3
 12) $-\frac{7}{2}$
 13) 10
 14) $\sqrt{5}$
 15) 11
 16) $3\sqrt{11}$
 17) $\frac{17}{5}$
 18) -3

97

- 1) $x = 3$
 2) $y = 4$
 3) $x = -5$
 4) $y = -2$
 5) $y = -10$
 6) $x = 0$
 7) $y = 0$
 8) $x - y = 0$
 9) $3x - y = 0$

- 10) $x - y + 7 = 0$
- 11) $3x + 4y - 3 = 0$
- 12) $xy + 2y - 1 = 0$
- 13) $6x - 3y + 7 = 0$
- 14) $y^2 - x = 0$
- 15) $y^2 - 6y - 8x + 25 = 0$
- 16) $x^2 + 10x - 4y + 29 = 0$
- 17) $x^2 - 8x + 16y = 0$
- 18) $4y^2 - 16y - 4x + 1 = 0$; Sí
- 19) $x^2 + y^2 - y = 0$; Sí
- 20) $8x - 6y - 3 = 0$; No
- 21) $3x - 2y - 1 = 0$
- 22) $2\sqrt{3}x + 8y - 5 = 0$; Sí
- 23) $5x + 8y - 76 = 0$; No
- 24) $5x - y = 0$
- 25) $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$; Sí

- 26) $x^2 + y^2 + 10x + 8y - 8 = 0$; No
- 27) $4x - 5y + 17 = 0$
- 28) $x^2 + y^2 + x - 5y - 3 = 0$; $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$
- 29) $3x - 7y - 7 = 0$; 4
- 30) $15x^2 - y^2 - 30x + 6y - 9 = 0$
- 31) $y = 0$
- 32) $7x^2 + 16y^2 - 28x - 32y - 68 = 0$
- 33) $25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$
- 34) $5x^2 - 4y^2 - 10x - 32y - 79 = 0$
- 35) $5x^2 - 7y^2 - 20x - 14y + 48 = 0$
- 36) $4x^2 + 3y^2 - 56x + 16y + 212 = 0$
- 37) $3x^2 - y^2 + 6x - 2y - 10 = 0$
- 38) $9x^2 + 8y^2 + 36x - 54y + 117 = 0$
- 39) $12x - 14y - xy - 98 = 0$
- 40) $7x + 24y + 47 = 0$
- 41) $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 1 = 0$

98

- 1) $x = 5$
- 2) $y = -7$
- 3) $y = 4$
- 4) $x = -9$
- 5) $x = -5$
- 6) $y = 2\sqrt{3}$
- 7) $y = 0, x = 6$; $y = 6, x = 0$
- 8) $y = 0, x = 10$; $y = 8, x = 0$
- 9) $y = -\frac{7}{2}; x = \frac{7}{2}$; $y = \frac{7}{2}; x = -\frac{7}{2}$
- 10) $y = -3\sqrt{2}; x = 0$; $y = 0; x = -3\sqrt{2}$
- 11) $y = 0, x = 0$; $y = 45, x = -28$
- 12) $y = -1, x = 5$; $y = 3, x = -2$
- 13) $y = -4, x = 1$; $y = 2, x = -7$
- 14) $y = -2, x = 2$; $y = 5, x = -3$

99

- 1) $3x - y + 14 = 0$
- 2) $4x + y - 29 = 0$
- 3) $\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$
- 4) $7x + y = 0$
- 5) $3x + 5y + 6 = 0$

- 6) $2x - 11y - 48 = 0$
- 7) $70x - 30y - 193 = 0$
- 8) $60x - 24y - 29 = 0$
- 9) $4\sqrt{3}x + 4y - 5\sqrt{2} = 0$
- 10) $3x + 2y - 23 = 0$
- 11) $15x - 6y + 37 = 0$
- 12) $x - 4y + 13 = 0$
- 13) $x - y + 18 = 0$
- 14) $3x + 3y + 2 = 0$
- 15) $9x - 7y + 23 = 0$
- 16) $x + y = 0$
- 17) $3x + 2y - 14 = 0$
- 18) $4x + 14y - 39 = 0$
- 19) $(16x - 6y - 33 = 0; 10x + 8y - 37 = 0;$
 $3x - 7y + 2 = 0); (8x - 3y - 25 = 0;$
 $5x + 4y - 11 = 0; 3x - 7y - 14 = 0);$
 $(10x + 11y - 34 = 0; 11x - 2y - 28 = 0;$
 $x - 13y + 6 = 0);$
 $\frac{\sqrt{221}}{2}; \frac{\sqrt{170}}{2}; \frac{5\sqrt{5}}{2}$
- 20) $(4x - 14y + 27 = 0; x + y + 3 = 0;$
 $2x + 8y - 1 = 0); (2x - 7y - 38 = 0;$
 $x + y - 7 = 0; x + 4y + 1 = 0);$
 $(19x - y - 13 = 0; 2x + 7y + 1 = 0;$
 $17x - 8y - 14 = 0);$
 $\frac{\sqrt{362}}{2}; \frac{\sqrt{53}}{2}; \frac{\sqrt{353}}{2}$
- 21) $(8x + 26y - 39 = 0; 8x - 22y + 23 = 0;$
 $4x + y - 4 = 0); (4x + 13y + 15 = 0;$
 $4x - 11y - 47 = 0; 4x + y - 16 = 0);$
 $(5x - 4y - 10 = 0; x = 2;$
 $3x + 4y - 6 = 0);$
 $\frac{3\sqrt{41}}{2}; 12; \frac{15}{2}$

100

- 1) $(-2, 1)$
- 2) $(0, 3)$
- 3) $(3, -2)$
- 4) $(4, -10)$
- 5) $(-5, -\frac{5}{2})$
- 6) $(2, -1)$
- 7) $(\frac{7}{2}, 5)$
- 8) $(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3})$
- 9) $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$
- 10) $(\sqrt{5}, -\sqrt{7})$
- 11) Sí; $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
- 12) No
- 13) Sí; $(\sqrt{3}, \sqrt{5})$
- 14) No
- 15) $9x - 3y + 19 = 0$
- 16) $4x + y - 20 = 0$
- 17) $\sqrt{3}x - y - 3 - \sqrt{2} = 0$
- 18) $10x + 10y - 11 = 0$
- 19) $3x - y - 27 = 0$
- 20) $3y - 5 = 0$

101

- 1) $3x - y - 15 = 0$
- 2) $8x - y + 23 = 0$

- 3) $3x - 2y - 10 = 0$
- 4) $5x + 8y - 37 = 0$
- 5) $2x + 7y - 29 = 0$
- 6) $x - 2y - 8 = 0$
- 7) $5x - 2y + 1 = 0$
- 8) $\sqrt{3}x + \sqrt{2}y - 4 = 0$

102

- 1) $y = -\frac{9}{5}x + 9; \frac{x}{5} + \frac{y}{9} = 1$
- 2) $y = 2x - 12; \frac{x}{6} + \frac{y}{-12} = 1$
- 3) $y = \frac{4}{3}x + 4; \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$
- 4) $y = -2x - 10; \frac{x}{-5} + \frac{y}{-10} = 1$
- 5) $y = -\frac{8}{3}x + 2; \frac{x}{3/4} + \frac{y}{2} = 1$
- 6) $y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}; \frac{x}{1} + \frac{y}{5/3} = 1$
- 7) $y = -2x - \frac{4}{3}; \frac{x}{-2/3} + \frac{y}{-4/3} = 1$
- 8) $y = \frac{2}{3}x + 12; \frac{x}{-18} + \frac{y}{12} = 1$
- 9) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 2; \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{-2} = 1$
- 10) $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}; \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$

103

- 1) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{1}{8}$
- 2) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{15} = 1$
- 3) $\frac{x}{17/3} + \frac{y}{17/4} = 1$
- 4) $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$
- 5) $4x - 3y + 12 = 0$
- 6) $x + 2y + 1 = 0$
- 7) $2x - y + 18 = 0; 4x + 5y - 20 = 0$
- 8) $2x - y - 6 = 0; 2x - 5y + 10 = 0$
- 9) $7x - y - 7 = 0; x + 3y - 12 = 0$
- 10) $2x + y - 4 = 0; 3x + 5y + 15 = 0$
- 11) $3x + y + 6 = 0; x + 3y - 6 = 0$
- 12) $x - 2y - 6 = 0$
- 13) $10x + y + 10 = 0; 5x + 2y - 10 = 0$
- 14) $4x + y + 8 = 0$
- 15) $x + y - 4 = 0$
- 16) $4x + 3y - 12 = 0$
- 17) $21x + 20y - 144 = 0; 3x + 4y - 24 = 0$
- 18) $x + 3y - 6 = 0$
- 19) $5x + y - 5 = 0$
- 20) $3x - 4y + 12 = 0$
- 21) $2x - 7y - 14 = 0$
- 22) $3x + y + 6 = 0$
- 23) $x + 2y - 4 = 0; x + 2y + 4 = 0$
- 24) $3x + y - 6 = 0; 3x + y + 6 = 0$
- 25) $4x + 3y - 12 = 0$
- 26) $5x + 12y - 60 = 0$
- 27) $5x + 3y - 15 = 0; 3x + 5y - 15 = 0$
- 28) $7x + 4y + 28 = 0; 4x + 7y - 28 = 0;$
 $4x + 7y + 28 = 0; 7x + 4y - 28 = 0$
- 29) $15x + 8y - 120 = 0; 8x + 15y - 120 = 0;$
- 30) $x - 5y - 5 = 0; x - 5y + 5 = 0$
- 31) $3x - 2y - 5 = 0$
- 32) $7x + 3y + 20 = 0$

8) 7

104

- 1) $\frac{5}{3}; 2$
- 2) $-7; 6$
- 3) $-\frac{3}{4}; \frac{5}{8}$
- 4) $\frac{5}{2}; \frac{7}{4}$
- 5) $-\frac{1}{5}; \frac{11}{9}$
- 6) $-\frac{p}{q}; -\frac{r}{q}$
- 7) Sí
- 8) No
- 9) Sí
- 10) Sí
- 11) Sí
- 12) No
- 13) Sí
- 14) Sí
- 15) No
- 16) No
- 17) No
- 18) Sí
- 19) Sí
- 20) Sí
- 21) -20
- 22) $-\frac{13}{4}$
- 23) $3; \frac{3}{4}$
- 24) $3; -\frac{1}{3}$
- 25) $-1; -2; -3; -4$
- 26) $-1; -2; -5$
- 27) $3x - y - 11 = 0$
- 28) $2x + 6y - 7 = 0$
- 29) $3x - 2y - 14 = 0$
- 30) $3x + 2y = 0$
- 31) $4x + 5y - 1 = 0$
- 32) (7, 2)
- 33) $7x - 11y + 24 = 0;$
 $3x + 7y - 19 = 0$

105

- 1) $144^{\circ}38'$
- 2) $68^{\circ}58'$
- 3) $114^{\circ}39'$
- 4) $124^{\circ}16'$
- 5) $128^{\circ}39'$
- 6) $126^{\circ}39'$
- 7) 7
- 8) 5
- 9) (4, 7)
- 10) (8, -9)
- 11) (1, -3)

106

- 1) 6
- 2) $\frac{7}{2}$
- 3) 1
- 4) $\sqrt{10}$
- 5) -4
- 6) -5
- 7) -6
- 3) $\frac{27\sqrt{13}}{26}$

- 9) $2\sqrt{5}$
- 10) -3
- 11) $\frac{26\sqrt{58}}{29}$; $\sqrt{58}$; 26
- 12) 5; 13; $\frac{65}{2}$
- 13) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$; $2\sqrt{10}$; 12
- 14) 4
- 15) $\frac{5}{2}$; -1
- 16) -3
- 17) -3 ; 17
- 18) 2
- 19) -63
- 20) 6
- 21) $x + y - 4 = 0$; $x - y - 2 = 0$
- 22) $4x - 3y - 6 = 0$; $8x - 15y + 6 = 0$
- 23) $4x + 3y - 10 = 0$; $24x + 7y + 6 = 0$
- 24) $x + 2y + 2 = 0$; $2x - 11y - 26 = 0$
- 25) $3x + 4y - 1 = 0$; $3x + 4y + 39 = 0$
- 26) $11x + 2y + 37 = 0$; $11x + 2y - 13 = 0$
- 27) $12x - 9y - 1 = 0$; $12x - 9y - 101 = 0$
- 28) $5x - y + 5 = 0$; $x + 5y + 1 = 0$
- 29) $4x + 8y - 5 = 0$; $16x - 8y + 5 = 0$
- 30) $171x - 302y + 9 = 0$;
 $57x + 194y + 3 = 0$
- 31) $13x - 16y = 0$; $304x + 247y - 425 = 0$
- 32) $4371x - 1538y - 1165 = 0$;
 $5469x + 3342y - 311 = 0$
- 33) $22x + 46y - 53 = 0$;
 $38x + 34y - 17 = 0$
- 34) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 44x - 8y + 84 = 0$
- 35) $x^2 + 9y^2 - 6xy - 2x + 6y + 1 = 0$
- 36) $25x^2 + y^2 + 10xy - 124x - 108y + 4 = 0$
- 37) $23x^2 + 3y^2 - 48xy + 24x - 16y + 4 = 0$
- 38) $9x - 33y - 13 = 0$; $11x + 3y + 13 = 0$
- 39) $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 724x - 118y + 3409 = 0$;
 $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 244x - 758y + 1649 = 0$
- 40) $x^2 - 8y^2 - 4x + 24y + 4 = 0$

107

- 1) $2x + y + 4 = 0$; $11x - 22y + 17 = 0$
- 2) $22x - 61y + 75 = 0$;
 $61x + 22y + 50 = 0$
- 3) $62x + 151y - 121 = 0$;
 $151x - 62y - 223 = 0$
- 4) $29x - 54y + 79 = 0$;
 $54x + 29y + 96 = 0$
- 5) $11x - 2y + 15 = 0$
- 6) $2x + y - 5 = 0$
- 7) $8x - y - 1 = 0$
- 8) $x + 2y - 2 = 0$
- 9) $x + 2y - 6 = 0$
- 10) $(10\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (5\sqrt{2} + 7\sqrt{5})y + 15\sqrt{2} - 9\sqrt{5} = 0$;
 $(2\sqrt{2} - \sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \sqrt{5})y + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 0$;
 $2x - y - 12 = 0$

108

- 1) 3
- 2) $\frac{14\sqrt{17}}{17}$

- 4) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
- 5) $\frac{7\sqrt{5}}{60}$
- 6) $\frac{9}{10}$
- 7) 54
- 8) 25
- 9) $\frac{75}{2}$
- 10) $24x - 7y + 153 = 0$;
 $24x - 7y - 147 = 0$
- 11) $y = 7x + 8$; $y = 7x - 20$
- 12) $4x + 3y = 0$; $4x + 3y - 11 = 0$
- 13) $y = \frac{17}{5}x + \frac{84}{5}$; $y = \frac{17}{5}x + \frac{6}{5}$

109

- 1) 46
- 2) 15
- 3) $\frac{275}{7}$
- 4) $\frac{51}{7}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
- 5) 40
- 6) $\frac{155}{2}$
- 7) 47
- 8) 35
- 9) $1; -29$
- 10) $0; -20$
- 11) 2
- 12) 0
- 19) 2
- 20) $\frac{3}{14}$

110

- 6) 2
- 7) 3
- 8) 4
- 9) 3; 2
- 10) $3; -\frac{21}{8}$

111

- 1) $y = \frac{3}{4}x + k$
- 2) $2x - 5y + k = 0$
- 3) $y = -\frac{1}{2}x + k$
- 4) $x + 2y - 1 + k(4x - 7y + 3) = 0$
- 5) $y + 2 = k(x - 7)$
- 6) Tienen pendiente 9
- 7) Pasan por el punto (3, -9)
- 8) Su abscisa en el origen es 5, es decir, pasan por (5, 0)
- 9) Pasan por la intersección de las rectas
 $2x - 3y = 0$ y $5x + y - 3 = 0$
- 10) Son paralelas a la recta $4x + 7y + C = 0$
- 11) Su ordenada en el origen es -6, es decir, pasan por (0, -6)
- 12) Su ordenada en el origen es -7
- 13) $3x - 2y - 14 = 0$
- 14) $4x - 7y - 41 = 0$
- 15) $5x - 2y - 1 = 0$
- 16) $5x + 2y - 18 = 0$

- 17) $3x - y - 13 = 0$
- 18) $4x - y - 3 = 0$
- 19) $7x - 3y - 36 = 0$
- 20) $3x + 4y + 5 = 0$; $3x + 4y - 25 = 0$
- 21) $7x - 24y + 178 = 0$; $7x - 24y - 172 = 0$
- 22) $2x + 5y - 29 = 0$
- 23) $y - 3 = 0$; $24x + 7y - 165 = 0$
- 24) $5x + 12y - 1 = 0$
- 25) $3x - 4y - 18 = 0$; $4x + 3y + 1 = 0$
- 26) $3x - y - 18 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$

113

- 1) (2, 3)
- 3) (-2, 7); (8, 3); (-4, -2)
- 4) (7, 5); (-1, -1)
- 5) $x^2 - 6x + 4y - 3 = 0$
- 6) $x^2 + 3y - 16 = 0$
- 7) $x^2 + y^2 - 36 = 0$
- 8) $x^2 + y^2 - x - 4y - 3 = 0$
- 9) ± 18
- 10) $3x - 11y + 4 = 0$; $99x + 27y + 2 = 0$
- 11) (1, -1); $(-\frac{9}{11}, \frac{29}{11})$
- 12) $\frac{1}{2}$; $(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})$
- 13) 5
- 14) (0, 3); $(\frac{111}{10}, \frac{67}{10})$
- 15) $(\frac{8}{3}, \frac{17}{3})$
- 16) (8, 5); (5, 0)
- 17) $x + y - 4 = 0$; $x - y - 6 = 0$
- 18) $5x + 3y - 30 = 0$
- 19) (6, 0); $x - 4y - 6 = 0$
- 20) $3x + 5y - 25 = 0$; $3x + 5y + 9 = 0$
- 21) $x - 2y - 6 = 0$; $2x + y - 7 = 0$
- 22) $x - 2y + 1 = 0$
- 23) 1:2; 2:3
- 24) $33^\circ 41'$
- 25) $x - 3y + 13 = 0$; $6x - y - 41 = 0$
- 26) (22/5, 0)
- 27) $2x - y = 0$; $x - 3y = 0$
- 28) $11x - 4y + 34 = 0$
- 29) $10x - 13y + 38 = 0$
- 30) $4x - 5y + 21 = 0$; $5x + 4y - 25 = 0$
- 31) $3x - 2y - 13 = 0$
- 32) $6x - 4y - 21 = 0$
- 33) (-1, 1); (4, 0); (3, 5); (-2, 6)
- 34) $(\frac{34}{5}, \frac{23}{5})$
- 35) 28
- 36) 21
- 37) (0, 0); (7, 7)
- 38) $3x + 2y - 3 = 0$; $3x - 2y - 3 = 0$
- 39) $x - 2y + 8 = 0$; $x + 2y - 8 = 0$; (0, 4); $5\sqrt{5}$
- 40) $x + 3y - 12 = 0$; $3x + y - 12 = 0$
- 41) $x + 2y - 5 = 0$; $2x - y - 5 = 0$
- 42) $7 \pm 5\sqrt{2}$
- 43) (4, 3)
- 44) $7x - 2y + 6 = 0$; $x + y + 6 = 0$; $2x - 7y + 21 = 0$
- 45) (2, 0)
- 46) (-1, 3)
- 47) a) $F = \frac{9}{5}C + 32$ o también: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$
b) 113°F
c) 32.22°C
d) -40°

- 48) 375 Newton; 33,33 cm
- 49) 150
- 50) (1, 0); (6, 0)
- 51) $G(-1, 0)$; $C(0, 2)$

114

- 1) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 6 = 0$
- 2) $x^2 + y^2 - 10x + 2y + 10 = 0$
- 3) $x^2 + y^2 + 4x - 8 = 0$
- 4) $36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 275 = 0$
- 5) $16x^2 + 16y^2 + 8x - 16y - 139 = 0$
- 6) $4x^2 + 4y^2 + 4y - 1 = 0$
- 7) $x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{2}y = 0$

115

- 1) (1, 2); 3
- 2) (2, 3); 5
- 3) (0, 5); 5
- 4) (-2, 0); 3
- 5) (-1, 3); $3\sqrt{2}$
- 6) (3, -4); $2\sqrt{5}$
- 7) $(\sqrt{5}, -\sqrt{3})$; $2\sqrt{2}$
- 8) $(-2, \sqrt{3})$; 2
- 9) $(\sqrt{7}, 0)$; $\sqrt{13}$
- 10) $(\frac{1}{2}, -1)$; 4
- 11) $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$; 3
- 12) $(-\frac{1}{2}, 3)$; $3\sqrt{2}$
- 13) $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$; 3
- 14) $(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$; $\frac{3}{2}$
- 15) $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$; 2
- 16) $(-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A})$; $\frac{\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}}{2A}$

116

- 1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 36 = 0$
- 2) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 95 = 0$
- 3) $x^2 + y^2 - 8y - 1 = 0$
- 4) $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 31 = 0$
- 5) $48x^2 + 48y^2 - 48x - 32y + 13 = 0$

117

- 1) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$
- 2) $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 4 = 0$
- 3) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 9 = 0$
- 4) $x^2 + y^2 + 2x - 9y + 15 = 0$

- 5) $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 6 = 0$
- 6) $x^2 + y^2 - 3x - y - 30 = 0$
- 7) $x^2 + y^2 - 11x - y + 16 = 0$
- 8) $x^2 + y^2 - 2x + y - 20 = 0$
- 9) $2x^2 + 2y^2 - 11x - y - 1 = 0$
- 10) $3x^2 + 3y^2 - x + 4y - 29 = 0$

118

- 1) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 35 = 0$
- 2) $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 23 = 0$
- 3) $x^2 + y^2 - 8x - 18 = 0$
- 4) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$
- 5) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 8 = 0$
- 6) $x^2 + y^2 - 2y - 12 = 0$
- 7) $x^2 + y^2 + 4y - 22 = 0$
- 8) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

119

- 1) (0, -4); (6, 2)
- 2) (3, 5); (-6, -4)
- 3) (5, 2); (3, 8)
- 4) (7, 6); (9, 0)
- 5) $(0, \frac{1}{2})$; $(-4, -\frac{7}{2})$
- 6) (2, 2)
- 7) (2, 1)
- 8) (-3, 2); (2, 5)
- 9) (1, 0); (2, 5); (-3, 0); (-4, 5)
- 10) (4, 0); (-1, 25); (-6, 0)
- 11) (0, 0)
- 12) (0, 1); (0, -5); (-5, 0); (-5, -4)

120

- 1) $3\sqrt{17}$
- 2) $3\sqrt{10}$
- 4) $4\sqrt{29}$
- 5) $\frac{3}{2}$; $-\frac{7}{2}$
- 6) $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 38 = 0$

121

- 1) $x^2 + y^2 - 3x - 6y = 0$
- 2) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
- 3) $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 27 = 0$
- 4) $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 10 = 0$
- 5) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$
- 6) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 45 = 0$
- 7) $x^2 + y^2 - 8x - 2y = 0$
- 8) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
- 9) $x^2 + y^2 + 6x - 12y + 36 = 0$

- 10) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$
- 11) $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$
- 12) $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 4 = 0$
- 13) $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 23 = 0$
- 14) $x^2 + y^2 + 12x + 2y - 43 = 0$
- 15) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 2 = 0$
- 16) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 12 = 0$
- 17) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$
- 18) $x^2 + y^2 - 4 = 0$
- 19) $x^2 + y^2 - 13 = 0$
- 20) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
- 21) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
- 22) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$
- 23) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$
- 24) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 7 = 0$
- 25) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 6 = 0$
- 26) $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 7 = 0$
- 27) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 16 = 0$
- 28) $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 12 = 0$
- 29) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$
- 30) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 29 = 0$
- 31) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 48 = 0$;

$$\left(x - \frac{166}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{511}{9}\right)^2 = \left(\frac{3575}{9\sqrt{65}}\right)^2$$

$$32) \left(x - 5\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{20}{3\sqrt{17}}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{5}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{7}\right)^2 = \left(\frac{60}{7\sqrt{17}}\right)^2$$

- 33) $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$
- 34) $13x^2 + 13y^2 + 3x + 71y = 0$
- 35) $x^2 + y^2 + 4x + 8y - 70 = 0$
- 36) $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 16 = 0$
- $(529x - 9351)^2 + (529y + 5539)^2 = 72424586$
- 37) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$
- 38) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 37 = 0$
- 39) $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 72 = 0$
- 40) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 52 = 0$
- 41) $x^2 + y^2 + 8x + 8y - 93 = 0$
- 42) $x^2 + y^2 - 10x + 2y - 42 = 0$
- 43) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$;
 $x^2 + y^2 - 58x - 58y + 841 = 0$
- 44) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$;
 $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$
- 45) $x^2 + y^2 - 16x - 4y + 28 = 0$;
 $x^2 + y^2 + 8x - 12y + 12 = 0$
- 46) $x^2 + y^2 + 14x + 4 = 0$;
 $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 16 = 0$

- 47) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$
 48) $x^2 + y^2 + x - 6y - 22 = 0$
 49) $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$
 50) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$
 51) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 28 = 0$;
 $x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0$
 52) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 13 = 0$;
 $2x^2 + 2y^2 - 25x - 57y + 221 = 0$
 53) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$
 54) $9x^2 + 9y^2 - 48x - 48y + 112 = 0$
 55) $64x^2 + 64y^2 - 400x - 496y + 1145 = 0$
 56) $x^2 + y^2 - 10x - 60 = 0$;
 $x^2 + y^2 + 4x - 22y + 40 = 0$

122

- 1) 23π ; $2\sqrt{23}\pi$
 2) 7π ; $2\sqrt{7}\pi$
 3) 25π ; 10π
 4) $c\pi$; $2\sqrt{c}\pi$
 9) $\frac{7\pi}{5}$
 10) $\frac{6\pi - 15\sqrt{5} + 15}{10}$
 11) 39
 12) 17
 13) $x^2 + y^2 - 2x - 28 = 0$
 14) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 53 = 0$
 15) $9x^2 + 9y^2 - 84x - 38y + 149 = 0$
 16) 17,02286
 17) $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$;
 $x^2 + y^2 + 30x - 31 = 0$;
 $9x^2 + 9y^2 - 210x - 240y + 1801 = 0$;
 $9x^2 + 9y^2 - 210x + 240y + 1801 = 0$
 18) $301x + 84y - 137 = 0$
 19) 5
 20) $3x - 2y - 16 = 0$
 21) $5x + 3y + 11 = 0$
 22) $\pm \frac{3}{4}$
 23) $\pm \frac{2\sqrt{5}}{5}$
 24) $\frac{-10 \pm \sqrt{73}}{6}$
 25) 5; -15
 26) $\pm \sqrt{A^2 + B^2} R - Ax_0 - By_0$
 27) $3x - 7y - 42 = 0$;
 $3x - 7y + 16 = 0$
 28) $9x + 5y - 29 = 0$
 29) $7x + y - 25 = 0$;
 $7x + y + 25 = 0$
 30) (5, 2); (-2, -5);
 $\left(\frac{-13 \pm \sqrt{353}}{6}, \frac{-13 \pm \sqrt{353}}{6} \right)$
- 31) $7\sqrt{2}$; $4\sqrt{2}$
 32) $\frac{50}{3}$
 33) (-7, 6)
 34) (1, 4)
 35) 10π
 36) $\frac{77}{3}$
 37) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 1 = 0$;
 $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 1 = 0$;
 $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 1 = 0$;
 $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 1 = 0$
 38) $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 28 = 0$;
 $153x^2 + 153y^2 + 1944x - 54y + 4284 = 0$
 42) 3; -7
 43) $71^\circ 34'$
 44) $63^\circ 26'$
 45) $17x + 6y + 117 = 0$;
 $2x + 3y = 0$; $36^\circ 52'$
 46) 60°
 47) $3\sqrt{10}$; $\frac{9\sqrt{10}}{2}$; $\frac{\sqrt{10}}{2}$;
 $\frac{10 - \sqrt{10}}{2}$; 15
 48) $2x - 5y + 32 = 0$;
 $2x - 5y - 26 = 0$
 49) $7x + 3y - 67 = 0$;
 $7x + 3y + 49 = 0$
 50) $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$;
 $25x^2 + 25y^2 - 76x - 82y = 0$
 51) $x^2 + y^2 - 12x - 12y + 36 = 0$
 52) $x^2 + y^2 - (8 + 4\sqrt{2})x - (8 + 4\sqrt{2})y + 24 + 16\sqrt{2} = 0$
 54) $\frac{8}{3}r$
 55) $\frac{8\sqrt{3}}{7}r$; $\frac{4\sqrt{10}}{7}r$; $\frac{4\sqrt{6}}{7}r$
 56) $\frac{1}{3}\sqrt{7081}r$
 57) $2\sqrt{2}r$
 58) $2\sqrt{26 - 18\sqrt{2} - 14\sqrt{3} + 10\sqrt{6}}r$
 59) $\frac{4\sqrt{14}}{9}r$
 60) $\frac{\sqrt{15605}}{72}r$
 61) $\frac{2}{3}\sqrt{129}r$
 62) $3\sqrt{3}r^2$
 63) 3,92699 cm³
 64) $x - y = 0$; $x + y = 0$
 65) $x - y - 1 = 0$; $x + y - 5 = 0$
 66) $x^2 + y^2 - 12x - 18y + 97 = 0$;
 (2, 7); (8, 5)
 67) $x^2 + y^2 - 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 8 = 0$;
 $x^2 + y^2 + 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 8 = 0$;
 $x^2 + y^2 - (8 + 4\sqrt{2})x - (8 + 4\sqrt{2})y + 24 + 16\sqrt{2} = 0$;
 $x^2 + y^2 - (8 - 4\sqrt{2})x - (8 - 4\sqrt{2})y + 24 - 16\sqrt{2} = 0$

C	a	b	Or	c	AA', FF', BB'	e	Directriz	L.R.
1) (-5,4)	6	3	∇	$3\sqrt{3}$	$(-5, 4 \pm 6), (-5, 4 \pm 3\sqrt{3}), (-5 \pm 3, 4)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$y = 4 \pm 4\sqrt{3}$	3
2) (-2,0)	5	3	H	4	$(-2 \pm 5, 0), (-2 \pm 4, 0), (-2, \pm 3)$	$\frac{4}{3}$	$x = -2 \pm \frac{25}{4}$	$\frac{18}{5}$
3) (2,-3)	2	$\sqrt{3}$	H	1	$(2 \pm 2, -3), (2 \pm 1, -3), (2, -3 \pm \sqrt{3})$	$\frac{1}{2}$	$x = 2 \pm 4$	3
4) (-2,1)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	V	1	$(-2, 1 \pm \sqrt{3}), (-2, 1 \pm 1), (-2 \pm \sqrt{2}, 1)$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$y = 1 \pm 3$	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$
5) (0,0)	2	$\sqrt{2}$	H	$\sqrt{2}$	$(\pm 2, 0), (\pm \sqrt{2}, 0), (0, \pm \sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x = \pm 2\sqrt{2}$	2
6) (-1,3)	4	3	V	$\sqrt{7}$	$(-1, 3 \pm 4), (-1, 3 \pm \sqrt{7}), (-1 \pm 3, 3)$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$y = 3 \pm \frac{16\sqrt{7}}{7}$	$\frac{9}{2}$
7) (6,-4)	7	6	H	$\sqrt{13}$	$(6 \pm 7, -4), (6 \pm \sqrt{13}, -4), (6, -4 \pm 6)$	$\frac{\sqrt{13}}{7}$	$x = 6 \pm \frac{49\sqrt{13}}{13}$	$\frac{72}{7}$
8) (5,1)	8	4	V	$4\sqrt{3}$	$(-5, 1 \pm 8), (-5, 1 \pm 4\sqrt{3}), (-5 \pm 4, 1)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$y = 1 \pm \frac{16\sqrt{3}}{3}$	4
9) (-7,0)	4	$\sqrt{7}$	H	3	$(-7 \pm 4, 0), (-7 \pm 3, 0), (-7, \pm 3)$	$\frac{3}{4}$	$x = -7 \pm \frac{16}{3}$	$\frac{7}{2}$
10) (3,7)	3	2	V	$\sqrt{5}$	$(3, 7 \pm 3), (3, 7 \pm \sqrt{5}), (3 \pm 2, 7)$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$y = 7 \pm \frac{9\sqrt{5}}{5}$	$\frac{8}{3}$
11) (5,-2)	4	2	H	$2\sqrt{3}$	$(5 \pm 4, -2), (5 \pm 2\sqrt{3}, -2), (5, -2 \pm 2)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = 5 \pm \frac{8\sqrt{3}}{3}$	2
12) (-2,1)	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	H	$\sqrt{6}$	$(-2 \pm 2\sqrt{2}, 1), (-2 \pm \sqrt{6}, 1), (-2, 1 \pm \sqrt{2})$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = -2 \pm \frac{4\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{2}$
13) (0,2)	5	3	H	4	$(\pm 5, 2), (\pm 4, 2), (0, 2 \pm 3)$	$\frac{4}{3}$	$x = \pm \frac{25}{4}$	$\frac{18}{5}$
14) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$	3	2	H	$\sqrt{5}$	$(\frac{1}{2} \pm 3, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2} \pm \sqrt{5}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{3} \pm 2)$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$x = \frac{1}{2} \pm \frac{9\sqrt{5}}{5}$	$\frac{8}{3}$
15) (5,0)	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	V	$\frac{\sqrt{15}}{3}$	$(5, \pm \sqrt{3}), (5, \pm \frac{\sqrt{15}}{3}), (5 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0)$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$y = \pm \frac{3\sqrt{15}}{5}$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$
16) $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$	6	2	V	$4\sqrt{2}$	$(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \pm 6), (\frac{2}{3}, -\frac{1}{2} \pm 4\sqrt{2}), (\frac{2}{3} \pm 2, -\frac{1}{2})$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$	$y = -\frac{1}{2} \pm \frac{9\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4}{3}$

125

- $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$
- $9x^2 + 16y^2 - 36x - 64y - 44 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 - 36x - 189 = 0$
- $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y - 44 = 0$
- $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 27 = 0$
- $5x^2 + 9y^2 + 20x - 54y - 79 = 0$
- $9x^2 + 5y^2 + 54x - 30y + 81 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 + 72x + 200y + 319 = 0$
- $16x^2 + 25y^2 - 64x - 100y - 236 = 0$
- $5x^2 + y^2 - 10x - 2y - 14 = 0$
- $64x^2 + 15y^2 + 256x - 30y + 31 = 0$
- $25x^2 + 4y^2 - 150x + 8y + 129 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0$
- $41x^2 + 16y^2 - 328x - 160y + 400 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 + 54x + 350y + 406 = 0$
- $49x^2 + 33y^2 + 294x - 330y - 351 = 0$
- $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$
- $9x^2 + 49y^2 - 126x - 294y + 441 = 0$
- $9x^2 + 16y^2 - 36x - 108 = 0$
- $x^2 + 12y^2 + 6x - 24y - 43 = 0$
- $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$

- $3x^2 + 4y^2 - 48 = 0$
 $7x^2 + 36y^2 - 252 = 0$
- $8x^2 + 3y^2 - 35 = 0$
- $x^2 + 4y^2 - 5 = 0$
- $21x^2 + 25y^2 - 84x - 50y - 1991 = 0$
- $4x^2 + y^2 - 24x - 12y + 36 = 0$
- $3x^2 + 4y^2 - 108 = 0$
- $24x^2 + 49y^2 - 288x - 392y + 472 = 0$
- $25x^2 + 4y^2 + 150x - 56y + 321 = 0$
- $100x^2 + 484y^2 - 1500x - 1452y + 3689 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 + 36x - 150y - 639 = 0$
- $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y + 4 = 0$
- $x^2 + 4y^2 - 52 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 + 36x + 100y - 89 = 0$
- $7x^2 + 16y^2 - 508 = 0$
- $9x^2 + 5y^2 - 36x - 10y - 4 = 0$
- $16x^2 + 25y^2 - 96x + 50y - 231 = 0$
- $x^2 + 4y^2 + 2x - 16y - 83 = 0$
- $117x^2 + 203y^2 + 21x - 315y - 7838 = 0$
- $13x^2 + 23y^2 - 51x - 19y - 4 = 0$
- $3x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 5 = 0$
- $4x^2 + 3y^2 + 24y - 60 = 0$
- $25x^2 + 4y^2 - 100x - 40y + 100 = 0$

- 43) $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y - 12 = 0$
 44) $49x^2 + 36y^2 - 294x - 144y - 1179 = 0$
 45) $x^2 + 4y^2 - 4x + 40y + 84 = 0$
 46) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 72y = 0$;
 $9x^2 + 4y^2 - 54x + 32y - 35 = 0$
 47) $9x^2 + 25y^2 - 54x - 100y - 44 = 0$
 48) $25x^2 + 9y^2 + 50x - 36y - 164 = 0$

- 16) $\sqrt{10}$
 18) $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$
 19) $x + y - 5 = 0$; $x - y - 5 = 0$
 20) $x + 6y - 15 = 0$; $x - 6y + 15 = 0$
 21) $x + 3y - 9 = 0$; $x - 3y + 15 = 0$
 22) $4x - 5y - 10 = 0$
 23) $\sqrt{13}$
 24) $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$
 26) $3x^2 + 2y^2 - 84 = 0$
 27) $4x^2 + 5y^2 - 120 = 0$
 29) $2x + 11y - 10 = 0$; $x - 2y - 5 = 0$
 30) $x - 4y + 17 = 0$; $8x + 19y - 68 = 0$
 31) $3\sqrt{5}$
 32) $3x^2 + y^2 - 30x - 6y + 57 = 0$
 34) $\frac{8\sqrt{10}}{5}$
 35) $\left(-\frac{115}{13}, \pm \frac{160\sqrt{3}}{13}\right)$
 36) $(-3, 1)$; $(-3, 5)$; $(1, 5)$; $(1, 1)$
 37) $\left(\pm \frac{4\sqrt{5}}{5}, \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$; $\left(\pm \frac{4\sqrt{5}}{5}, \mp \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
 38) $\frac{\sqrt{10}}{5}$
 39) $\left(1 \pm \sqrt{15}, 4\right)$
 41) $16x^2 + 7y^2 - 1008 = 0$

126

- 3) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$; $4\sqrt{3}$
 4) No; sí
 5) $3x - 4y + 13 = 0$; $x + 3 = 0$
 6) 152 y 147 millones de km
 7) $4\sqrt{21}$
 8) $\frac{38\sqrt{17}}{17}$; $2\sqrt{17}$
 9) $7x - 6y + 33 = 0$; $7x + 6y + 9 = 0$
 10) $\frac{1}{2}$
 11) $\frac{\sqrt{2ab}}{\sqrt{a^2+b^2}}$
 12) $3x + 2y - 21 = 0$; $3x + 2y - 1 = 0$
 13) $x - y + 9 = 0$; $x - y + 1 = 0$
 14) $x - 32y - 166 = 0$; $x - 32y + 92 = 0$
 15) $\frac{\pm\sqrt{k^2-b^2}}{a}$

127

	C	a	b	Or	c	AA', FF', BB'	e	Directrices	Asíntotas	L.R.
1)	(3, -2)	4	3	H	5	$(3 \pm 4, -2)$, $(3 \pm 5, -2)$, $(3, -2 \pm 3)$	$\frac{5}{4}$	$x = \pm 3 \pm \frac{16}{5}$	$3x - 4y - 17 = 0$ $3x + 4y - 1 = 0$	$\frac{9}{2}$
2)	(0, 4)	5	2	H	$\sqrt{29}$	$(\pm 5, 4)$, $(\pm \sqrt{29}, 4)$, $(0, 4 \pm 2)$	$\frac{\sqrt{29}}{5}$	$x = \pm \frac{25\sqrt{29}}{29}$	$2x \pm 5y \mp 20 = 0$	$\frac{8}{5}$
3)	(-1, -2)	$\sqrt{5}$	3	V	$\sqrt{14}$	$(-1, -2 \pm \sqrt{5})$, $(-1, -2 \pm \sqrt{14})$, $(-1 \pm 3, -2)$	$\frac{\sqrt{70}}{3}$	$y = -2 \pm \frac{5\sqrt{14}}{14}$	$\sqrt{5}x \pm 3y \pm 6 + \sqrt{5} = 0$	$\frac{18\sqrt{5}}{5}$
4)	(5, 0)	1	2	V	$\sqrt{5}$	$(5, \pm 1)$, $(5, \pm \sqrt{5})$, $(5 \pm 2, 0)$	$\sqrt{5}$	$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$	$x \pm 2y - 5 = 0$	8
5)	(7, 11)	3	2	H	$\sqrt{13}$	$(7 \pm 3, 11)$, $(7 \pm \sqrt{13}, 11)$, $(7, 11 \pm 2)$	$\frac{\sqrt{13}}{3}$	$x = 7 \pm \frac{9\sqrt{13}}{13}$	$3x - 2y + 1 = 0$ $3x + 2y - 43 = 0$	$\frac{8}{3}$
6)	(1, -2)	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	H	6	$(1 \pm 2\sqrt{3}, -2)$, $(1 \pm 6, -2)$, $(1, -2 \pm 2\sqrt{6})$	$\sqrt{3}$	$x = 1 \pm 2$	$\sqrt{2}x \pm y \pm 2 - \sqrt{2} = 0$	$8\sqrt{3}$
7)	(0, 2)	$\sqrt{6}$	3	V	$\sqrt{15}$	$(0, 2 \pm \sqrt{6})$, $(0, 2 \pm \sqrt{15})$, $(\pm 3, 2)$	$\frac{\sqrt{10}}{3}$	$y = 2 \pm \frac{2\sqrt{15}}{3}$	$\sqrt{6}x \pm 3y \mp 6 = 0$	$3\sqrt{6}$
8)	(0, 0)	2	2	V	$2\sqrt{2}$	$(0, \pm 2)$, $(0, \pm 2\sqrt{2})$, $(\pm 2, 0)$	$\sqrt{2}$	$y = \pm \sqrt{2}$	$x \pm y = 0$	4
9)	(-4, 5)	5	6	H	$\sqrt{61}$	$(-4 \pm 5, 5)$, $(-4 \pm \sqrt{61}, 5)$, $(-4, 5 \pm 6)$	$\frac{\sqrt{61}}{5}$	$x = -4 \pm \frac{25\sqrt{61}}{61}$	$5x - 6y + 10 = 0$ $5x + 6y - 50 = 0$	$\frac{72}{5}$
10)	(-5, 6)	3	2	V	$\sqrt{13}$	$(-5, 6 \pm 3)$, $(-5, 6 \pm \sqrt{13})$, $(-5 \pm 2, 6)$	$\frac{\sqrt{13}}{3}$	$y = 6 \pm \frac{9\sqrt{13}}{13}$	$2x - 3y + 28 = 0$ $2x + 3y - 8 = 0$	$\frac{8}{3}$
11)	(-2, 3)	$2\sqrt{2}$	4	V	$2\sqrt{6}$	$(-2, 3 \pm 2\sqrt{2})$, $(-2, 3 \pm 2\sqrt{6})$, $(-2 \pm 4, 3)$	$\sqrt{3}$	$y = 3 \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$	$\sqrt{2}x \pm 2y \mp 6 + 2\sqrt{2} = 0$	$8\sqrt{2}$
12)	(-2, 3)	$\sqrt{10}$	$\sqrt{6}$	H	4	$(-2 \pm \sqrt{10}, 3)$, $(-2 \pm 4, 3)$, $(-2, 3 \pm \sqrt{6})$	$\frac{2\sqrt{10}}{3}$	$x = -2 \pm \frac{4}{3}$	$\sqrt{15}x \pm 5y \mp 15 + 2\sqrt{15} = 0$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$
13)	(3, 3)	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	V	$3\sqrt{2}$	$(3, 3 \pm 2\sqrt{3})$, $(3, 3 \pm \sqrt{2})$, $(3 \pm \sqrt{6}, 3)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$y = 3 \pm 2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}x \pm y \mp 3 - 2\sqrt{3} = 0$	$2\sqrt{3}$
14)	(1, 0)	$\sqrt{2}$	6	H	$\sqrt{38}$	$(1 \pm \sqrt{2}, 0)$, $(1 \pm \sqrt{38}, 0)$, $(1, \pm 6)$	$\sqrt{19}$	$x = 1 \pm \frac{\sqrt{38}}{19}$	$3\sqrt{2}x \pm y - 3\sqrt{2} = 0$	$36\sqrt{2}$
15)	(-3, 9)	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	V	$\sqrt{14}$	$(-3, 9 \pm \sqrt{7})$, $(-3, 9 \pm \sqrt{14})$, $(-3 \pm \sqrt{7}, 9)$	$\sqrt{2}$	$y = 9 \pm \frac{\sqrt{14}}{2}$	$x - y + 12 = 0$ $x + y - 6 = 0$	$2\sqrt{7}$
16)	(0, 0)	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$	H	$\frac{\sqrt{705}}{15}$	$\left(\pm \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$, $\left(\pm \frac{\sqrt{705}}{15}, 0\right)$, $\left(0, \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{235}}{10}$	$x = \pm \frac{4\sqrt{705}}{141}$	$27x \pm 20y = 0$	$\frac{9\sqrt{5}}{3}$

C	a	b	Or	c	AA', FF', BB'	e	Directrices	Asintotas	L.R.	
17)	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	V	$\frac{\sqrt{34}}{2}$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{34}}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{34}}{2}), (\frac{1}{2} \pm \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$	$\frac{\sqrt{34}}{5}$	$y = \frac{3}{4} \pm \frac{25\sqrt{34}}{68}$	$20x - 12y - 1 = 0$ $20x + 12y - 19 = 0$	$\frac{9}{5}$
18)	$(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{3}$	H	6	$(-\frac{1}{3} \pm 2\sqrt{6}, \frac{1}{6}), (-\frac{1}{3} \pm 6, \frac{1}{6}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{6} \pm 2\sqrt{3})$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$x = -\frac{1}{3} \pm 4$	$3\sqrt{2}x \pm 6y \mp 1 + \sqrt{2} = 0$	$2\sqrt{6}$

128

- $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y + 29 = 0$
- $x^2 - 4y^2 + 4x - 24y - 48 = 0$
- $16x^2 - 25y^2 + 64x - 50y - 361 = 0$
- $4x^2 - y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$
- $11x^2 - 25y^2 - 66x - 100y - 264 = 0$
- $49x^2 - 9y^2 - 196x + 54y - 556 = 0$
- $16x^2 - 9y^2 - 32x + 18y - 137 = 0$
- $4x^2 - 9y^2 - 8x - 18y - 41 = 0$
- $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y - 91 = 0$
- $16x^2 - 9y^2 - 96x + 36y - 36 = 0$
- $4x^2 - y^2 - 32 = 0$
- $5x^2 - 4y^2 + 19 = 0$
- $9x^2 - 4y^2 + 90x - 16y + 81 = 0$
- $9x^2 - 8y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$
- $5x^2 - 4y^2 + 10x - 8y - 79 = 0$
- $4x^2 - 21y^2 + 16x + 126y - 89 = 0$
- $9x^2 - 4y^2 - 36x + 8y + 68 = 0$
- $9x^2 - 16y^2 + 18x - 64y + 89 = 0$
- $4x^2 - 5y^2 - 16x + 10y + 31 = 0$
- $3x^2 - y^2 + 8y - 28 = 0$
- $4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$
- $20x^2 - 16y^2 + 20x - 48y - 351 = 0$
- $5x^2 - 4y^2 + 30x - 16y - 51 = 0$
- $100x^2 - 36y^2 - 700x + 108y + 919 = 0$
 $100x^2 - 36y^2 - 700x + 108y + 1369 = 0$
- $4x^2 - y^2 - 20x + 61 = 0$
- $2x^2 - y^2 + 12x - 18y - 87 = 0$
- $x^2 - 3y^2 - 4x - 30y + 59 = 0$
- $x^2 - 3y^2 - 6x + 21 = 0$
- $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$
- $4x^2 - 25y^2 - 8x + 150y - 321 = 0$
- $4x^2 - y^2 + 4y + 12 = 0$
- $16x^2 - 9y^2 - 192x - 18y + 711 = 0$
- $25x^2 - 144y^2 + 50x - 864y - 4871 = 0$
- $64x^2 - 225y^2 + 450y + 14175 = 0$
- $x^2 - y^2 + 6x + 10y - 24 = 0$
- $9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 196 = 0$
- $108x^2 - y^2 - 1080x - 8y + 2720 = 0$
- $x^2 - 16y^2 + 4x - 96y - 156 = 0$
- $x^2 - 2y^2 - 16x + 4y + 50 = 0$
- $3x^2 - y^2 - 6x + 10y - 25 = 0$
- $x^2 - y^2 - 2\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}y - 18 = 0$

- $9x^2 - 4y^2 - 54x + 32y - 127 = 0$
 $9x^2 - y^2 - 54x + 8y + 56 = 0$
- $4x^2 - 25y^2 - 8x - 100y - 196 = 0$
- $x^2 - 11y^2 - 25 = 0$
- $11x^2 - 4y^2 - 44x - 24y + 108 = 0$
- $9x^2 - 5y^2 - 36x - 20y + 52 = 0$
- $15x^2 - 16y^2 - 60x + 32y - 75 = 0$
- $9x^2 - 16y^2 + 36x + 96y - 252 = 0$
- $2x^2 - y^2 - 16x + 6y - 1 = 0$
- $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 3 = 0$
- $4x^2 - 3y^2 - 32x - 18y + 13 = 0$
- $x^2 - y^2 - 10x + 4y + 14 = 0$
- $x^2 - 3y^2 + 2x - 18y - 14 = 0$
- $7x^2 - 9y^2 + 70x + 36y + 76 = 0$
- $x^2 - 3y^2 - 4x + 24y - 32 = 0$
- $7x^2 - 9y^2 - 42x + 18y - 198 = 0$
- $9x^2 - y^2 + 72x - 2y + 152 = 0$
- $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 15 = 0$
- $2x^2 - 2y^2 + 12x + 16y - 5 = 0$

129

- $21x^2 - 4y^2 - 126x + 16y + 89 = 0$
- $9x^2 - 16y^2 - 72x + 96y - 144 = 0$
- $5x^2 - 4y^2 - 120 = 0$
- $252x^2 - 4y^2 - 1008x + 24y + 909 = 0$
- $3x^2 - y^2 + 4y - 52 = 0$
- $96^\circ 23'$
- $106^\circ 16'$
- 90°
- $7^\circ 24'$
- $(7 \pm 4\sqrt{2}, 7 \pm 4\sqrt{2})$
- 3
- $(\frac{48}{5}, \pm \frac{3\sqrt{119}}{5})$
- $(\pm 2, \pm 2); (\pm 2, \mp 2)$
- $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 68 = 0$
- $3x^2 - y^2 - 6x + 6y - 29 = 0$
- $2x^2 - 3y^2 - 4 = 0$
- 12
- $\frac{15}{2}$
- 5
- $3x - 4y \pm 10 = 0$
- $2x - y - 5 = 0$; $2x - y + 5 = 0$
- $x + 3y = 0$; $x + 3y + 14 = 0$
- $(-4, 5); (4, -9); \frac{12\sqrt{17}}{17}; \frac{6\sqrt{17}}{17}$
- $4x - 3y - 20 = 0$; $2x + y = 0$

$$\begin{aligned} 25) & 3x + 5y + 12 = 0; 5x - 13y + 84 = 0; 52^\circ \\ 26) & x - 3y + 16 = 0; 3x + 5y + 6 = 0; 4\sqrt{5} \\ 27) & 3x^2 - y^2 + 18x - 2y + 8 = 0 \\ 28) & x^2 - y^2 + 2x + 4y + 8 = 0 \\ 29) & x^2 - 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30) & 4x^2 - 5y^2 + 16x + 30y - 49 = 0 \\ 31) & 7x^2 - y^2 + 28x - 35 = 0 \\ 34) & 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \\ 35) & x^2 - 9y^2 - 9 = 0 \\ 40) & e = |\sec \alpha| \end{aligned}$$

130

	C	Eje	Abierta hacia	p	Foco	Directriz
1)	$(-2, 1)$	V	Arriba	1	$(-2, 2)$	$y = 0$
2)	$(-2, 3)$	H	Derecha	$\frac{3}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 3)$	$2x + 7 = 0$
3)	$(5, -1)$	V	Abajo	$-\frac{1}{4}$	$(5, -\frac{5}{4})$	$4y + 3 = 0$
4)	$(4, -3)$	V	Abajo	$-\frac{3}{4}$	$(4, -\frac{15}{4})$	$4y + 9 = 0$
5)	$(9, -3)$	H	Izquierda	-2	$(7, -3)$	$x - 11 = 0$
6)	$(\frac{1}{2}, 3)$	V	Arriba	$\frac{5}{4}$	$(\frac{1}{2}, \frac{17}{4})$	$4y - 7 = 0$
7)	$(-7, 2)$	H	Derecha	$\frac{2}{3}$	$(\frac{19}{3}, 2)$	$3x + 23 = 0$
8)	$(10, -6)$	H	Izquierda	$-\frac{4}{5}$	$(\frac{46}{5}, -6)$	$5x - 54 = 0$
9)	$(-7, -1)$	V	Abajo	$-\frac{7}{3}$	$(-7, -\frac{10}{3})$	$3y - 4 = 0$
10)	$(-11, 0)$	H	Derecha	$\frac{15}{8}$	$(-\frac{23}{8}, 0)$	$8x + 103 = 0$
11)	$(0, 0)$	V	Abajo	$-\frac{1}{4}$	$(0, -\frac{1}{4})$	$4y - 1 = 0$
12)	$(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$	H	Izquierda	$-\frac{11}{12}$	$(-\frac{7}{6}, \frac{3}{2})$	$3x - 2 = 0$
13)	$(0, 0)$	H	Izquierda	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$2x - 1 = 0$
14)	$(0, 3)$	V	Arriba	$\frac{1}{3}$	$(0, \frac{10}{3})$	$3y - 8 = 0$

131

$$\begin{aligned} 1) & x^2 - 2x - 8y + 9 = 0 \\ 2) & y^2 - 6y - 6x + 9 = 0 \\ 3) & y^2 - 10y + 9x - 2 = 0 \\ 4) & x^2 + 4x + 3y - 20 = 0 \\ 5) & y^2 - 6y - 4x + 9 = 0 \\ 6) & x^2 + 4x + 2y + 1 = 0 \\ 7) & 16y^2 - 96y + 88x + 155 = 0 \\ 8) & x^2 - 3x - 3y + 9 = 0 \\ 9) & 9y^2 - 54y - 60x - 139 = 0 \\ 10) & 3y^2 - 6y + 4x - 9 = 0; \\ & 2x^2 - 12x - 9y + 9 = 0 \\ 11) & y^2 - 6y - x + 6 = 0; \\ & x^2 + 6x + 8y - 15 = 0 \\ 12) & x^2 + 10x - 32y - 71 = 0; \\ & x^2 + 10x + 8y - 31 = 0 \\ 13) & y^2 + 4y - 16x + 84 = 0; \\ & y^2 + 4y - 4x + 12 = 0 \\ 14) & x^2 + 8x + 4y + 20 = 0 \\ 15) & y^2 - 4y + 2x = 0 \\ 16) & y^2 - 12x - 24 = 0 \\ 17) & 2x^2 - 28x + 7y + 84 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18) & x^2 - 6x - 4y + 13 = 0; \\ & x^2 - 6x + 4y + 5 = 0 \\ 19) & 2y^2 - 8y - 3x + 5 = 0; \\ & 2y^2 - 8y + 3x + 11 = 0 \\ 20) & x^2 - 10x + y + 21 = 0; \\ & x^2 - 4x - y + 3 = 0 \\ 21) & x^2 - 4x + 4y - 8 = 0; \\ & x^2 + 52x - 108y - 8 = 0 \\ 22) & y^2 + 6y - x + 5 = 0; \\ & 9y^2 - 30y + 75x - 375 = 0 \\ 23) & 2x^2 - 4x - y + 2 = 0 \\ 24) & y^2 - 2y - x + 1 = 0 \end{aligned}$$

132

$$\begin{aligned} 1) & x^2 - 2x - 4y + 13 = 0 \\ 2) & 4y^2 - 24y + 5x - 49 = 0 \\ 3) & y^2 - 18x - 9 = 0 \\ 4) & (\frac{11}{4}, -\frac{63}{32}) \\ 5) & 4\sqrt{2} \\ 6) & 6\sqrt{2} \\ 7) & 7\sqrt{10} \\ 8) & 3x - 2y - 16 = 0 \end{aligned}$$

- 9) $2x + y - 2 = 0$; $2x - y - 6 = 0$;
 $4x + y - 3 = 0$
- 10) $2x - y + 7 = 0$
- 11) $3x + 2y + 2 = 0$; $35x + 2y + 130 = 0$
- 12) $2x - y - 2 = 0$
- 13) $36x - 12y + 25 = 0$
- 14) $x - 2y + 3 = 0$
- 15) $x - 2y + 5 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$
- 16) $x + 2y - 6 = 0$; $3x - 8y - 46 = 0$
- 17) $(7, -1)$
- 18) $5x - 18y + 25 = 0$
- 20) $82^\circ 53'$
- 21) 8 m; 17 m
- 22) 1,2 m; 30 m
- 23) $x^2 + 80y = 0$
- 24) 2,57 cm
- 25) 22,57 m; 92,28 m
- 26) 1,33 m
- 27) 4,8384 m
- 28) 5 cm; 3,6 cm
- 29) $x^2 = 96.000.000 y$; 48.000.000 km
- 30) 10,5 m
- 31) 7 m
- 32) 3.000 m

133

- 1) $7x^2 - 9y^2 - 28x + 54y - 116 = 0$
- 2) $5x^2 + 9y^2 + 10x + 54y + 41 = 0$
- 3) $y^2 - 2y - 4x + 11 = 0$;
 $y^2 - 2y + 4x + 13 = 0$
- 4) $x^2 + 2x - y - 2 = 0$
- 5) $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$
- 6) 16
- 7) $8 + 18\sqrt{6} - 6\sqrt{30}$
- 8) $(\pm 12, \pm 10)$; $(\pm 12, \mp 10)$
- 9) $81^\circ 52'$
- 10) $x^2 - 15y^2 + 26y - 7 = 0$
- 11) $8x^2 + 9y^2 - 76x + 140 = 0$
- 12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- 13) $3x + 25y = 0$
- 14) $(2, 4)$; $(2, -6)$; $(6, 4)$; $(6, -6)$
- 15) $9x^2 - 16y^2 - 36x + 96y - 252 = 0$
- 16) $3x^2 + 4y^2 - 40y - 8 = 0$
- 17) $x^2 + 5y^2 - 4x - 50y + 84 = 0$
- 18) $8\sqrt{3}$
- 19) $(-1, 10)$; $(5, 10)$
- 20) $9x^2 - 4y^2 - 72x + 24y + 72 = 0$
- 21) $y^2 - 10y - 8x + 1 = 0$
- 22) 50 m
- 23) $26^\circ 34'$
- 24) $12^\circ 40'$; $26^\circ 15'$
- 25) $4\sqrt{2}$; 2
- 26) 0,0816
- 27) 3
- 28) $3x^2 + 4y^2 - 192 = 0$
- 29) $x \pm 2y = 0$

134

- 1) $(-\infty, 2)$
- 2) $[9, \infty)$
- 3) $(-5, \infty)$
- 4) $(-\infty, 2]$
- 5) $[\frac{3}{5}, \infty)$
- 6) $(-1, \infty)$
- 7) $(-\infty, \frac{5}{3})$
- 8) $[-\frac{9}{2}, \infty)$
- 9) $(-\infty, \frac{17}{3})$
- 10) $(-\infty, -14)$
- 11) $(-23, \infty)$
- 12) $[-\frac{3}{4}, \infty)$
- 13) $(-3, \infty)$
- 14) $[\frac{5}{2}, \infty)$
- 15) $(-\infty, -1)$
- 16) $(-\frac{3}{16}, \infty)$
- 17) $(-\infty, -\frac{18}{35})$
- 18) $[-\frac{9}{4}, \infty)$
- 19) $(-\infty, \frac{1}{5})$
- 20) $[6, \infty)$
- 21) $[\frac{8}{25}, \infty)$
- 22) $(-\infty, 12)$
- 23) $[3, \infty)$
- 24) $(-\infty, -\frac{59}{2})$
- 25) $(-\infty, 1)$
- 26) $(-\infty, -\frac{1}{3})$
- 27) $(\frac{7}{8}, \infty)$
- 28) $(5, 25; \infty)$
- 29) $[-\frac{1}{3}, \infty)$
- 30) $[18, \infty)$
- 31) $(-\infty, 13\sqrt{2} + 4)$
- 32) $(2 + \sqrt{2} - \sqrt{6}, \infty)$
- 33) $(-\infty, \lg \frac{1}{24})$
- 34) $(-\infty, -1]$
- 35) $[\sqrt{3} - \sqrt{2}, \infty)$
- 36) $(-\infty, \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})$
- 37) $(-\infty, \frac{1}{2}]$
- 38) $[1, \infty)$
- 39) $(-\infty, -3)$
- 40) $(-\infty, -3)$

135

- 1) $[\frac{-4a}{a-2}, \infty)$ si $a > 2$
 $(-\infty, \frac{4a}{a-2}]$ si $a < 2$
Si $a = 2$, no hay solución
- 2) $(\frac{a+1}{a-1}, \infty)$ si $a > 1$
 $(-\infty, \frac{a+1}{a-1})$ si $a < 1$
Si $a = 1$, no hay solución
- 3) $[\frac{12a-30}{5a+8}, \infty)$ si $a > -\frac{8}{5}$
 $(-\infty, \frac{12a-30}{5a+8})$ si $a < -\frac{8}{5}$
 $\mathcal{R}$, si $a = -\frac{8}{5}$
- 4) $(-\infty, 5a)$ si $a > -7$
 $(5a, \infty)$ si $a < -7$
Si $a = -7$, no hay solución
- 5) $(-\infty, a+4)$ si $a > -5$
 $(a+4, \infty)$ si $a < -5$
Si $a = -5$, no hay solución
- 6) $(-\infty, a+b)$ si $a > b$
 $(a+b, \infty)$ si $a < b$
Si $a = b$, no hay solución
- 7) $(-\infty, \frac{1}{ab})$ si a y b son positivos
 $(\frac{1}{ab}, \infty)$ si a y b son negativos
- 8) $(a+b, \infty)$ si a y b son positivos
 $(-\infty, a+b)$ si son negativos
- 9) $[-a-b, \infty)$ si $a+b > 0$
 $(-\infty, -a-b]$ si $a+b < 0$
 $\mathcal{R}$, si $a+b = 0$
- 10) $(-\frac{a+b}{2}, \infty)$ si $a > b$
 $(-\infty, -\frac{a+b}{2})$ si $a < b$
Si $a = b$, no hay solución
- 11) $(-\infty, a+b]$
- 12) $(-\infty, 0)$ si $a > b$
 $(0, \infty)$ si $a < b$
Si $a = b$, no hay solución
- 13) $(-\infty, b-a)$ si $a+b > 0$
 $(b-a, \infty)$ si $a+b < 0$
Si $a+b = 0$, no hay solución
- 14) $[a^2 - b^2, \infty)$
- 15) $(-\infty, \frac{1}{a+b})$ si $a > b$
 $(\frac{1}{a+b}, \infty)$ si $a < b$
Si $a = b$, no hay solución
- 16) $(-\infty, a+b]$ si a y b son positivos
 $[a+b, \infty)$ si a y b son negativos
 $\mathcal{R}$, si $a+b = 0$
- 17) (ab, ∞) si a y b son positivos
 $(-\infty, ab)$ si a y b son negativos
Si $a+b = 0$, no hay solución
- 18) $(-\infty, -ab)$ si $a < b$
 $(-ab, \infty)$ si $a > b$
Si $a = b$, no hay solución

$$19) \left(-\infty, \frac{2a}{a-1}\right) \text{ si } a < 0 \text{ ó si } a > 1$$

$$\left(\frac{2a}{a-1}, \infty\right) \text{ si } 0 < a < 1$$

$$\mathbb{R}, \text{ si } a = 1$$

$$20) \left(-\infty, \frac{ab^2 - a^3}{b}\right) \text{ si } a > b$$

$$\left[\frac{ab^2 - a^3}{b}, \infty\right) \text{ si } a < b$$

$$21) (-\infty, b - a] \text{ si } a > b$$

$$[b - a, \infty) \text{ si } a < b$$

$$22) \left(-\infty, -\frac{a+b}{b}\right) \text{ si } a < b$$

$$\left[-\frac{a+b}{b}, \infty\right) \text{ si } a > b$$

$$23) \left(\frac{ab - a^2}{2b}, \infty\right) \text{ si } a > b$$

$$\left(-\infty, \frac{ab - a^2}{2b}\right) \text{ si } a < b$$

$$24) (-\infty, a) \text{ si } a < b$$

$$(a, \infty) \text{ si } a > b$$

$$25) \left(-\frac{a+b}{2}, \infty\right) \text{ si } a > b$$

$$(-\infty, -\frac{a+b}{2}) \text{ si } a < b$$

$$26) (0, \infty) \text{ si } a \text{ y } b \text{ tienen igual signo y } a > b$$

$$(-\infty, 0) \text{ si } a \text{ y } b \text{ tienen distinto signo y } a > b$$

$$27) (b - 3a, \infty) \text{ si } a \text{ y } b \text{ son ambos positivos o también si son de signo opuesto y } a + b < 0$$

$$(-\infty, b - 3a) \text{ si } a \text{ y } b \text{ son ambos negativos o también si son de signo opuesto y } a + b > 0$$

$$28) \left[\frac{b-a}{a}, \infty\right)$$

$$29) (-2a - 1, \infty) \text{ si } a > \frac{1}{4}$$

$$(-\infty, -2a - 1) \text{ si } a < \frac{1}{4}$$

$$\text{Si } a = \frac{1}{4}, \text{ no hay solución}$$

$$30) [3b, \infty) \text{ si } a > b$$

$$(-\infty, 3b] \text{ si } a < b$$

$$31) [-2, \infty) \text{ si } a > 3$$

$$(-\infty, -2] \text{ si } a < 3$$

$$32) \left[\frac{a-3b}{a-b}, \infty\right) \text{ si } b > a$$

$$(-\infty, \frac{a-3b}{a-b}) \text{ si } b < a$$

136

$$1) [-5, 2)$$

$$2) (-\infty, -8)$$

$$3) \text{ No hay solución}$$

$$4) (10, \infty)$$

$$5) \left[\frac{41}{3}, 26\right]$$

$$6) [5, \infty)$$

$$7) \left(-\frac{10}{39}, \infty\right)$$

$$8) \left(-2, -\frac{1}{8}\right] \cup \{-1\}$$

$$9) \left(20, \frac{43}{2}\right)$$

$$10) \left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]$$

$$11) \left(-\frac{1}{2}, 15\right] \cup \{6, 11\}$$

$$12) \text{ No hay solución}$$

$$13) (2, 3] \cup \left\{\frac{5}{2}, \frac{7}{3}\right\}$$

$$14) \left[\frac{7}{4}, 11\right)$$

$$15) \left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$$

$$16) \left[0, \frac{5}{8}\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$17) \left[\frac{4}{3}, 15\right)$$

$$18) (-2, 1] \cup \{-1\}$$

137

$$1) (0, 5) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, 0) \text{ si } a < 0$$

$$\text{Si } a = 0, \text{ no hay solución}$$

$$2) (1, a - 2) \text{ si } a > 3$$

$$\text{Si } 0 \leq a \leq 3, \text{ no hay solución}$$

$$(-\infty, a - 2) \text{ si } a < 0$$

$$3) (2 - b, 9 - 3a) \text{ si } a < \frac{7+b}{3}$$

$$\text{Si } a \geq \frac{7+b}{3}, \text{ no hay solución}$$

$$4) \left(\frac{1}{a-1}, \frac{3}{a-1}\right) \text{ si } 0 < a < 1$$

$$a \leq 0 \text{ ó } a \geq 1, \text{ no hay solución}$$

$$5) (-\infty, 0) \text{ si } a > b$$

$$(0, \frac{a^2+b^2}{a+b}) \text{ si } a < b$$

$$\text{Si } a = b, \text{ no hay solución}$$

$$6) \left(\frac{a}{b}, \infty\right) \text{ si } a > b; (-\infty, 0) \text{ si } a < b$$

$$7) (2ab, a^2 + b^2) \text{ si } a > b$$

$$(a^2 + b^2, \infty) \text{ si } a < b$$

$$\text{Si } a = b, \text{ no hay solución}$$

$$8) \left(\frac{3a}{2}, \infty\right) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, \frac{3a}{2}) \text{ si } a < 0$$

$$(0, \infty) \text{ si } a = 0$$

$$9) \text{ Si } a > 0, \text{ no hay solución}$$

$$\left[\frac{2a}{3}, -\frac{4a}{3}\right] \text{ si } a < 0$$

$$\{0\} \text{ si } a = 0$$

$$10) [-5a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-6a, \infty) \text{ si } a < 0$$

$$(0, \infty) \text{ si } a = 0$$

$$11) \left(\frac{5a-6}{3}, \infty\right) \text{ si } a < -\frac{21}{8}$$

$$(7a + 12, \infty) \text{ si } a > -\frac{21}{8}$$

$$\left(-\frac{51}{8}, \infty\right) \text{ si } a = -\frac{21}{8}$$

$$12) \left(\frac{5a-7}{3}, \frac{5-4a}{3}\right) \text{ si } a < \frac{4}{3}$$

$$\text{Si } a \geq \frac{4}{3}, \text{ no hay solución}$$

$$13) \left(\frac{2a}{3}, 6a\right) \text{ si } a > 0$$

$$(6a, \frac{2a}{3}) \text{ si } a < 0$$

$$\text{Si } a = 0, \text{ no hay solución}$$

$$14) \left(\frac{3a+3b}{a-b}, \frac{4a-4b}{a-b}\right) \text{ si } 0 < b < a$$

$$\left(\frac{3a+4b}{a-b}, \frac{3a+3b}{a-b}\right) \text{ si } a < b < 0$$

$$\text{Si } 0 < a < b \text{ ó } b < a < 0$$

$$\text{ó } a = b, \text{ no hay solución}$$

$$15) \left(\frac{a+1}{2a+1}, a\right) \text{ si } a > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Si } 0 < a \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ no hay solución}$$

$$16) \left(\frac{5a+5}{3a+5}, \infty\right)$$

138

$$1) (-7, 7)$$

$$2) (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

$$3) (-6, 12)$$

$$4) [-8, -2]$$

$$5) (-\infty, -2) \cup (6, \infty)$$

$$6) \mathbb{R}$$

$$7) (-\infty, -8] \cup [3, \infty)$$

$$8) \left(-\frac{8}{3}, 2\right)$$

$$9) \text{ No hay solución}$$

$$10) [-13, 8]$$

$$11) (-\infty, -2] \cup \left[\frac{14}{5}, \infty\right)$$

$$12) (-\infty, -1] \cup \left[\frac{5}{7}, \infty\right)$$

$$13) [-7, 7]$$

$$14) (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$$

$$15) (2, 3; 2, 7)$$

$$16) [-4, 26]$$

$$17) [0, 7495; 0, 7505]$$

$$18) (-\infty, -1] \cup \left[\frac{4}{2}, \infty\right)$$

$$19) (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

$$20) [-11, 9]$$

$$21) \left(-6, -\frac{27}{5}\right)$$

$$22) \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (3, \infty)$$

$$23) \left[\frac{13}{4}, \infty\right)$$

$$24) \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

$$25) \left(-\infty, \frac{13}{2}\right]$$

$$26) \left[-21, \frac{29}{11}\right]$$

$$27) (-\infty, 10)$$

$$28) \left[-\frac{30}{7}, \infty\right)$$

$$29) \left(\frac{14}{25}, \frac{10}{7}\right)$$

$$30) \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right]$$

$$31) \left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$$

$$32) \left[-\frac{7}{2}, \infty\right)$$

$$33) \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right]$$

$$34) \left[-\frac{1}{3}, 7\right]$$

$$35) \left[\frac{1}{8}, \frac{3}{2}\right]$$

$$36) \left[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{10}\right]$$

$$37) \text{ No hay solución}$$

$$38) (-5, -2) \cup (2, 5)$$

$$39) [-4, -1] \cup (1, 4]$$

$$40) [-11, -7] \cup [1, 5]$$

- 41) $(-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{2}{3}, 5)$
- 42) $[-8, -2) \cup (\frac{3}{2}, \frac{17}{2}]$
- 43) $[2, \infty)$
- 44) $(-\infty, -4] \cup \{2\}$
- 45) $\{3\}$
- 46) $(-\infty, -10) \cup (-\frac{4}{3}, \infty)$
- 47) $(-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [\frac{5}{4}, \infty)$
- 48) $(-\infty, \frac{7}{15}]$
- 49) $[-1, 1]$
- 50) $(-\infty, -\frac{8}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$

139

- 1) $(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}) \cup [2, 3)$
- 2) $(\frac{1}{3}, 1] \cup [3, \infty)$
- 3) $\{-1, \frac{3}{2}\}$
- 4) $[\frac{1}{2}, 6)$
- 5) $(-2, -\frac{5}{4}) \cup [\frac{1}{4}, 2)$
- 6) $[-1, 12]$
- 7) $(-\infty, -2] \cup (\frac{7}{3}, \infty)$
- 8) $(-\infty, -8] \cup (-\frac{9}{2}, \infty)$

140

- 1) $(3, 5)$
- 2) $(-\infty, -7] \cup (1, \infty)$
- 3) $(-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$
- 4) $\mathbb{R}$
- 5) $[\frac{-1-\sqrt{13}}{4}, \frac{-1+\sqrt{13}}{4}]$
- 6) $[-\frac{3}{7}, \frac{3}{7}]$
- 7) $\{3\}$
- 8) $(-\infty, 6 - \sqrt{11}) \cup (6 + \sqrt{11}, \infty)$
- 9) $\mathbb{R}$
- 10) $(-\infty, -\frac{\sqrt{11}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{11}}{2}, \infty)$
- 11) $\mathbb{R} - \{\frac{4}{3}\}$
- 12) No hay solución
- 13) $(-\frac{\sqrt{35}}{7}, \frac{\sqrt{35}}{7})$
- 14) No hay solución
- 15) $[-10, 11]$
- 16) $(-\infty, -\frac{1-\sqrt{89}}{10}) \cup [\frac{-3+\sqrt{89}}{10}, \infty)$
- 17) $(1 - 2\sqrt{3}, 1 + 2\sqrt{3})$
- 18) $\mathbb{R}$
- 19) $(-\infty, -\frac{5}{4}) \cup [\frac{5}{4}, \infty)$
- 20) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

- 21) $[-4, 6]$
- 22) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$
- 23) No hay solución
- 24) $(-\infty, -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}, \infty)$
- 25) $[\frac{-4-\sqrt{22}}{3}, \frac{-4+\sqrt{22}}{3}]$
- 26) $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$
- 27) $(-\infty, -1 - \sqrt{7}) \cup (-1 + \sqrt{7}, \infty)$
- 28) No hay solución
- 29) $\{2\}$
- 30) $(2 - 2\sqrt{3}, 2 + 2\sqrt{3})$
- 31) $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
- 32) $[2, 8]$
- 33) $(-\infty, -2) \cup (\frac{7}{3}, \infty)$
- 34) $\mathbb{R}$
- 35) $[-3, 3]$

141

- 1) $\{1, 3\}$
- 2) $[-2, \frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$
- 3) $(-\infty, -5] \cup (0, 3) \cup [4, \infty)$
- 4) $(-\infty, -4) \cup [-1, \frac{1}{2}) \cup (\frac{4}{3}, \infty)$
- 5) $\{3\}$
- 6) $(\frac{5-\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2})$
- 7) $(-1, 4)$
- 8) $[2, 3) \cup (4, 5]$
- 9) $(-\infty, -5] \cup [-4, -3] \cup [-2, \infty)$
- 10) $(-\infty, -7] \cup (-1, 1) \cup \{2\} \cup [4, \infty)$
- 11) $(-\infty, \frac{15-\sqrt{193}}{4}) \cup (\frac{3}{2}, 6) \cup (\frac{15+\sqrt{193}}{4}, \infty)$
- 12) $(-2, -1] \cup (0, 1)$
- 13) No hay solución
- 14) $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (-1, \frac{1}{2}) \cup [3, \infty)$
- 15) $[-4, \frac{-1-\sqrt{33}}{2}] \cup [-3, 2] \cup [1, 2] \cup [\frac{-1+\sqrt{33}}{2}, 3]$
- 16) $(-7, -5) \cup (5, 7)$
- 17) $(-\frac{11}{4}, -1) \cup (3, 6)$
- 18) $[1, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}) \cup (2, 3]$
- 19) $(2, 3)$
- 20) $(1, 3)$
- 21) $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup [4, \infty)$
- 22) $(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$
- 23) $\{3, 6\}$
- 24) $[-10, -1 - \sqrt{11}] \cup [-1 + \sqrt{11}, -3 + 3\sqrt{6}) \cup (5, 6]$

142

$$1) (-\infty, 0) \cup (5a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, 5a) \cup (0, \infty) \text{ si } a < 0$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = 0$$

$$2) [0, -3a] \text{ si } a < 0$$

$$[-3a, 0] \text{ si } a > 0$$

$$\{0\} \text{ si } a = 0$$

$$3) (3a, 4a) \text{ si } a > 0$$

$$(4a, 3a) \text{ si } a < 0$$

Si $a = 0$, no hay solución

$$4) (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$\mathbb{R} \text{ si } a < 0$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = 0$$

$$5) (-\infty, a) \cup (b, \infty) \text{ si } a < b$$

$$(-\infty, b) \cup (a, \infty) \text{ si } b < a$$

$$\mathbb{R} - \{a\} \text{ si } a = b$$

$$6) (a, b) \text{ si } a < b; \quad (b, a) \text{ si } a > b$$

$$\{0\} \text{ si } a = b$$

$$7) (-\infty, -3a) \cup (3a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, 3a) \cup (-3a, \infty) \text{ si } a < 0$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = 0$$

$$8) (-5a, 5a) \text{ si } a > 0$$

$$(5a, -5a) \text{ si } a < 0$$

Si $a = 0$, no hay solución

$$9) (-a + b, 3a - 3b) \text{ si } a > b$$

$$(3a - 3b, -a + b) \text{ si } a < b$$

$$\text{Si } a = b, \text{ no hay solución}$$

$$10) (-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2})$$

$$11) (-\infty, 0) \cup (b - a, \infty) \text{ si } a < b$$

$$(-\infty, b - a) \cup (0, \infty) \text{ si } a > b$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = b$$

$$12) (-\infty, -\sqrt{\frac{b}{a}}) \cup (\sqrt{\frac{b}{a}}, \infty) \text{ si } a \text{ y } b \text{ son positivos}$$

$$(-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}) \text{ si } a \text{ y } b \text{ son negativos}$$

$\mathbb{R}$ si $a > 0$ y $b < 0$

No hay solución si $a < 0$ y $b \geq 0$

$\mathbb{R} - \{0\}$ si $b = 0$ y $a > 0$

$$13) (-\infty, 0) \cup (a + b, \infty) \text{ si } a + b > 0$$

$$(-\infty, a + b) \cup (0, \infty) \text{ si } a + b < 0$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a + b = 0$$

$$14) (0, a - b) \text{ si } a > b$$

$$(a - b, 0) \text{ si } a < b$$

Si $a = b$, no hay solución

$$15) \mathbb{R} - \{4a\}$$

$$16) \mathbb{R} \text{ si } a > 0 \text{ y } b \geq 0$$

$$(-\infty, -\sqrt{-ab}) \cup (\sqrt{-ab}, \infty) \text{ si } a > 0 \text{ y } b < 0$$

$$(-\sqrt{-ab}, \sqrt{-ab}) \text{ si } a < 0 \text{ y } b > 0$$

$$\{0\} \text{ si } a < 0 \text{ y } b = 0$$

No hay solución si $a < 0$ y $b < 0$

$$17) (-\infty, -\sqrt{a+1}) \cup (\sqrt{a+1}, \infty) \text{ si } a > 1$$

$$(-\sqrt{a+1}, \sqrt{a+1}) \text{ si } -1 < a < 1$$

Si $a = 1$ ó $a \leq -1$, no hay solución

$$18) (-\infty, -\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) \cup (\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \infty)$$

$$\text{si } a^2 + b^2 > c^2$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\mathbb{R} \text{ si } a^2 + b^2 < c^2$$

143

$$1) [-4, -1] \cup [0, 3]$$

$$2) (-3, \frac{1}{2}) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$$

$$3) (-\infty, -1 - \sqrt{5}) \cup [-1, -1 + \sqrt{5}] \cup [3, \infty)$$

$$4) (-10, 0)$$

$$5) (-2, \infty) - \{1, 2\}$$

$$6) [-2, -1] \cup \{1\} \cup [2, \infty)$$

$$7) (-2, 1) - \{-1\}$$

$$8) (-\infty, -1 - 2\sqrt{3}) \cup \{-3\} \cup [1, -1 + 2\sqrt{3}] \cup [3, \infty)$$

$$9) (-\infty, -2) \cup (1, 3)$$

$$10) \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$11) [-3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}] \cup \{1\}$$

$$12) \mathbb{R}$$

$$13) \{-1, 1, 2\}$$

$$14) (-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$$

$$15) [-3, 3]$$

$$16) (-2, 2) - \{-1, 0, 1\}$$

144

$$1) (-\infty, -6) \cup (1, \infty)$$

$$2) (-3, 4]$$

$$3) [-4, -1] \cup (3, \infty)$$

$$4) (\frac{1}{3}, \frac{9}{10})$$

$$5) (-\infty, 0)$$

$$6) (2, 5]$$

$$7) (-\infty, -4) \cup (\frac{3}{2}, 9]$$

$$8) (-\infty, -\frac{7}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 2)$$

$$9) (-\infty, 1) - \{0\}$$

$$10) (-\infty, -3] \cup (-1, 1) \cup [5, \infty)$$

$$11) (-3, 3) \cup (13, \infty)$$

$$12) (1, 3)$$

$$13) (-\infty, -9) \cup (-3, 3) \cup (9, \infty)$$

$$14) (-2, -1) \cup (1, 3)$$

$$15) (-\frac{1}{2}, -1) \cup (1, 2)$$

$$16) (-\infty, -4) \cup (-1, 1)$$

$$17) (-8, 6)$$

$$18) (-\infty, -3) \cup [-\frac{2}{3}, 1)$$

$$19) \left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup (1, \infty)$$

$$20) [-4, -1) \cup (2, 3)$$

$$21) \{0\} \cup [2, \infty)$$

$$22) (1, \infty) - \{2\}$$

$$23) (-1, \infty) - \{1\}$$

$$24) \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] - \{-1\}$$

$$25) [-1, 0] \cup (1, \infty)$$

$$26) (-\infty, -1 - \sqrt{6}) \cup (-2, -1 + \sqrt{6})$$

$$27) (-\infty, -\frac{5}{4})$$

$$28) (-13, -\frac{2}{3}) - \{-5\}$$

$$29) (-1, \infty) - \{3\}$$

$$30) (-1, \infty) - \{3\}$$

$$31) (3, \infty)$$

$$32) (-\infty, 1] \cup [5, \infty) - \{-1\}$$

$$33) (-\infty, -\sqrt{14}) \cup (2, \sqrt{14}) \cup (8, \infty) - \{3\}$$

$$34) (-2, -1) \cup (0, 1) \cup (2, 3)$$

$$35) \{-3\} \cup [-1, 0] \cup [1, 2]$$

$$36) (-\infty, -4] \cup [-3, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 3] \cup [4, \infty) - \{0\}$$

$$37) (-\infty, -3] \cup \{-2\} \cup (-1, 2] \cup (3, 4)$$

$$38) (-\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}) \cup (0, \infty)$$

$$39) [\frac{31}{6}, \frac{15}{2})$$

$$40) (-7, -1 - \sqrt{6}) \cup [-1 + \sqrt{6}, 2)$$

$$8) \left(0, \frac{3}{2}\right] \cup (a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, a) \cup \left[\frac{3}{2}, 0\right) \text{ si } a < 0$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = 0$$

$$9) (-\infty, 0) \cup (a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, a) \cup (0, \infty) \text{ si } a < 0$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = 0$$

$$10) (-a, 0) \text{ si } a > 0$$

$$(0, -a) \text{ si } a < 0$$

Si $a = 0$, no hay solución

$$11) (-\infty, a) \cup \left(\frac{a+b}{2}, b\right) \text{ si } a < b$$

$$(-\infty, b) \cup \left(\frac{a+b}{2}, a\right) \text{ si } a > b$$

$$(-\infty, b) \text{ si } a = b$$

$$12) (-\infty, -a) \cup (a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, a) \cup (-a, \infty)$$

$$\mathbb{R} - \{0\} \text{ si } a = 0$$

$$13) \left(\frac{1}{a}, \frac{2}{a+b}\right] \cup \left(\frac{1}{b}, \infty\right) \text{ si } a > b$$

$$\left(\frac{1}{b}, \frac{2}{a+b}\right] \cup \left(\frac{1}{a}, \infty\right) \text{ si } a < b$$

$$\left(\frac{1}{b}, \infty\right) \text{ si } a = b$$

$$14) \left(-\infty, -\frac{1}{a}\right) \cup \left[\frac{1}{2a}, \frac{2}{a}\right) \text{ si } a < 0$$

$$\left(-\infty, \frac{2}{a}\right) \cup \left[\frac{1}{2a}, -\frac{1}{a}\right) \text{ si } a > 0$$

Si $a = 0$, no hay solución

$$15) (a, a+1) \text{ si } a \neq 0$$

$$\left[\frac{1}{3}, 1\right) \text{ si } a = 0$$

$$16) (-\infty, 2b-a) \text{ si } a > b$$

$$(2b-a, \infty) \text{ si } a < b$$

Si $a = b$, no hay solución

145

$$1) (-\infty, a) \cup (b, \infty) \text{ si } a < b$$

$$(-\infty, b) \cup (a, \infty) \text{ si } a > b$$

$$\mathbb{R} - \{b\} \text{ si } a = b$$

$$2) [a, b] \text{ si } a < b$$

$$[b, a] \text{ si } a > b$$

Si $a = b$, no hay solución

$$3) \left(\frac{b}{2}, b\right] \cup [a, \infty) \text{ si } a > b$$

$$\left(\frac{b}{2}, a\right] \cup [b, \infty) \text{ si } \frac{b}{2} < a < b$$

$$[a, \frac{b}{2}) \cup [b, \infty) \text{ si } a < \frac{b}{2}$$

$$\left(\frac{b}{2}, \infty\right) \text{ si } a = b$$

$$4) \left[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right) \text{ si } a > b$$

$$\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{a}\right] \text{ si } a < b$$

Si $a = b$, no hay solución

$$5) (-\sqrt{2}a, a) \cup (\sqrt{2}a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, \sqrt{2}a) \cup (a, -\sqrt{2}a) \text{ si } a < 0$$

$$6) [-\sqrt{2}b, -b) \cup [\sqrt{2}b, \infty) \text{ si } b > 0$$

$$[\sqrt{2}b, -b) \cup [-\sqrt{2}b, \infty) \text{ si } b < 0$$

$$7) (a, \infty) \text{ si } a > 0$$

$$(-\infty, a) \text{ si } a < 0$$

146

$$1) \left[\frac{4}{3}, 5\right)$$

$$2) \left(\frac{9}{4}, \infty\right)$$

$$3) \left[-\frac{4}{7}, 3\right)$$

$$4) \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{12}\right)$$

$$5) (1, \infty)$$

$$6) \left[\frac{1}{3}, \infty\right)$$

$$7) \left[1, \frac{17}{16}\right)$$

$$8) \left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \cup [7, \infty)$$

$$9) (-\infty, 5]$$

$$10) \mathbb{R}$$

$$11) (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$$

$$12) (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$$

$$13) (1, 5]$$

$$14) \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

$$15) \mathbb{R}$$

$$16) [1, \infty)$$

$$17) \left(\frac{4}{3}, 1\right]$$

$$18) (0, 1]$$

- 19) $\left(\frac{4}{15}, \frac{1}{3}\right]$
- 20) No hay solución
- 21) $(-\sqrt{3}, 2]$
- 22) $(0, 3]$
- 23) $[1, 2]$
- 24) $(0, a]$
- 25) $(-\infty, \sqrt[3]{2}]$
- 26) $\left(\frac{8}{5}, 2\right]$
- 27) $(3, \infty)$
- 28) $\left[\frac{3}{2}, 2\right)$
- 29) $[-5, 4)$
- 30) $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3)$
- 31) $\left[-3, \frac{-37+5\sqrt{37}}{74}\right)$
- 32) $(-\infty, 2]$
- 33) $(-\infty, -2) \cup \left(-1, -\frac{\sqrt{21}}{7}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{21}}{7}, 1\right) \cup (2, \infty)$
- 34) $[-1, 3)$
- 35) $(4, 5]$
- 36) $(-\infty, -\frac{5}{3}) \cup [9, \infty)$
- 37) $[-3, -1) \cup [5, 7)$
- 38) $\{1, 2\} \cup [3, \infty)$
- 39) $(-\infty, -5] \cup \left[-\frac{4}{3}, 4\right)$
- 40) $(-2, 2]$
- 41) $\{2\} \cup \left[\frac{4+\sqrt{2}}{2}, 3\right]$
- 42) $\left[\frac{1-\sqrt{29}}{2}, -1\right) \cup (4, \infty)$
- 43) $[4, 53]$
- 44) $[8, 12) \cup (24, \infty)$
- 45) $[1, 5)$
- 46) $\left(-\frac{1}{2}, 3 - 2\sqrt{3}\right)$
- 47) $\left[-1, \frac{7}{9}\right)$
- 48) $(6, 10]$
- 49) $(7, \infty)$
- 50) $\left[-\frac{4}{7}, 3\right)$
- 51) $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
- 52) $[5, \infty)$
- 53) $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (8, 9)$
- 54) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11-\sqrt{153}}{4}\right) \cup (0, 2)$
- 6) $(-\infty, -3] \cup [1, 2]$
- 7) $\left(-\frac{1}{4}, 4\right)$
- 8) $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$
- 9) $\left(-\infty, -\frac{10}{3}\right)$
- 10) $(-1, 4)$
- 11) $[\lg_5 7, \infty)$
- 12) $(-\infty, \lg_3 \sqrt{15})$
- 13) $(-\infty, \lg_2 \frac{3}{4})$
- 14) $(-\infty, 1 - \sqrt{\lg_3 21}) \cup [1 + \sqrt{\lg_3 21}, \infty)$
- 15) $(\lg_2 \sqrt{10}, \infty)$
- 16) $(\lg_{\frac{5}{3}} 15, \infty)$
- 17) $(-\infty, 1]$
- 18) $(\lg_{12} 18, \infty)$
- 19) $\mathbb{R}$
- 20) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
- 21) $[0, 2]$
- 22) $(1, \infty)$
- 23) $(-2, -1)$
- 24) $(-\infty, 2) \cup (\lg_2 5, \infty)$
- 25) $(-\infty, 0] \cup [1, 2]$
- 26) $(0, 1) \cup (\lg_2 3, 2)$
- 27) $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
- 28) $(-\infty, 0) \cup [1, 3] \cup (4, \infty)$
- 29) $[\lg_4 5, \lg_3 4] \cup [\lg_2 3, \lg_2 5)$
- 30) $(-\infty, 2) - \{0, 1\}$
- 31) $(-\infty, -2) \cup [-1, 0]$
- 32) $(-2, -1] \cup (0, \infty)$
- 33) $(-\infty, 1)$
- 34) $(-\infty, \lg_2 3)$
- 35) $(-\infty, -2]$
- 36) $(\lg_3 2, 1)$
- 37) $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$
- 38) $(\lg_3 2, \infty)$
- 39) $(-\infty, \lg_2 2] \cup [\lg_{\frac{3}{2}} 3, \infty)$
- 40) $(0, \lg_2 \frac{4}{3}) \cup (1, \infty)$
- 41) $(-\infty, -2) \cup (\lg_2 \frac{4}{3}, \infty)$
- 42) $(-3, 3)$
- 43) $[0, \infty)$
- 44) $(-3, -\frac{3}{2}) \cup (0, 5]$
- 45) $(-\infty, -7] \cup (-4, -3) \cup [-\frac{12}{5}, 0)$
- 46) $(-\infty, -12] \cup (-4, -3] \cup (-2, \infty)$
- 47) $(-\infty, \lg_3 \frac{13}{7})$
- 48) $(\lg_3 \sqrt[5]{2}, \infty)$
- 49) $(1, 2)$

147

- 1) $(6, \infty)$
- 2) $(-\infty, -2]$
- 3) $(-\infty, -3] \cup [7, \infty)$
- 4) $(-5, -2)$
- 5) $(-\frac{4}{3}, \infty)$

- 50) $(-\infty, 0] \cup [\lg_2 3, \infty)$
- 51) $(-\infty, 0) \cup (\lg_5 2, 1)$
- 52) $(\frac{3}{2}, \infty)$
- 53) $[\frac{1}{4}, \frac{5}{12}]$
- 54) $(\frac{27}{16}, \infty)$
- 55) $(4, \infty)$
- 56) $[1, \frac{17}{16})$
- 57) $[1, \frac{3}{2})$
- 58) $(2, 3) \cup (4, \infty)$
- 59) $(-\infty, 4 - \sqrt{2}) \cup (4 + \sqrt{2}, 6)$
- 60) $(-1, 0) \cup [3, \infty)$
- 61) $(-3, \frac{1-\sqrt{5}}{2}) \cup (4, 5)$
- 62) $(2, \infty)$
- 63) $(-9, \frac{-1-\sqrt{285}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{285}}{2}, 8)$
- 64) $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$
- 65) $[\lg_3 9, \sqrt{6}, \infty)$
- 66) $[\lg_9 79, 3)$
- 67) $(4, \infty)$
- 68) $[\lg_2 \frac{7}{4}, 1) \cup (2, \infty)$

148

- 1) $(1, 3)$
- 2) $(-\frac{4}{9}, \infty)$
- 3) $(-1, 1) \cup (3, 5)$
- 4) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3})$
- 5) $[2, 4]$
- 6) $(-\infty, -7)$
- 7) $(1, \infty)$
- 8) $(-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$
- 9) $(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$
- 10) $(-3, -\frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$
- 11) $[12, \infty)$
- 12) $(\frac{16}{9}, 4]$
- 13) $(2, 3) \cup (5, \infty)$
- 14) $(7, 8)$
- 15) $(-4, -3]$
- 16) $(-5, -4]$
- 17) $(2, 3]$
- 18) $[\frac{1}{10}, 100]$
- 19) $(0, \frac{1}{4}) \cup (8, \infty)$
- 20) $(0, 3) \cup [3^{3-\sqrt{2}}, 9) \cup [3^{3+\sqrt{2}}, \infty)$
- 21) $(\frac{1}{125}, 1) \cup (25, \infty)$
- 22) $(-2, -1) \cup (2, \infty)$

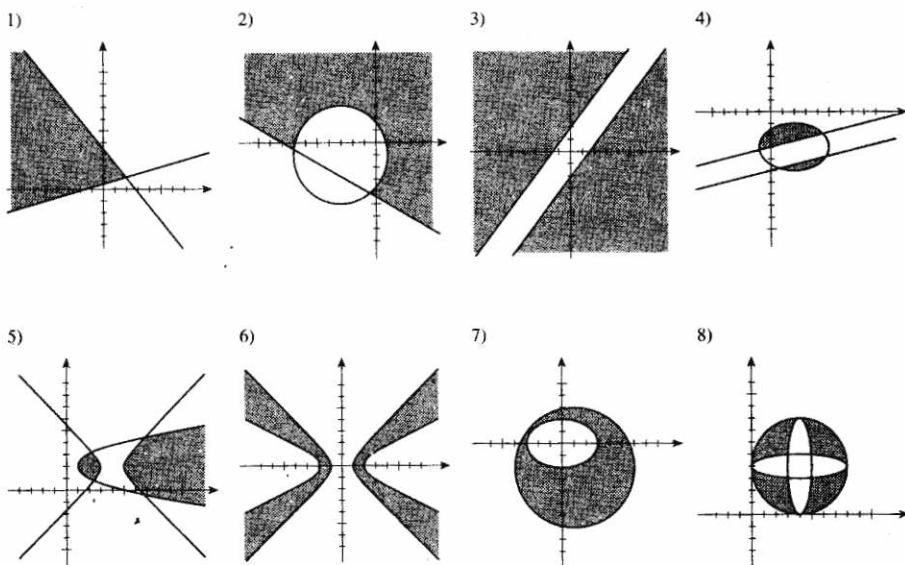
- 23) $(\frac{1}{2}, 1)$
- 24) $(0, \frac{\sqrt[3]{2}}{32}] \cup [4, \infty)$
- 25) $[4, \infty)$
- 26) $(3, \infty)$
- 27) $(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}]$
- 28) $(-1, 3)$
- 29) $(-2, 1) \cup (2, \infty) - \{0, -1\}$
- 30) $(1, 2)$
- 31) $(1, 3)$
- 32) $(4, 6]$
- 33) $(1, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$
- 34) $[\frac{-7+\sqrt{17}}{4}, \infty)$
- 35) $[16, 32)$
- 36) $(27, 2187]$
- 37) $[\frac{1}{8}, 2)$
- 38) $[\frac{1}{4}, 2] \cup [8, \infty)$
- 39) $(\sqrt{2}, \infty)$
- 40) $(-2, \frac{5-\sqrt{145}}{4}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{145}}{4}, 7)$
- 41) $(1, \infty) - \{100\}$

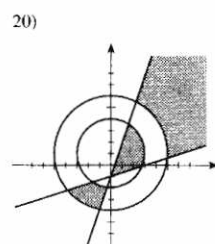
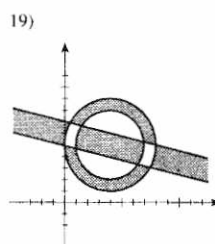
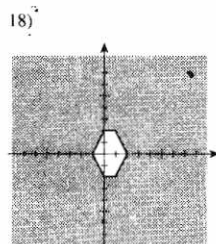
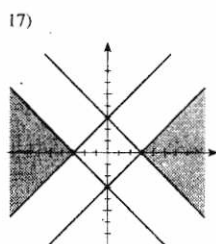
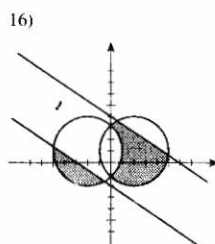
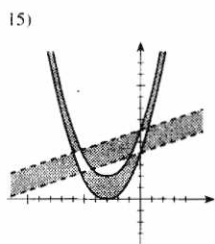
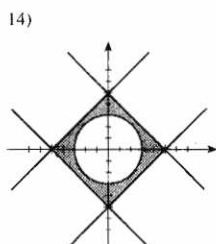
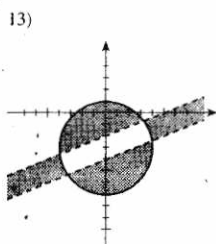
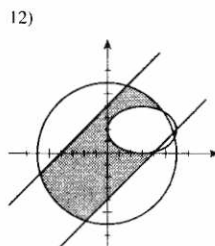
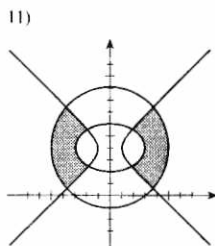
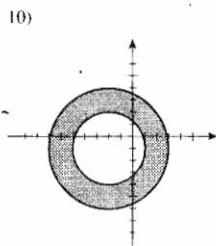
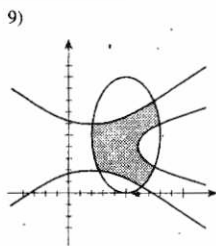
149

- 1) $(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi)$
- 2) $[\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi]$
- 3) $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi)$
- 4) $(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
- 5) $[\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{17\pi}{12} + 2k\pi]$
- 6) $[\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \frac{29\pi}{12} + 2k\pi]$
- 7) $(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi)$
- 8) $(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3})$
- 9) $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi]$
- 10) $[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi]$
- 11) $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi]$
- 12) $[-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}]$
- 13) $(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi)$
- 14) $\Re - \{(2k+1)\pi\}$
- 15) $(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$
- 16) $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$
- 17) $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$
- 18) $(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi)$
- 19) $(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi)$
- 20) $(\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$

- 21) $\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right)$
 22) $\left[-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right]$
 23) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$
 24) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 3k\pi, \frac{3\pi}{4} + 3k\pi\right]$
 25) $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi\right) - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$
 26) $\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right)$
 27) $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$
 28) $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right)$
 29) $\left[-\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$
 30) $(4k\pi, 2\pi + 4k\pi)$
 31) $\left[-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right]$
 32) $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right)$
 33) $\left[\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{7\pi}{30} + \frac{2k\pi}{3}\right]$
 34) $\left(-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$
 35) $\left(\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right)$
 36) $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi\right)$
 37) $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$
 38) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
 39) $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$
 40) $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$
 41) $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$
 42) $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$
 43) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
 44) $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \pi + k\pi\right)$
 45) $\mathbb{R} - \{2k\pi\}$
 46) $\left\{\frac{3}{4} + k\pi\right\}$
 47) $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$
 48) $\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right)$
 49) $\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$
 50) $\left[\frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{13\pi}{6} + 2k\pi\right]$
 51) $\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$
 52) $\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$
 53) $\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) - \{2k\pi\}$
 54) $\left(\frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)$
 55) $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$
 56) $\left(\frac{5\pi}{24} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{13\pi}{24} + 2k\pi, \frac{17\pi}{24} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{25\pi}{24} + 2k\pi, \frac{29\pi}{24} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{37\pi}{24} + 2k\pi, \frac{41\pi}{24} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{43\pi}{24} + 2k\pi, \frac{47\pi}{24} + 2k\pi\right)$
 57) $(-63^\circ 26' + k \cdot 180^\circ, 63^\circ 26' + k \cdot 180^\circ) \cup (71^\circ 34' + k \cdot 180^\circ, 108^\circ 26' + k \cdot 180^\circ)$
 58) $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$
 59) $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \frac{17\pi}{12} + 2k\pi\right) \cup \left(\frac{25\pi}{12} + 2k\pi, \frac{29\pi}{12} + 2k\pi\right) - \{2k\pi\}$
 60) $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$
 61) $\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right)$

150





151

- 1) $(-\infty, -\frac{7}{2}] \cup [2, \infty)$
- 2) $(0, 1)$
- 3) $(0, 3)$
- 4) $(-\infty, -1) \cup (0, \infty) - \{1\}$
- 5) $[\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, 1) \cup [\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, 2)$
- 6) $(1, 3] \cup (9, 27]$
- 7) $(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 1]$
- 8) $(0, \frac{\sqrt{3}}{3}]$
- 9) $(0, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}] \cup [2, \infty)$
- 10) $(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$
- 11) $(2, 8)$
- 12) $(-1, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, 3)$
- 13) $(2, \infty)$
- 14) $(-\infty, -5) \cup (-4, -2] \cup [3, \infty)$
- 15) $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi)$
- 16) $(63^\circ 26' + k \cdot 360^\circ, 90^\circ + k \cdot 360^\circ)$

17) $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) \cup (\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$

18) $(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2})$

19) $(-\frac{3}{2}, 4)$

20) $[-5, 1]$

21) $(-1, 1)$

22) $-2; 6$

23) 156

152

- 4) $(0, 0, 0), (0, 4, 0), (2, 4, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 6), (0, 4, 6), (2, 4, 6), (2, 0, 6)$
- 5) $99 + 3\sqrt{61}; 81$

153

- 1) $(-5, 8, 1)$
- 2) $(2, 1, -7)$
- 3) $(-2, 0, -1)$
- 4) $(7, -7, -8)$
- 5) $(3, -8, -2)$
- 6) $(-4, -1, 6)$
- 7) $(-2, -1, 7)$
- 8) $(-3, 8, 2)$
- 9) $(2, 0, 1)$
- 10) $(-7, 7, 8)$

154

- 1) $(5, -3, 6)$
- 2) $(15, 3, -8)$
- 3) $(-38, 46, -4)$
- 4) $(-1, \frac{11}{2}, -\frac{9}{4})$
- 5) $(-4, \frac{10}{3}, \frac{19}{2})$
- 6) $(28, -\frac{115}{6}, \frac{67}{4})$

155

- 1) $5\sqrt{2}$
- 2) $3\sqrt{10}$
- 3) 3
- 4) $3\sqrt{2}$
- 5) $\sqrt{94}$
- 6) $4\sqrt{2}$
- 7) 6
- 8) 2
- 9) 13
- 10) $\frac{3}{5}$
- 11) 25
- 12) 85
- 13) 37
- 14) 26
- 15) 181
- 16) 1
- 17) 9

156

- 1) Sí
- 2) Sí
- 3) Sí
- 4) No
- 5) No
- 6) -9
- 7) $\frac{1}{2}$
- 8) $\sqrt{3}$
- 9) $-\frac{1}{3}$
- 10) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 11) $41^\circ 42'$
- 12) $98^\circ 17'$
- 13) $20^\circ 7'$
- 14) $121^\circ 57'$
- 15) 90°
- 16) $\frac{56 \pm 2\sqrt{1771}}{7}$
- 17) $\frac{16 \pm \sqrt{418}}{9}$

157

- 1) $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
- 2) $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$
- 3) $(\frac{\sqrt{7}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{11}}{6})$

- 4) $(-\frac{\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{130}}{20}, -\frac{\sqrt{10}}{4})$
- 5) $(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6})$
- 6) $65^\circ 54'; 55^\circ 33'; 45^\circ$
- 7) $103^\circ 5'; 55^\circ 31'; 37^\circ 34'$
- 8) $101^\circ 6'; 101^\circ 6'; 15^\circ 47'$
- 9) $39^\circ 48'; 120^\circ 48'; 112^\circ 35'$
- 10) $67^\circ 31'; 32^\circ 44'; 112^\circ 29'$
- 11) $28^\circ 56' \text{ ó } 151^\circ 4'$
- 12) $58^\circ 44' \text{ ó } 121^\circ 16'$
- 13) $74^\circ 12' \text{ ó } 105^\circ 48'$
- 14) $31^\circ 57' \text{ ó } 148^\circ 3'$
- 15) $7^\circ 10' \text{ ó } 172^\circ 50'$

158

- 1) $\vec{m} = -\frac{2}{3}\vec{n}$
- 2) $\vec{p} = \frac{3}{4}\vec{q}$
- 3) No
- 4) $\vec{c} = -\frac{\sqrt{3}}{5}\vec{d}$
- 5) $\vec{e} = \frac{3}{10}\vec{f}$
- 6) No

159

- 1) $\vec{m} = 5\vec{a} - 2\vec{b} - 2\vec{c}$
- 2) $\vec{m} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 5\vec{c}$
- 3) No es comb. lineal
- 4) $\vec{p} = 2\vec{r} - 5\vec{s} + 4\vec{t}$
- 5) $\vec{m} = \frac{1}{3}\vec{d} + \frac{1}{2}\vec{e} - \frac{3}{2}\vec{f}$
- 6) $\vec{p} = \sqrt{2}\vec{a} + \sqrt{3}\vec{b} + \sqrt{5}\vec{c}$
- 7) No es comb. lineal
- 8) $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n} + 2\vec{p}$

160

- 1) $(16, -16, 8)$
- 2) $(-8, -26, -4)$
- 3) -338
- 4) 103
- 5) 36
- 6) $(-45, 3, 10)$
- 7) 56
- 8) $(-19, 2, 14)$
- 9) 2
- 10) $96^\circ 38'$
- 11) $110^\circ 10'$
- 12) 3
- 14) $(6, 0, -6)$
- 15) $169^\circ 20'$
- 16) 40

161

- 1) $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{-3}$
- 2) $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-5}$
- 3) $\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{z-1}{-3} \\ y = 9 \end{cases}$

- 4) $\begin{cases} x = -7 \\ \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{2} \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y}{11} \\ z = -5 \end{cases}$

- 6) Son colineales
- 7) A y B
- 8) $3\sqrt{10} + \sqrt{65} + \sqrt{107}$
- 9) $\frac{x+3}{5} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-4}{-5}$
 $\frac{x-1}{5} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+1}{-6}$
 $\frac{x-6}{9} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-5}{-1}$
- 10) $\frac{x-6}{14} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-5}{-5}$
 $\frac{x+3}{-12} = \frac{y+2}{-12} = \frac{z-4}{-4}$
 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{9} = \frac{z+1}{-11}$
- 11) $\frac{\sqrt{254}}{2}; \frac{\sqrt{329}}{2}; \frac{\sqrt{203}}{2}$
- 12) $47^\circ 44'; 71^\circ 43'; 60^\circ 33'$
- 13) $(2, -1, 5)$
- 14) $(3, 0, -2)$
- 15) $(-2, 3, 7)$
- 16) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{-1}$
- 17) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{1}$
- 18) $\frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{1}$
- 19) $\frac{x}{-1} = \frac{y}{6} = \frac{z}{5}$
- 20) $\frac{2x-3}{13} = \frac{-2y+1}{-40} = \frac{2z-9}{11}$
- 21) $\frac{x-3}{11} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-11}{2}$

162

- 1) $2x-3y-5z-1=0$
- 2) $4x-2y+11z+65=0$
- 3) $2x+y-3z-5=0$
- 4) $2x+6y-z-12=0$
- 5) $36x-6y-z+18=0$
- 6) $2x-y-2z-1=0$
- 7) $18x-4y+11z+13=0$
- 8) $4y+3z-14=0$
- 9) $47x+59y+7z-164=0$
- 10) $27x-53y+9z+313=0$
- 11) $109x-32y-25z+482=0$
- 12) $x-2y+z-3=0$
- 13) $7x-4y+z-19=0$
- 14) $2x-y-z=0$
- 15) $10x-11y-13z-14=0$
- 16) $y+2z-17=0$
- 17) $x+y+13z+21=0$
- 18) $17x+13y-15z-1=0$
- 19) $14x-y+11z-11=0$
- 20) $-2\sqrt{38}$
- 21) $\frac{50}{9}$
- 22) $\sqrt{10}$
- 23) $\sqrt{131}; \frac{x-10}{-1} = \frac{y-8}{-9} = \frac{z-11}{-1}; 262$
- 24) $(1, 7, -2)$
- 25) $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$
- 26) $88^\circ 23'$
- 27) $32^\circ 3'$
- 28) $\frac{\sqrt{38}}{4}$

29) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
 30) 7

163

- 1) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
 2) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \\ -8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$
 3) $\begin{pmatrix} 21 \\ 25 \end{pmatrix}$
 4) -1
 5) $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 10 \\ 5 & 11 & 15 \end{pmatrix}$
 6) $\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$
 7) $\begin{pmatrix} 19 & 0 & 6 \\ -24 & -4 & 7 \\ -17 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
 8) $\begin{pmatrix} 2 \\ -15 \end{pmatrix}$
 9) $\begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -6 & 19 \\ -3 & 25 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$
 10) $\begin{pmatrix} -1 & 22 & -13 \\ -144 & 6 & 65 \end{pmatrix}$
 11) $\begin{pmatrix} 32 & -118 \\ 59 & 32 \end{pmatrix}$
 13) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
 14) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
 15) $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$
 16) $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -1 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
 17) $X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -9 \end{pmatrix}$
 18) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}; Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -8 & 7 & -6 & 5 \end{pmatrix}$

164

- 1) (3, -5)
 2) (-4, -3)
 3) (10, 12)
 4) (3, -1, 2)
 5) (2, 7, -5)
 6) (-3, 2, -1)

- 7) (9, 0, -1)
 8) (-2, 3, 5, -1)
 9) (1, 1, 2, -1)
 10) (-3, 1, -4, 2)
 11) (1, 1, 2, -2, 1)
 12) (3, -1, 1, -3, 4)

165

- 1) 2
 2) $-\frac{7}{9}$
 3) 1
 4) $-2\sqrt{3}$
 5) $\sin(\beta - \alpha)$
 6) $\lg 9$
 7) 3
 8) 5; $-\frac{4}{3}$
 9) 0; 1; 3
 10) 2; -1
 11) $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{6}$
 12) $\frac{k\pi}{2} - (-1)^k \frac{\pi}{12}$
 13) (3, -4)
 14) (1, 2); $(\frac{5}{6}, \frac{41}{18})$

166

- 1) 4
 2) -12
 3) 10
 4) 0
 5) -8
 6) -23
 7) 0
 8) 18
 9) $6\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 10$
 10) $42\sqrt{2} - 21\sqrt{6} - 35\sqrt{7} - 14\sqrt{3} - 42$
 11) $\lg 2 \cdot \lg 5 - 1 - 2\lg \frac{5}{2}$
 12) $3abc - a^3 - b^3 - c^3$
 13) -2
 14) 4; $-\frac{2}{3}$
 15) 1; -2; -5
 16) 1; $\lg_3 2$; 0
 17) 1
 18) -2; 1
 19) $[-1, 2] \cup [7, \infty)$
 20) $(-\infty, -5] \cup [-1, 1] \cup [4, \infty)$

167

- 1) 6
 2) -2
 3) 7
 4) 20
 5) -7
 6) 42
 7) -14
 8) 2
 9) 5
 10) -15
 11) $\sin 2\alpha$
 12) ab

- 13) $abcd + bcd + acd + abd + abc$
- 14) x^2y^2
- 15) $\pm 2; \pm \sqrt{3}i$
- 16) $3; -1$
- 17) $\pm 1; 3$
- 18) $0; 1$
- 19) $\pm 1; 2; 3$
- 20) $a; b-a$
- 21) $b; -\frac{b}{2a}$
- 22) $b; -a; b-2a$
- 23) $1; a; -\frac{a}{1+a}$
- 24) $a+b+c; a-b+c; -a+b+c; -a-b-c$
- 25) $a+b+c; a-b+c; b \pm (a-c)i$
- 53) $a+b+c$
- 54) 1
- 55) 1
- 56) 1
- 57) $(x-1)^4$

168

- 1) 30
- 2) $2a(a+3)(a-3)$
- 3) $-2a^3(a+2)(a-2)$
- 4) 240
- 5) -20160
- 6) -600
- 7) $18a^2(a^2-4)(a^2-2)(a^2-1)$
- 8) $4\sqrt{6}$

169

- 1) $(3, -2)$
 - 2) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
 - 3) (b, a)
 - 4) $(3, -2, 7)$
 - 5) $(-4, -3, 1)$
 - 6) $(1, 2, 3, -1)$
 - 7) $(7, 1, 0, -1)$
 - 8) $(4, 4, 3, -3)$
 - 9) $(2, -1, 3, -5)$
 - 10) $(1, 1, 2, -2, 3)$
 - 11) $(1, 5, 3, 1, -2)$
 - 12) $(7, 0, -1, 1, 0)$
 - 13) $(1, 1, 1, 1, 1)$
 - 14) $(23, -17, 19, 13, 11)$
- LTPSA

170

- 1) 2
- 2) 2
- 3) 1
- 4) 3
- 5) 2
- 6) 3

- 7) 5
- 8) 4

171

- 1) Determinado. $(4, -3, 2)$
- 2) Determinado. $(3, 1, -2)$
- 3) Incompatible.
- 4) Incompatible.
- 5) Indeterminado. $(5+z, 1+z, z)$
- 6) Indeterminado. $(11-2y, y, 2)$
- 7) Determinado. $(1, -1, 1, -2)$
- 8) Determinado. $(3, -1, -1, 2)$
- 9) Incompatible.
- 10) Indeterminado. $(-2-z+v, -6-3z, z, v)$
- 11) Incompatible.
- 12) $k=-6; (12, -1, 0)$
 $k=1; (2, 5, -2)$
- 13) $k=2; (3, -1, 6)$
 $k=4; (\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$
- 14) $k=3; (-2, 5)$
- 15) $k=3; (4, -3)$
- 16) $k=10; (1, -1, 2)$
- 17) $k=4; (z+2, z+1, z)$
- 18) $k=5; (\frac{9-v}{4}, \frac{15-3v}{4}, \frac{5v-9}{4}, v)$
- 19) -3
- 20) 2
- 21) $m=3; n=-2; (\frac{4-4z}{5}, \frac{3+7z}{5}, z)$
- 22) $k=14 \rightarrow$ Indeterminado. $(\frac{33-17z}{16}, \frac{3+5z}{8}, z)$
 $k \neq 14 \rightarrow$ Incompatible.
- 23) $k=7 \rightarrow$ Indeterminado. $(\frac{4-7z}{5}, \frac{z-7}{5}, z)$
 $k = \frac{5}{11} \rightarrow$ Determinado. $(\frac{13}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{4})$
 $(k-7)(1k-5) \neq 0 \rightarrow$ Incompatible.
- 24) $k=-3 \rightarrow$ Determinado. $(-\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0)$
 $k=2 \rightarrow$ Indeterminado. $(\frac{-z+7y-2}{4}, \frac{5z+y-2}{4}, z, v)$
 $(k+3)(k-2) \neq 0 \rightarrow$ Incompatible.

172

- 1) Indeterminado. $(k, 2k, k)$
- 2) Solución trivial.
- 3) Indeterminado. $(\frac{5z-v}{6}, \frac{-z-4v}{3}, z, v)$
- 4) Solución trivial.
- 5) Indeterminado. $(2k, -3k, 2k, 7k)$
- 6) Indeterminado. $(k, -k, k, k)$
- 7) Indeterminado. $(\frac{-4y+3v}{4}, y, \frac{5v}{4}, v)$
- 8) Indeterminado. $(k, 0, 0, -k)$
- 9) $k \neq -8$
- 10) $k=3; (-9k, 8k, k)$
 $k = -\frac{1}{3}; (3k, 4k, 3k)$
- 11) $(4k+9)(k-2) \neq 0$
- 12) $(-4, -4)$
- 13) $k(k-1)(2k+3) \neq 0$

POLINOMIOS	7
Generalidades	7
Operaciones con polinomios	8
División de un polinomio entre $x+a$ - Regla de Ruffini	11
División de un polinomio entre $ax+b$	16
Teorema del Residuo (o del Resto)	19
Criterio de divisibilidad de un polinomio por $x+a$	20
Método de Horner (para expresar un polinomio en x en términos de $x+a$)	27
Variante	32
Factorización de un polinomio en x	35
Raíces múltiples	37
Raíces enteras de una ecuación	37
Acotación de raíces	37
Método de Ruffini para resolver ecuaciones de raíces enteras	38
Raíces fraccionarias de una ecuación con coeficientes enteros	44
Resolución de ecuaciones con raíces fraccionarias	45
Raíces complejas de una ecuación con coeficientes reales	51
Raíces irracionales de una ecuación con coeficientes racionales	52
Resolución de ecuaciones con dos raíces complejas o dos raíces irracionales	52
Ecuaciones recíprocas	54
Resolución de ecuaciones recíprocas	55
Ecuaciones trascendentes de grado superior	63
Factorización y simplificación de fracciones	70
Límites con la indeterminación $\frac{0}{0}$	73
Límites de funciones trascendentes con la indeterminación $\frac{0}{0}$	78
Límites de funciones irracionales (Primer tipo)	86
Divisibilidad de $x^n \pm a^n$ por $x \pm a$	88
Racionalización de denominadores	90
Límites de funciones irracionales (Segundo tipo)	104
Método de los Coeficientes Indeterminados	109
Algunas aplicaciones del Método de los Coeficientes Indeterminados	112
A) División de polinomios	112
B) Raíz de un polinomio	115
C) Separación de fracciones algebraicas en fracciones simples	119
SUMATORIAS	139
Generalidades	139
Algunas propiedades de las sumatorias	140
Ejercicios que implican el uso de sumatorias	141
INDUCCION COMPLETA	157
TEORIA COMBINATORIA	183
Factorial de un número	183
Simplificación de fracciones que contienen factoriales	185
Teoría Combinatoria	188
Teorema Fundamental	188
Permutaciones	189
Variaciones	190
Combinaciones	193
Combinaciones equivalentes	195

Factorial de cero: $0!$	196
Relación entre m y n en las fórmulas combinatorias	197
Ecuaciones que contienen expresiones combinatorias	197
Sistemas de ecuaciones que contienen expresiones combinatorias	207
Problemas de Combinatoria	210
Permutaciones con repetición	237
Variaciones con repetición	239
Combinaciones con repetición	242
Permutaciones circulares	245
BINOMIO DE NEWTON	251
Números combinatorios	251
Propiedades de los números combinatorios	252
Teorema del Binomio	260
Propiedades del Binomio de Newton	262
Desarrollo de potencias de binomios	263
Cálculo de un término cualquiera	267
Término o términos centrales	268
Términos de ordinal desconocido	270
Otros problemas de Binomio de Newton	275
Binomio de Newton y fórmula de potenciación de Moivre	290
Suma de las combinaciones posibles de n elementos	296
Suma de los coeficientes de los términos impares y de los términos pares	297
Cálculo de término general de sucesiones	300
GEOMETRIA ANALITICA DEL PLANO	305
Eje de coordenadas - Generalidades	305
Distancia dirigida entre dos puntos de un eje de coordenadas	306
Sistema de ejes coordenados	307
Coordenadas de un punto en el plano	307
Distancia dirigida entre dos puntos de igual abscisa o de igual ordenada	309
Distancia entre dos puntos del plano	310
Coordenadas del punto medio de un segmento	322
Punto que divide un segmento en una razón dada	333
Pendiente de un segmento	342
Angulo que forman dos rectas entre sí	349
Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad	355
Demostración analítica de teoremas geométricos	361
Lugares geométricos	367
ECUACION DE LA RECTA	373
Ecuación de una recta paralela a uno de los ejes coordenados	373
Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente conocida	376
Ecuación general de la recta	376
Intersección de rectas	379
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos	381
Ordenada en el origen y abscisa en el origen	383
Ecuación de la recta conocidas su pendiente y su ordenada en el origen	384
Ecuación de la recta conocidas su ordenada y su abscisa en el origen	384
Pendiente y ordenada en el origen a partir de la ecuación general	398
Condiciones de paralelismo y de perpendicularidad en la ecuación general	398
Angulo que forman dos rectas cuyas ecuaciones están dadas en forma general	401
Distancia de un punto a una recta	403
Ecuación de las bisectrices de los ángulos que forman dos rectas	414
Distancia entre rectas paralelas	418
Area de un triángulo de vértices conocidos	423
Area de un polígono de vértices conocidos	424
Puntos colineales	425
Rectas concurrentes	430
Familias de rectas	432
CONICAS	449
LA CIRCUNFERENCIA	452
Definición	452

Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general	453
Intersección de curvas de segundo grado	463
Pendientes de la tangente y de la normal a una circunferencia	465
Longitud de la tangente trazada desde un punto a una circunferencia	466
LA ELIPSE	484
Definición	484
Ecuación de la elipse	485
Excentricidad de la elipse	487
Directrices de la elipse	488
Cuerda, diámetro, lado recto de la elipse	489
Ecuación canónica de la elipse	490
Tangente a una elipse	491
Ecuación general de la elipse	498
Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general	499
LA HIPERBOLA	511
Definición	511
Ecuación de la hipérbola	511
Asíntotas de la hipérbola	513
Rectángulo principal de la hipérbola	515
Excentricidad de la hipérbola	515
Directrices de la hipérbola	516
Lado recto de la hipérbola	517
Ecuación canónica de la hipérbola	518
Hipérbola equilátera	519
Hipérbolas conjugadas	519
Ecuación de las asíntotas a partir de la ecuación canónica de la hipérbola	519
Tangente a una hipérbola	520
Ecuación general de la hipérbola	522
Estudio de la hipérbola a partir de la ecuación general	522
LA PARABOLA	534
Definición	534
Ecuación de la parábola	534
Excentricidad de la parábola	536
Lado recto de la parábola	536
Ecuación canónica de la parábola	537
Tangente a una parábola	537
Ecuación general de la parábola	539
Estudio de la parábola a partir de la ecuación general	539
INECUACIONES	555
Generalidades	555
Soluciones de una inecuación	558
Resolución de las inecuaciones	558
Formas de expresar las soluciones de una inecuación	558
INECUACIONES CON UNA VARIABLE	559
INECUACIONES LINEALES	559
Discusión de inecuaciones con parámetros (inecuaciones literales)	562
Sistemas de inecuaciones lineales	567
INECUACIONES DE VALOR ABSOLUTO	575
INECUACIONES CUADRATICAS	582
INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR	594
INECUACIONES RACIONALES	599
INECUACIONES IRRACIONALES	607
INECUACIONES EXPONENCIALES	618
INECUACIONES LOGARITMICAS	626
INECUACIONES TRIGONOMETRICAS	634
INECUACIONES CON DOS VARIABLES	644
INECUACIONES LINEALES	644
INECUACIONES LINEALES DE VALOR ABSOLUTO	646
INECUACIONES CUADRATICAS	646

VECTORES EN EL ESPACIO	655
Coordenadas en el espacio	655
Representación de puntos	655
Componentes de un vector	657
Multiplicación de un escalar por un vector	658
Suma algebraica de vectores	658
Módulo o norma de un vector	659
Producto escalar de vectores	660
Definición trigonométrica del producto escalar	660
Ángulo que forman dos vectores	660
Vectores ortogonales o perpendiculares	661
Vector unitario	663
Ángulos directores de un vector	663
Cosenos directores	663
Relación entre los cosenos directores	664
Vectores linealmente dependientes	665
Combinación lineal de vectores	666
Vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$	668
Producto vectorial de vectores	668
Producto mixto	670
RECTA Y PLANO EN EL ESPACIO	673
Ecuación de la recta en el espacio	673
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos	675
Distancia entre dos puntos	675
Punto medio de un segmento	675
Puntos colineales	676
Ecuación del plano	679
Ecuación simétrica o segmental del plano	680
Ecuación del plano que pasa por tres puntos	680
Distancia de un punto a un plano	681
Otras fórmulas	682
MATRICES Y DETERMINANTES	691
Matrices - Generalidades	691
Operaciones elementales con matrices	694
Método de eliminación de Gauss	700
Inversiones de una permutación	706
DETERMINANTES	707
Desarrollo de determinantes por filas y columnas	708
Desarrollo de determinantes por cofactores	710
Propiedades de los determinantes	713
Menor complementario de un elemento	716
Adjunto de un elemento	717
Desarrollo de un determinante en términos de los elementos de una línea	717
Utilidad del desarrollo por adjuntos	718
Desarrollo de determinantes en términos de los elementos de una línea superior al tercero	718
Determinante de Vandermonde	729
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por determinantes - Método de Cramer	732
Característica de una matriz regular	736
Menor de una matriz	736
Menor ordenado	737
Característica de una matriz	738
Cálculo de la característica de una matriz	738
DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	743
Teorema de Rouché-Frobenius	744
Sistemas de ecuaciones lineales homogéneas	758
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales homogéneas indeterminados	759
APENDICE - CIRCUNFERENCIA	769
RESULTADOS	773

